Arbeid og kinetisk energi

21.02.2013

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$ arbeid er tilført mekanisk energi.

kinetisk energi $K = \frac{1}{2} m v_x^2$

arbeid generelt: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt$

arbeid hvis kraften er bare posisjonsavhengig: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(x)\, v_x dt = \int_{x_0}^{x_1} F_x^{\text{net}}(x)\, dx$

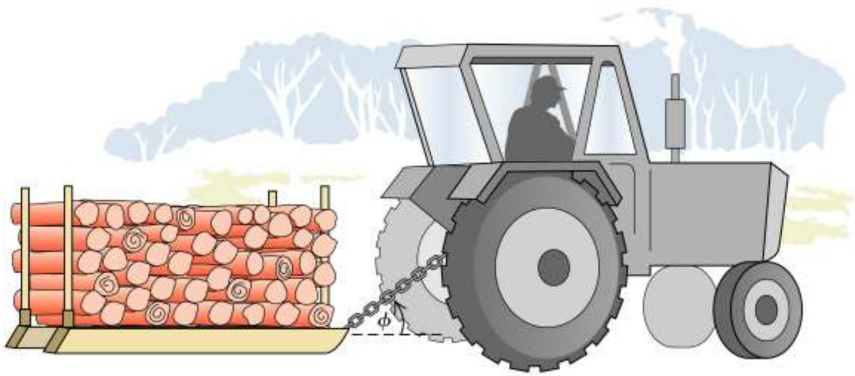
alternativ formulering for Newtons andre lov
$\Rightarrow$ bare gyldig i inertialsystemer

arbeid utført av **nettokraften** $F^{\text{net}} = \sum_j F_j$ summe av **alle** kreftene

$$W^{\text{net}} = \int_{t_0}^{t_1} F^{\text{net}}\, v\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_j F_j\, v\, dt = \sum_j \int_{t_0}^{t_1} F_j\, v\, dt = \sum_j W_j$$

vi måler arbeid og energi i Joule: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

En traktor som kjører med konstant fart trekker en slede lastet med tømmer. Det er friksjon mellom sleden og veien. Når sleden har flyttet seg en avstand *d* er arbeidet som er utført på sleden:



1. Positivt
2. Negativt
3. Null
4. Ikke nok informasjon til å avgjøre

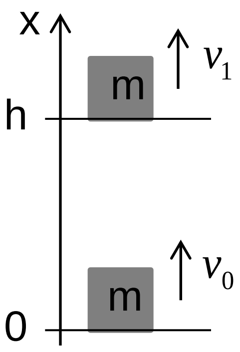
farten er konstant: $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = K_0$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0 = 0$

traktoren gjør positiv arbeid på sleden,
friksjonen gjør negativ arbeid på sleden

vertikal kast
uten luftmotstand

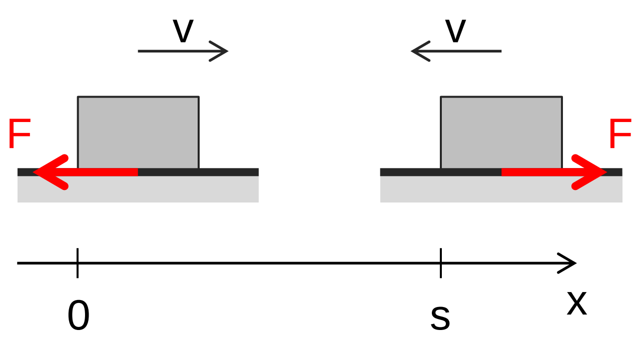
$$F_x^{\text{net}} = -mg$$



opp: $$W_{0,1} = \int_0^h F_x^{\text{net}}\, dx = -mgh < 0$$

ned: $$W_{1,0} = \int_h^0 F_x^{\text{net}}\, dx = -mg(0-h) = mgh > 0$$

kiste som skli med friksjon



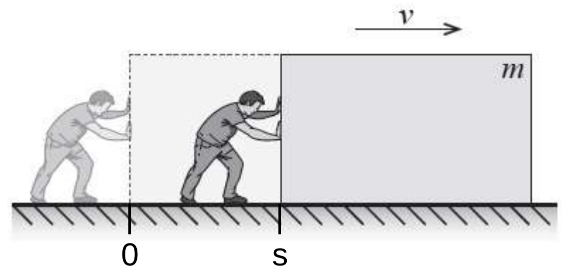
$$F_x^{\text{net}}(v_x) = -\mu N \frac{v_x}{|v_x|}$$

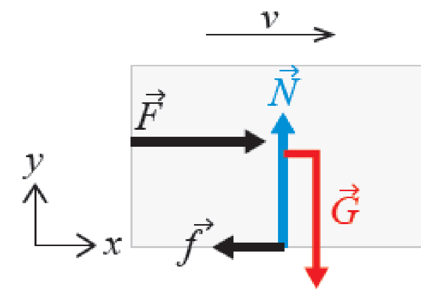
til høyre: $$W_{0,1} = \int_0^s F_x^{\text{net}}\, dx = -\mu N s < 0$$

til venstre: $$W_{0,1} = \int_s^0 F_x^{\text{net}}\, dx = \mu N(0-s) < 0$$

Hva er forskjell mellom de to kreftene ?

En mann dytter en kiste med en konstant kraft F.





friksjon: $\vec{f} = -\mu_d N \hat{i}$

kraft fra mannen på kisten: $\vec{F} = F\hat{i}$

normalkraft: $\vec{N} = N\hat{j}$

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{j}$

ingen bevegelse i vertikalretning:

$$N - mg = ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

arbeid fra mann på kisten: $W_F = \int_0^s F\, dx = F\int_0^s dx = Fs > 0$

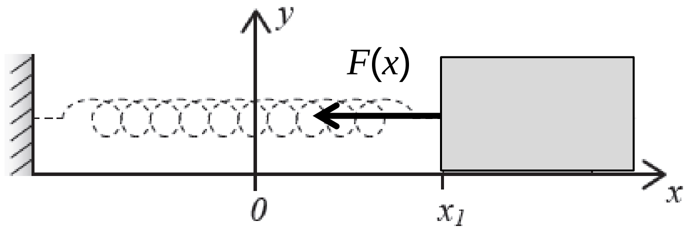
arbeid fra friksjon på kisten: $W_f = \int_0^s f\, dx = -\mu_d mg \int_0^s dx = -\mu_d mgs < 0$

nettoarbeid: $W_{\text{net}} = \int_0^s F_{\text{net}}\, dx = \int_0^s (F - \mu_d mg)\, dx = Fs - \mu_d mgs = W_F + W_f$

arbeid-energi teorem: $W_{\text{net}} = K_1 - K_0$

$$Fs - \mu_d\, mgs = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Eksempel: En kloss er festet til en fjær og beveger seg uten friksjon og luftmotstand



$F(x)$: kraft fra fjæren på klossen

Fjærkraft: $F_k = -kx$

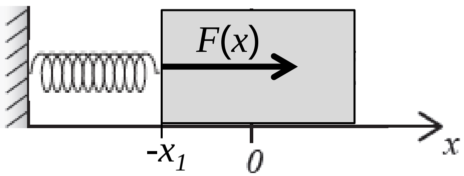
bare posisjonsavhengig
(likevektsposisjon: x=0)

arbeid av fjærkraften på klossen når den beveger seg fra likevektsposisjon x=0 til posisjon x=x_1:

$$W = \int_0^{x_1} F_k(x)\,dx = -k\int_0^{x_1} x\,dx = -\frac{1}{2}kx_1^2$$

arbeid er negativ: fjæren bremser klossen i sin bevegelse til høyre.

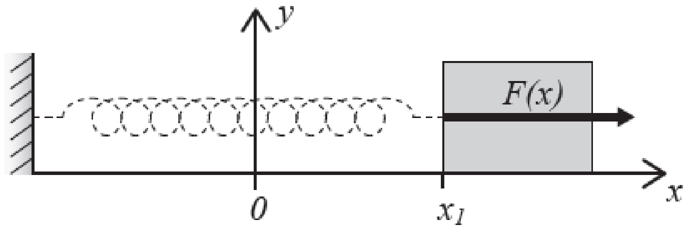
arbeid av fjærkraften på klossen når den beveger seg fra x = $-x_1$ til likevektsposisjonen ved x = 0:



$$W = \int_{-x_1}^{0} F_k(x)\,dx = -k\int_{-x_1}^{0} x\,dx = -k\left(0 - \frac{1}{2}(-x_1)^2\right) = \frac{1}{2}kx_1^2$$

arbeid er positiv: fjæren akselererer klossen i sin bevegelse til høyre.

hvis jeg trekker på klossen



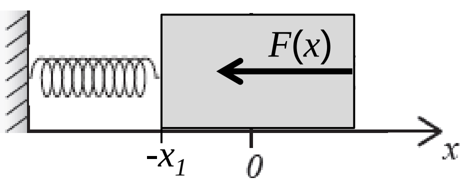
jeg bruke en kraft som er motkraft til fjærkraften: $F_k = kx$

min arbeid på klossen for å bevege den
fra likevektsposisjon x=0 til posisjon x=x_1:

$$W = k\int_0^{x_1} x\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2$$

jeg gjør positiv arbeid på klossen

hvis jeg dytter klossen inn i fjæren



min arbeid på klossen for å bevege den
fra likevektsposisjon x=0 til posisjon x=-x_1:

$$W = k\int_0^{-x_1} x\,dx = \frac{1}{2}k(-x_1)^2 = \frac{1}{2}kx_1^2$$

jeg gjør positiv arbeid på klossen

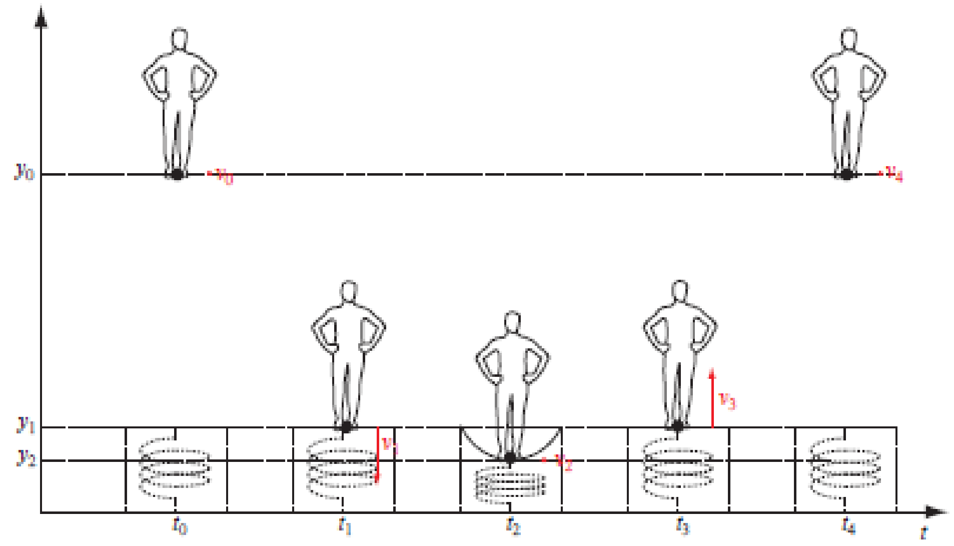
hva hvis jeg bare holder klossen?

Eksempel:

En person ($m=70$ kg) hopper fra en høyde $y_0=2.5$ m på en trampoline som kan beskrives med en fjærkonstant $k=10000$ N/m. Finn:

- farten når han treffer på trampolinen
- maksimal nedbøyning av trampolinen

Du kan se bort fra luftmotstand og friksjon.



vi definerer aksen:

- person starter ved høyden $y_0=2.5$ m
- trampoline befinner seg ved $y_1=0$ m
- maksimal utslag ved $y_2 < 0$

vi deler bevegelsen i fire faser:

- person i luften
- person i kontakt med trampolinen på veien ned
- person i kontakt med trampolinen på veien opp
- person igjen i luften

vi er ikke interessert i bevegelsen som funksjon av tiden

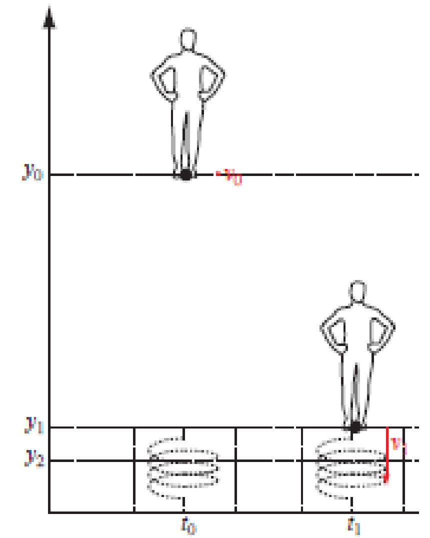
vi trenger sammenheng mellom posisjon og fart:

- fart når person er ved $y=0$ m
- posisjon i nederste punkt y_2 når farten er null

vi bruker arbeid-energi teorem istedenfor bevegelseslover

fase 1:

- start ved høyden y_0 = 2.5 m med fart v_0 = 0 m/s
- slutt ved høyden y_1 = 0 m med ukjent fart v_1



eneste kraft: gravitasjon: $F_{\text{net}} = F_G = -mg$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

kinetisk energi $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$

kinetisk energi $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$

arbeid $W_{0,1} = \int_{y_0}^{y_1} F_G \, dy = -mg(y_1 - y_0) = mgy_0$

$$W_{0,1} = 70\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 2.5\,\text{m} \approx 1717\,\text{J}$$

gravitasjon gjør positivt arbeid
på kroppen $\Rightarrow$ kinetisk energi øker

arbeid-energi teorem:

$$mgy_0 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

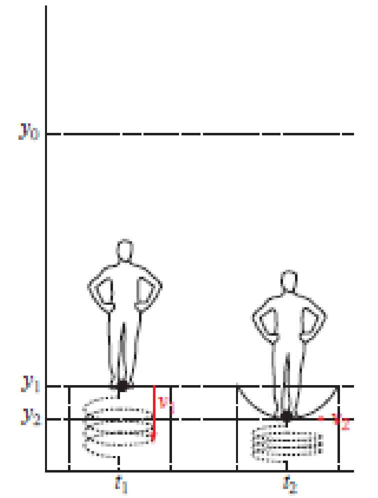
$$v_1 = \pm\sqrt{2gy_0}$$

$$|v_1| = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\text{m/s} \cdot 2.5\,\text{m}} \approx 7.0\,\text{m/s}$$

Hva er betydning av positiv og negativ løsning?

fase 2:

- start ved høyden y_1 = 0 m med fart v_1
- slutt ved ukjent høyden y_2 < 0 med fart v_2 = 0 m/s



krefter:

- gravitasjon: $F_G = -mg$
- fjærkraft: $F_k(y) = -k(y - y_1) = -ky$

nettokraft bare posisjonsavhengig

arbeid $W_{1,2} = \int_{y_1}^{y_2} F_{\text{net}}\, dy = \int_0^{y_2} (-mg - ky)\, dy = -mgy_2 - \frac{1}{2} k y_2^2$

gravitasjon gjør positivt arbeid: $W_{G,1,2} = -mgy_2 > 0$

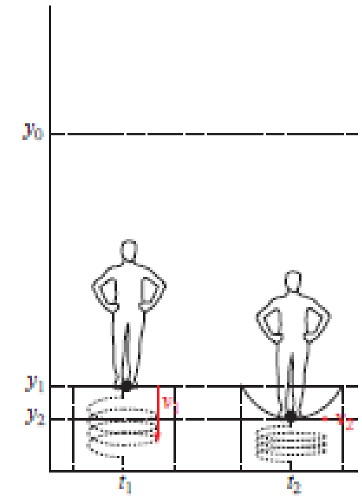
fjærkraft gjør negativt arbeid: $W_{k,1,2} = -\frac{1}{2} k y_2^2 < 0$

arbeid-energi teorem: $W_{1,2} = K_2 - K_1$

kinetisk energi $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = mgy_0$

kinetisk energi $K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = 0$

arbeid-energi teorem: $W_{1,2} = K_2 - K_1$



$$-mgy_2 - \frac{1}{2}ky_2^2 = 0 - mgy_0$$

$$y_2^2 + \frac{2mg}{k}y_2 - \frac{2mgy_0}{k} = 0$$ andregradsligning

$$y_2 = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgy_0}{k}}$$

vi vurderer den negative løsningen: $y_2 = -\frac{mg}{k} - \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgy_0}{k}} \approx -0.66\,\mathrm{m}$ maksimal utslag

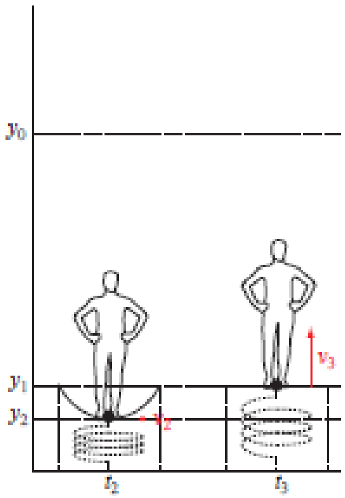
arbeid fra tyngdekraften fra y_0 til y_1: $W_{G,0,1} = mgy_0 \approx 1717\,\mathrm{J}$

arbeid fra tyngdekraften fra y_1 til y_2: $W_{G,1,2} = -mgy_2 \approx 452\,\mathrm{J}$

arbeid fra fjærkraften fra y_1 til y_2: $W_{k,1,2} = -\frac{1}{2}ky_2^2 \approx -2169\,\mathrm{J}$

fase 3:

- start ved høyden y_2 = -0.66 m med fart v_2 = 0 m/s
- slutt ved høyden y_1 = 0 m



krefter:

- gravitasjon: $F_G = -mg$
- fjærkraft: $F_k(y) = -ky$

arbeid $W_{2,1} = \int_{y_2}^{y_1} F_{\text{net}}\, dy = -\int_{y_1}^{y_2} F_{\text{net}}\, dy = -W_{1,2} = mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2$

gravitasjon gjør negativt arbeid: $W_{G,1,2} = mgy_2 < 0$

fjærkraft gjør positivt arbeid: $W_{k,1,2} = \frac{1}{2}ky_2^2 > 0$

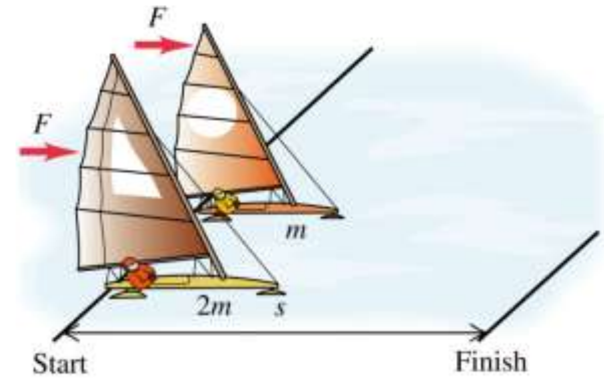
arbeid-energi teorem: $W_{2,1} = K_1 - K_2$

kinetisk energi $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0$

kinetisk energi $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_0$

kinetisk energi på veien opp er
den samme som på veien ned,
men hastighet har motsatt fortegn: $v_3 = -v_1$

To isbåter (en med masse *m* og en med masse *2m*) kappkjører på en friksjonsfri, horisontal, frossen innsjø. Begge båtene starter fra ro, og vinden utøver samme, konstante kraft på begge.
Hvilken isbåt krysser mållinjen med mest kinetisk energi K ?



1. Isbåten med masse *m*
2. Isbåten med masse *2m*
3. De har den samme K idet de når mållinjen.

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_{\text{net}}\, dx = K_1 - K_0 = K_1$

siden kraften er den samme, er også den kinetiske energien den samme

Hvilken kommer først fram?

1. Isbåten med masse *m*
2. Isbåten med masse *2m*
3. De kommer fram samtidig.

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m v_1^2 = 2m v_2^2$$

$$v_1 = \sqrt{2} v_2$$

isbåten med masse *m* er raskere og kommer først fram.

Så langt har vi sett på bevegelser i én dimensjon.
Kan vi bruker arbeid-energi teoremet i tre dimensjoner?

Vi tar utgangspunkt i Newtons andre lov:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

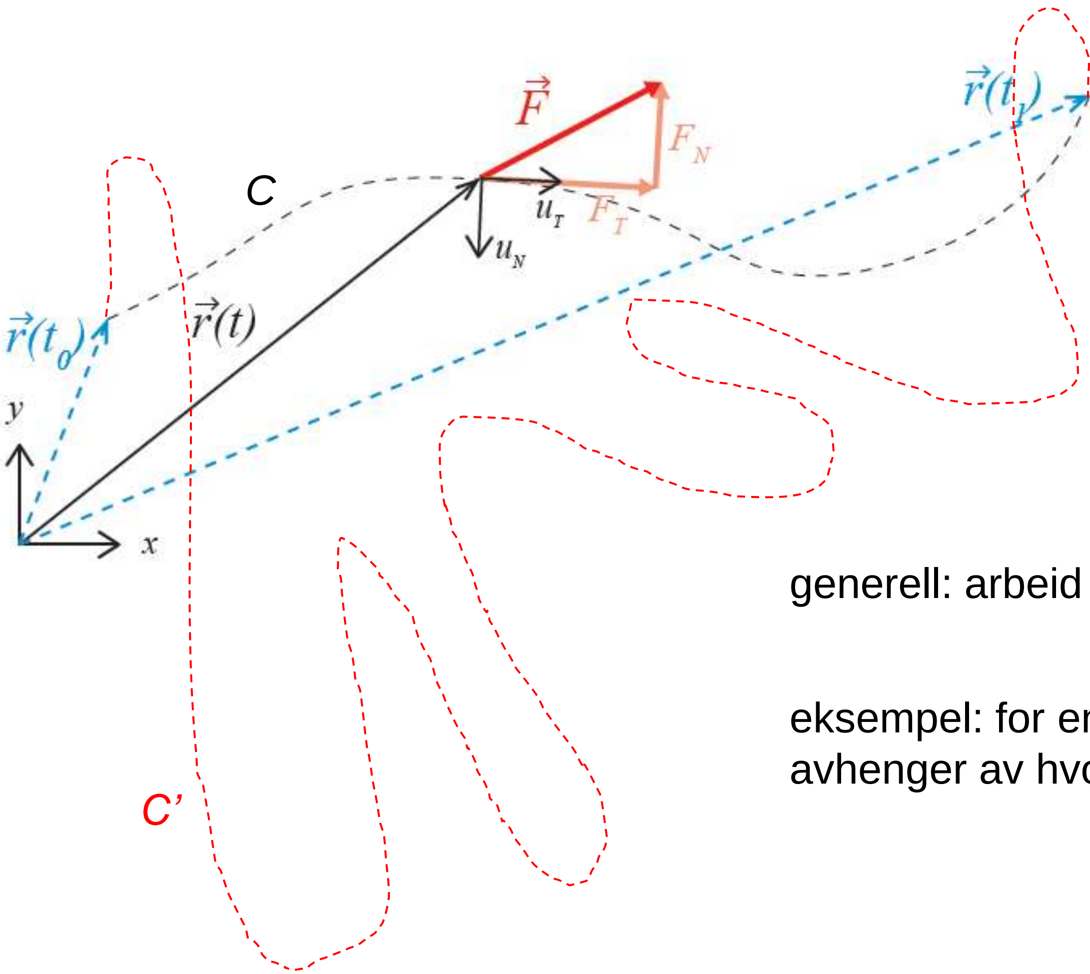
$$\vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv^2(t_0)$$

$W_{0,1} = K_1 - K_0$ arbeid-energi teorem

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r}$



det er mange veier for å komme fra 0 til 1

kurveintegral langs en kurve *C*

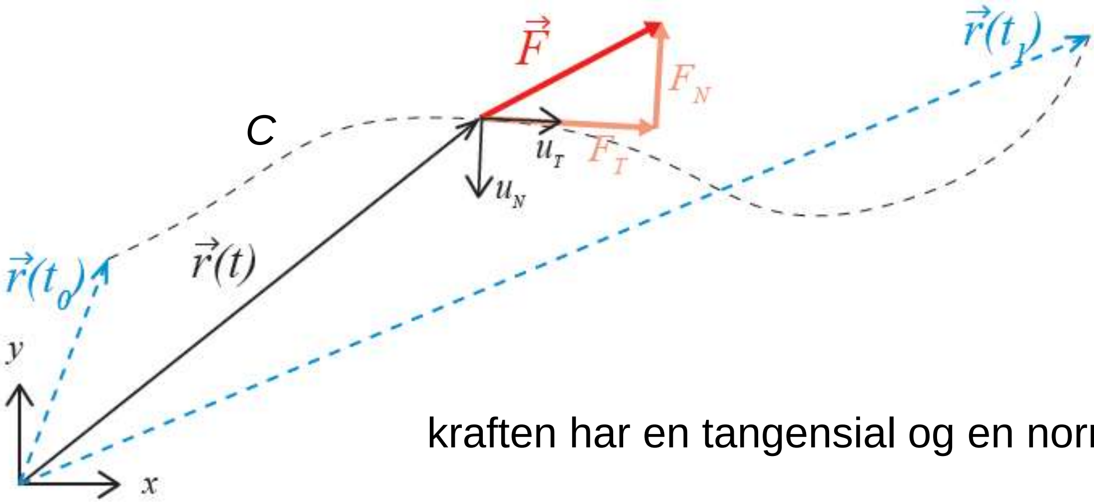
start i $\vec{r}(t_0)$

slutt i $\vec{r}(t_1)$

generell: arbeid avhenger av veien fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$

eksempel: for en friksjonskraft vil arbeid avhenger av hvor lenge veien er.

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r}$



kraften har en tangensial og en normal komponent: $\vec{F} = F_T\, \hat{u}_T + F_N\, \hat{u}_N$

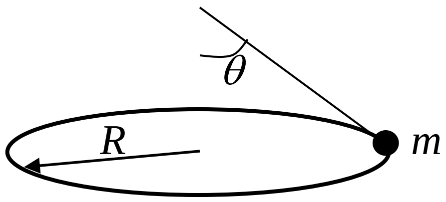
hastighetsvektor er i tangensial retning: $\vec{v} = v\,\hat{u}_T$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (F_T\, \hat{u}_T + F_N\, \hat{u}_N) \cdot v\,\hat{u}_T = F_T\, v$$

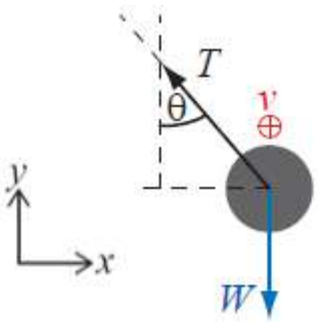
$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T\, v\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T \frac{ds}{dt}\, dt = \int_C F_T\, ds$$

bare kraften i tangensialretning bidrar til arbeidet

Jeg svinger en kloss med masse m i en horisontal sirkel med radius R. Vi ser bort fra luftmotstanden. Hva er arbeidet utført på klossen i løpet av en svingeperiode?



1. $W = mg \sin\theta\, 2\pi R$
2. $W = mg \cos\theta\, 2\pi R$
3. $W = mg 2\pi R$
4. $W = m(v^2/r)\, 2\pi R$
5. $W = 0$



Nettokraft i x retning:
sentripetalkraft som holder massen på sirkelbanen

Kraft og vei er ortogonale i hvert punkt:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \left(-m \frac{v^2}{R} \right) \hat{u}_N \cdot ds\, \hat{u}_T = 0$$

Arbeidet av netto kraft blir null.