Potensiell energi

Bevegelsesmengde

12.03.2013

konservativ kraft $\Leftrightarrow$ kraft som bare avhenger av posisjon

arbeid avhenger bare av start- og sluttposisjon,
ikke av veien i mellom

arbeid er null hvis start- og sluttposisjon er identisk

vi kan finne et potensial slik at $\frac{dU}{dx} = -F(x)$

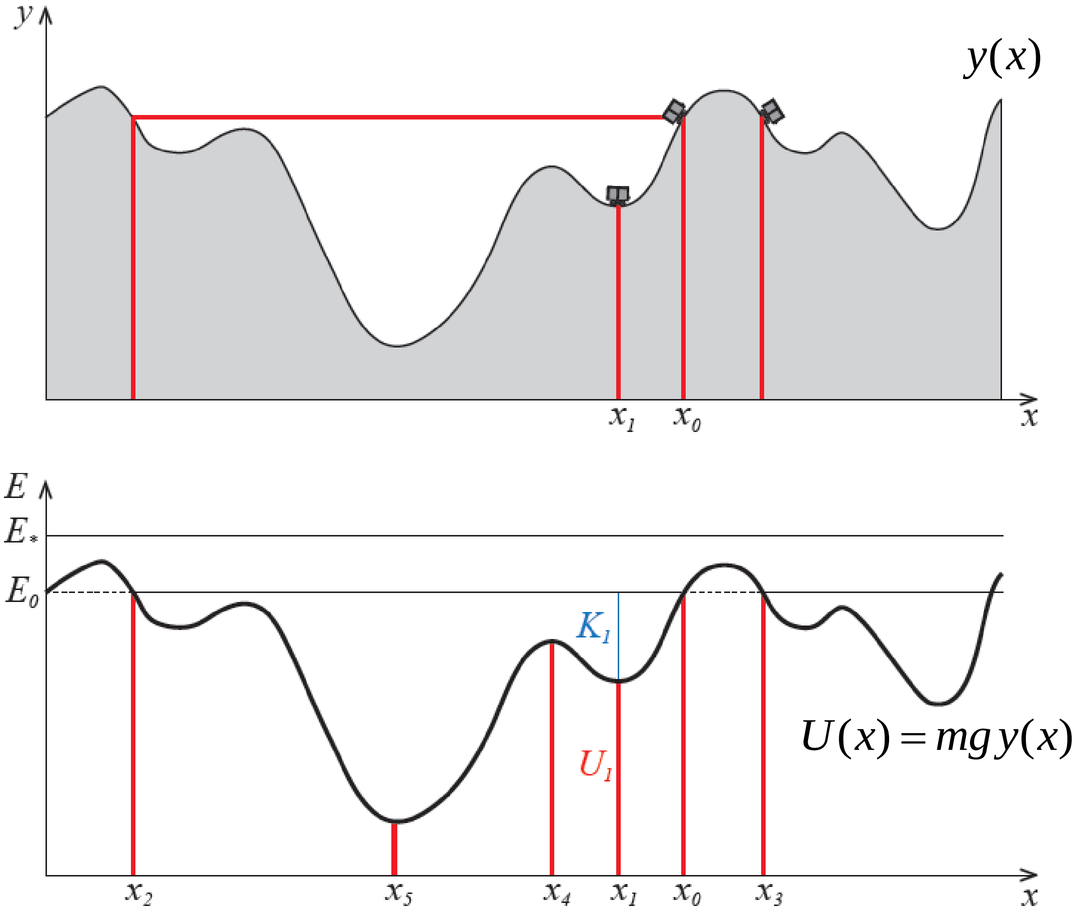
energi er bevart $K_0 + U(x_0) = K_1 + U(x_1)$

flere konservative krefter: $F_{\text{net}} = \sum_i F_i(x)$

potensial til hver kraft $\frac{dU_i}{dx} = -F_i(x)$

energibevaring: $K_0 + \sum_i U_i(x_0) = K_1 + \sum_i U_i(x_1)$

Energidiagrammer



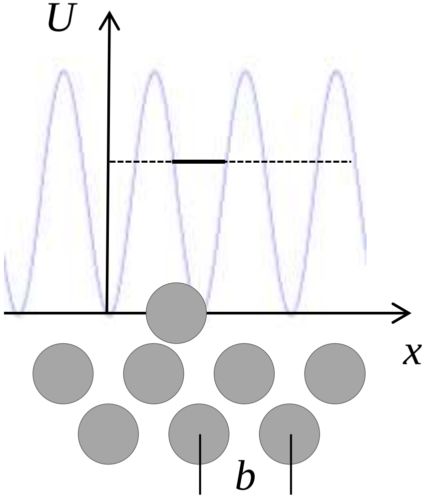
energibevaring:

$$E = K(x) + U(x) = K(x_0) + U(x_0)$$

hvis $K(x_0) = 0$

$$K(x) = U(x_0) - U(x) \geq 0$$

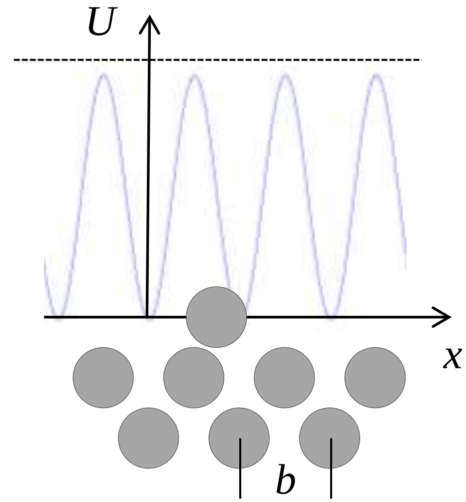
$$U(x) \leq U(x_0)$$



$$E = K + U < U_{\max}$$

kinetisk energi
kan bli null

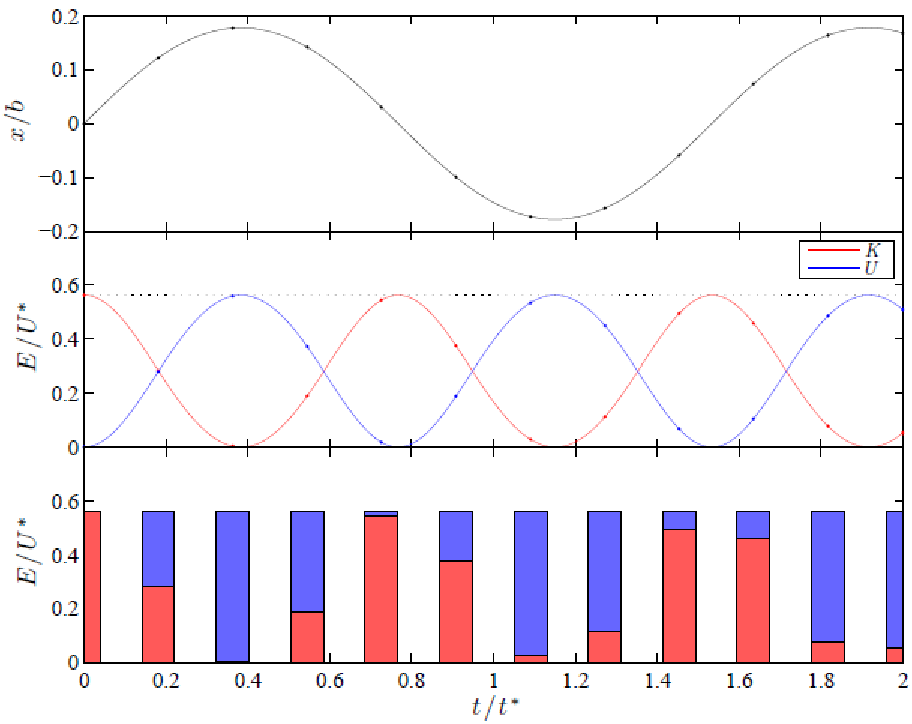
atom er "fanget" i
potensialet og svinger
frem og tilbake

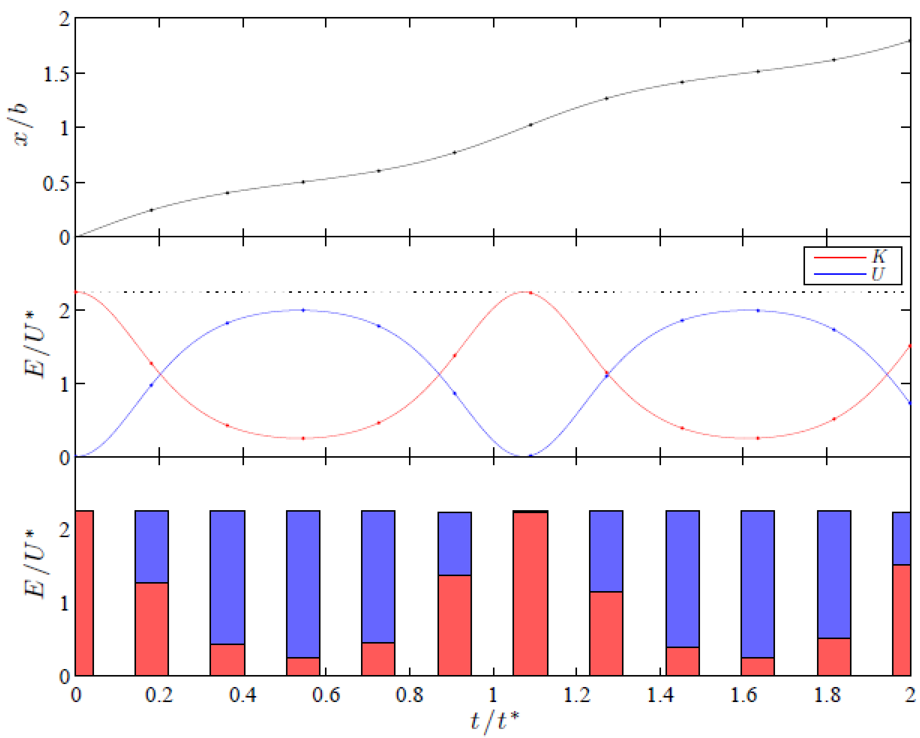


$$E = K + U > U_{\max}$$

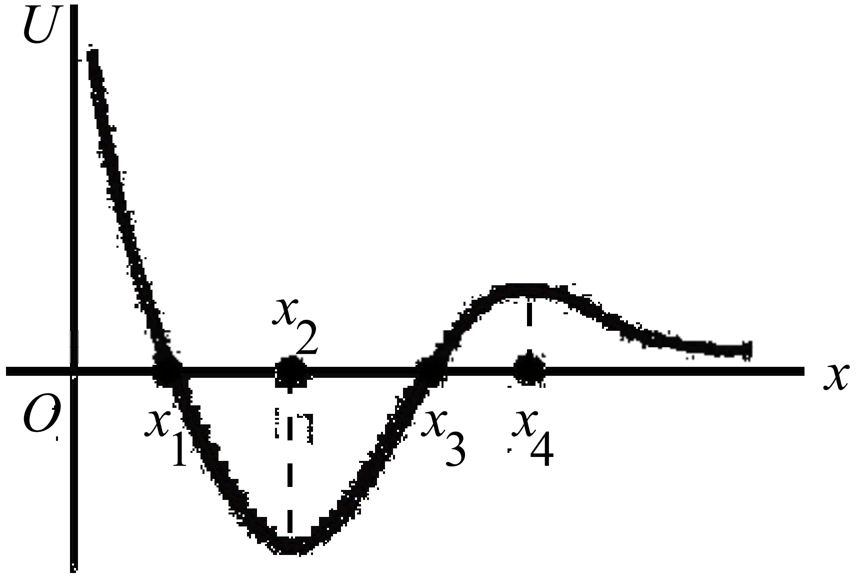
$$K(x) > 0$$

atomet kan bevege
seg overalt





Grafen viser den potensielle energien til en partikkel som beveger seg langs *x*-aksen. Partikkelen starter ved $x=x_4$ og beveger seg i negativ *x*-retning.



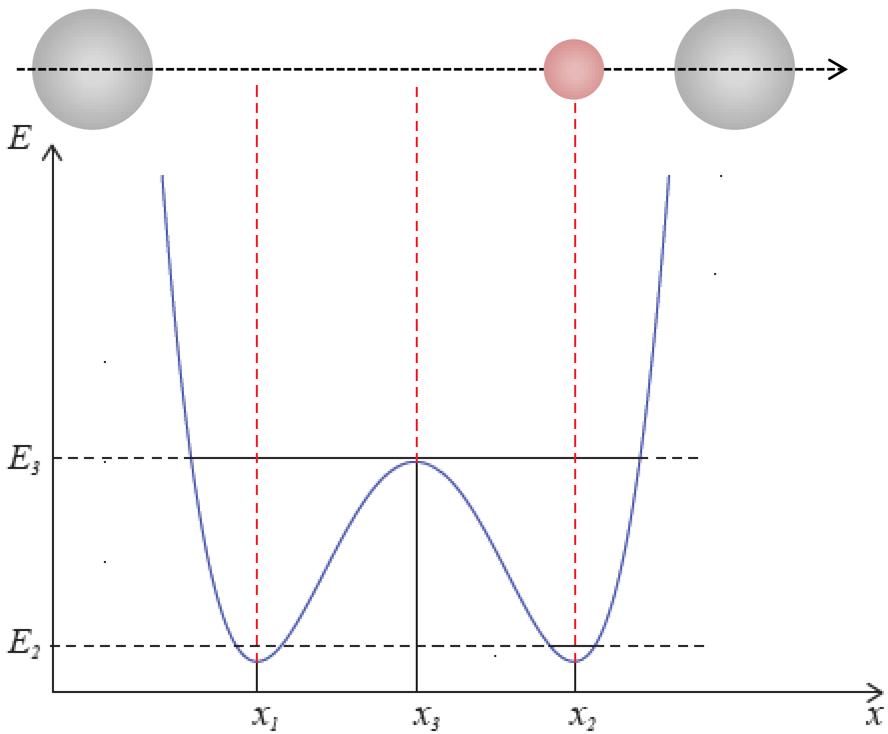
Ved hvilke(t) av de merkede punktene er kraften på partikkelen null?

1. Ved både $x=x_1$ og $x=x_3$
2. Kun ved $x=x_2$
3. Kun ved $x=x_4$
4. Ved både $x=x_2$ og $x=x_4$

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

stigning for funksjonen $U(x)$ er null i x_2 og x_4

Likevekt



minimum i potensiell energi
$\Rightarrow$ stabilt likevektspunkt

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$$

maksimum i potensiell energi
$\Rightarrow$ ustabilt likevektspunkt

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

partikkel i x_2 med $v=0$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

partikkel blir i x_2

litt kinetisk energi
$\Rightarrow$ partikkel svinger med små amplitude rund x_2

partikkel i x_3 med $v=0$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

partikkel blir i x_3

litt kinetisk energi
$\Rightarrow$ partikkel beveger seg enten mot x_1 eller mot x_2 og fjerner seg langt fra x_3

Potensial i tre dimensjoner

konservativ kraft: $\vec{F}$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_0) - U(\vec{r}_1) = -\int_0^1 dU$

integral uavhengig av veien,
bare avhengig av endepunktene

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$

potensial: $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) U = -\vec{\nabla} U$$

konservativ kraft $\Leftrightarrow$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

Eksempel: gravitasjon på jorden

$$\vec{F} = -mg\,\hat{k}$$

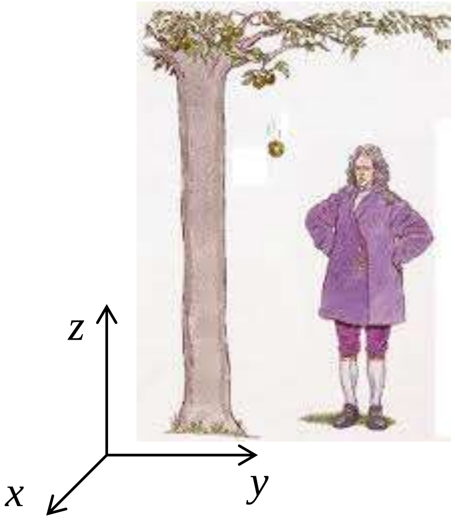
$$U = mgz$$

$$\vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)mgz$$

$$= \frac{\partial(mgz)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial(mgz)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial(mgz)}{\partial z}\hat{k}$$

$$= 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + mg\,\hat{k} = mg\,\hat{k}$$

$$\vec{F} = -mg\,\hat{k} = -\vec{\nabla}U$$



Gravitasjon generell:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \qquad U = -G\frac{mM}{r}$$

$$\vec{\nabla}U = -GmM\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla}U \cdot \hat{i} = -GmM\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -GmM\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -GmM\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2x = G\frac{mM}{r^3}x$$

på samme måte $\vec{\nabla}U \cdot \hat{j} = G\frac{mM}{r^3}y$

$$\vec{\nabla}U \cdot \hat{k} = G\frac{mM}{r^3}z$$

gravitasjon generelt i tre dimensjoner er konservativ: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$

Ikke-konservative krefter

vi dekomponerer nettokraften i
- konservative kraft *F*
- ikke-konservative kraft *f*

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F} + \vec{f}$$

$$W_{\text{net}} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F} + \vec{f}\right) \cdot \vec{v}\, dt = W_F + W_f$$

for en konservativ kraft *F* kan vi finner et potensial slik at:

$$W_F = U_0 - U_1$$

$$W_{\text{net}} = W_F + W_f = U_0 - U_1 + W_f = K_1 - K_0$$

$$K_1 + U_1 = K_0 + U_0 + W_f$$

$$E_1 = E_0 + W_f$$

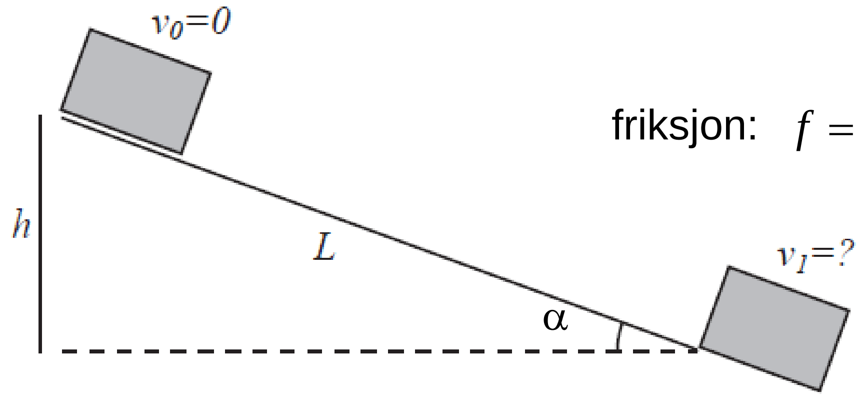
$$\Delta E = E_1 - E_0 = W_f = \int_0^1 \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

forandring i den mekaniske energien

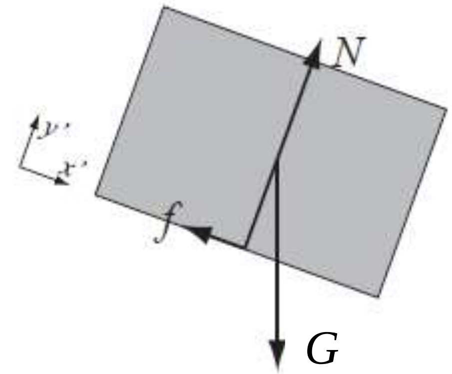
=

arbeid av ikke-konservative krefter

Eksempel:
skråplan



friksjon: $f = \mu_d N$



N2L i y'-retning: $\sum F_{y'} = N - G_{y'} = N - mg\cos\alpha = ma_{y'} = 0$

$$N = mg\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad f = \mu_d N = \mu_d mg\cos\alpha$$

potensiell energi: $U_0 = mgh = mgL\sin\alpha \qquad U_1 = 0$

energibevaring: $\Delta E = (K_1 + U_1) - (K_0 + U_0) = W_f = \int_0^1 \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-f)\,dx'$

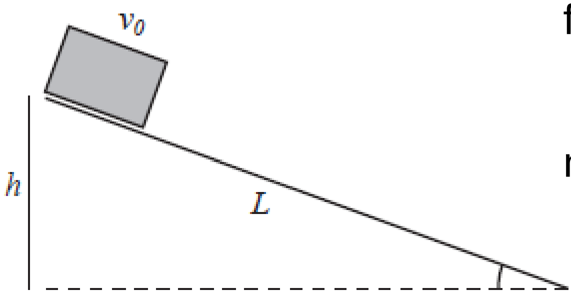
$$\Delta E = (\frac{1}{2}mv_1^2 + 0) - (0 + mgL\sin\alpha) = \int_0^1 (-\mu_d mg\cos\alpha)\,dx' = -\mu_d mg\cos(\alpha)L$$

$$\frac{1}{2}mv_1 = mgL\sin\alpha - \mu_d mgL\cos\alpha$$

$$v_1 = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)}$$

Hvor er energien ΔE ?

Termisk energi

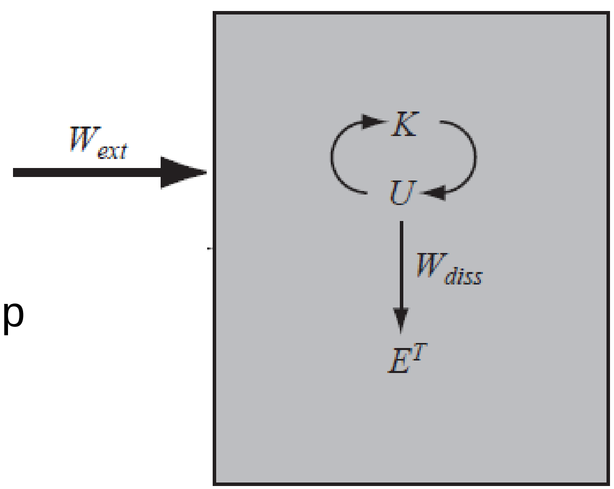


friksjon $\Rightarrow$ atomære vibrasjoner
kinetisk og potensiell energi på mikroskopisk nivå

mikroskopiske bevegelser $\Rightarrow$ varme

friksjon varmer klossen og planet
$\Rightarrow$ temperatur i systemet "kloss + skråplan" øker

energien i hele systemet er bevart: $E_{\text{tot}} = K_0 + U_0 + E_0^T = K_1 + U_1 + E_1^T$



arbeid fra ytre kraft:
- jeg trekker klossen opp
- jeg løfter klossen opp

$$\Delta E_{\text{tot}} = W_{\text{ext}}$$

lukket system:

- konservative krefter
  kinetisk $\Leftrightarrow$ potensiell energi

- ikke – konservative krefter
  (dissipative krefter)
  mekanisk $\Rightarrow$ termisk energi

Eksempel: bilkrasj

N2L for bil A: $\vec{F}_{\text{fra B på A}} = m_A \vec{a}_A$

N2L for bil B: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = m_B \vec{a}_B$

vanskelig å modellere kraften

N3L: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = -\vec{F}_{\text{fra B på A}}$

$$m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B = 0$$

for en tid t_0 før og en tid t_1 etter kollisjonen

$$\int_{t_0}^{t_1} (m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B)\, dt = 0$$

$$m_A \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}_A \, dt + m_B \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}_B \, dt = 0$$

$$m_A \big(\vec{v}_A(t_1) - \vec{v}_A(t_0)\big) + m_B \big(\vec{v}_B(t_1) - \vec{v}_B(t_0)\big) = 0$$

$$m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0) = m_A \vec{v}_A(t_1) + m_B \vec{v}_B(t_1) = (m_A + m_B)\, \vec{v}\,'$$

$m_A \vec{v}_A(t) + m_B \vec{v}_B(t)$ bevart

$$\vec{v}\,' = \frac{m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0)}{m_A + m_B}$$

Bevegelsesmengde

størrelsen $\vec{p} = m\vec{v}$ kalles bevegelsesmengde

Newtons andre lov: $\sum_i F_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

hvis m er konstant

vi vil se senere:
- massen forandrer seg med hastighet
- også partikler uten masse (f.eks. fotoner) har bevegelsesmengde

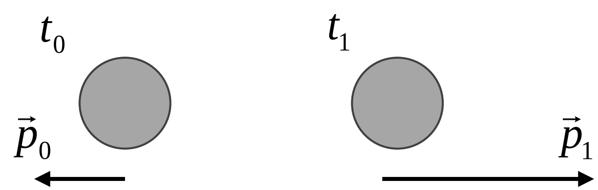
$\sum_i F_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ er derfor den mest generelle formuleringen av Newtons andre lov

nettokraften som virker på et legeme forandrer bevegelsesmengden

Kollisjoner

ballen påvirkes av en (komplisert) kraft $F(t)$

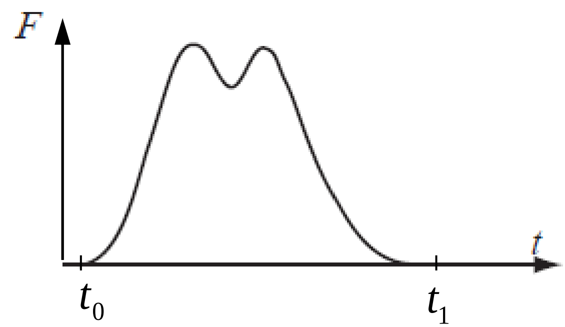
i tidsrommet t_0 til t_1 er:



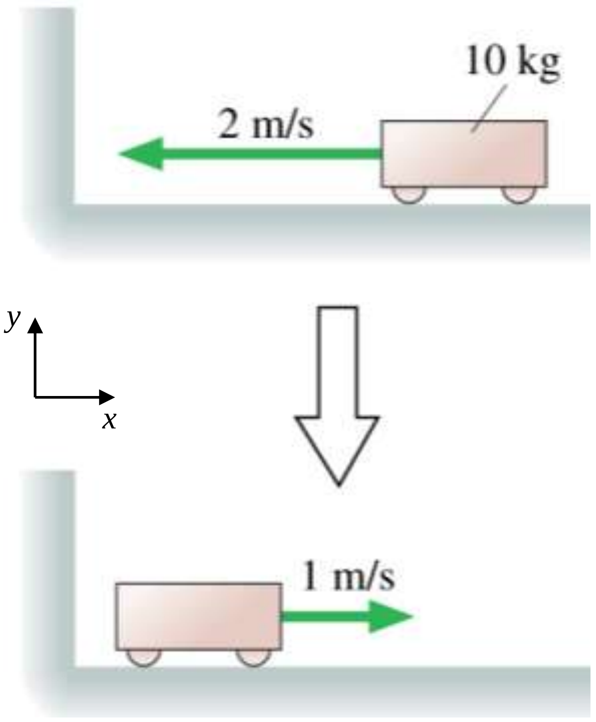
$$\vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt = \vec{J}$$

$\vec{F}$ netto kraft

$\vec{J}$ impuls



Hva er endringen i bevegelsesmengden til vognen?



1. -30 kg m/s
2. -20 kg m/s
3. -10 kg m/s
4. 10 kg m/s
5. 30 kg m/s

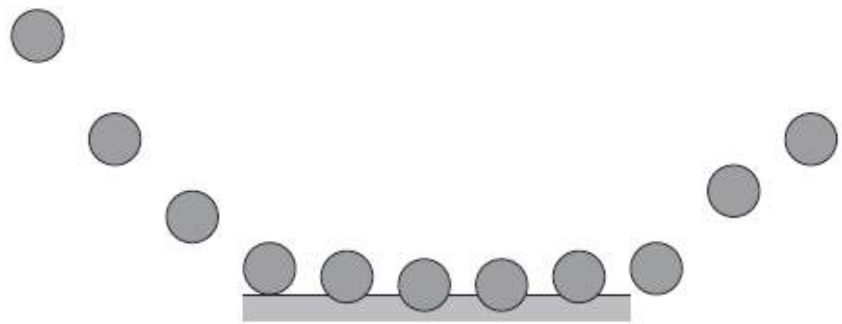
$$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 = 10\,\text{kg}\cdot(-2\,\text{m/s})\,\hat{i} = -20\,\text{kg m/s}\,\hat{i}$$

$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = 10\,\text{kg}\cdot 1\,\text{m/s}\;\hat{i} = 10\,\text{kg m/s}\,\hat{i}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \vec{J} = 30\,\text{kg m/s}\;\hat{i}$$

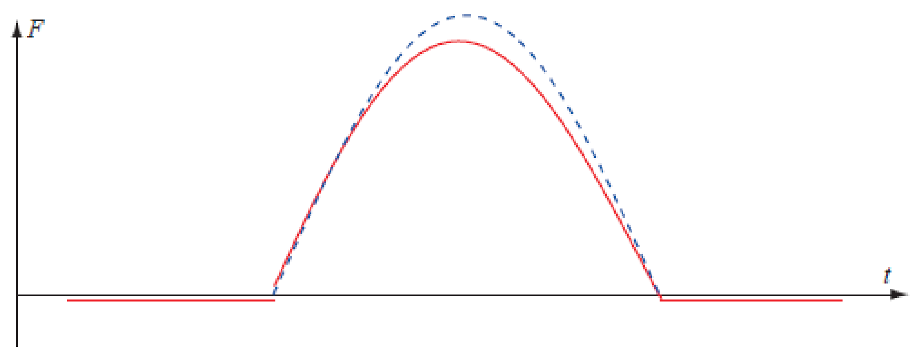
Ball spretter i gulvet

del 1: ballen faller
vi kan finne *v* ved energibetraktninger
del 2: ballen deformeres i kontakt med gulvet
$\Rightarrow$ komplisert kraft fra gulvet på ballen
$\Rightarrow$ endring av bevegelsesmengde
kraften behøver ikke være konservative
$\Rightarrow$ energi er ikke bevart
$\Rightarrow$ ballen spretter ikke like høyt opp igjen
del 3: ballen går opp til sin nye maksimale høyde

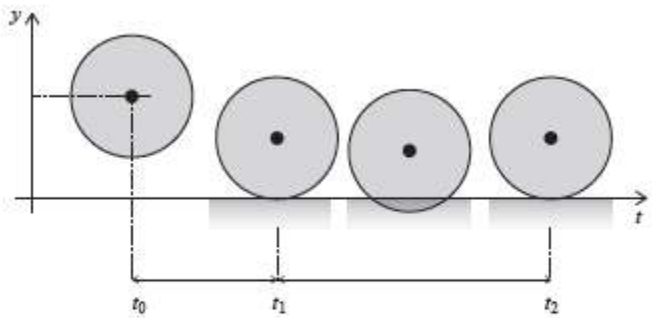


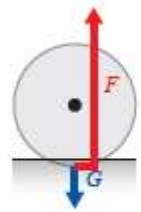
$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt$$

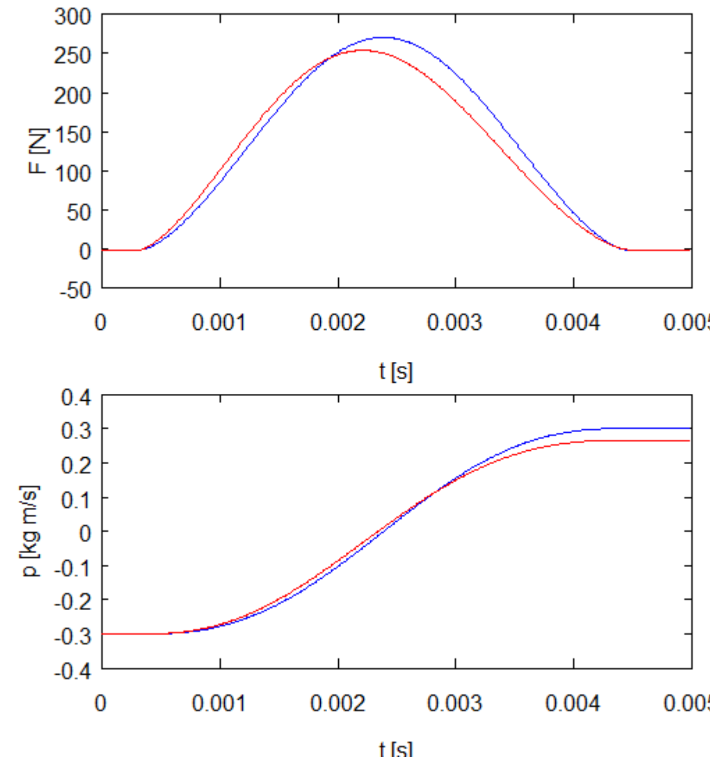
ikke-konservativ kraft $\Rightarrow$ asymmetri
impuls: integralet under kurven
kontaktkraft >> gravitasjon
styrke og varighet av kraften



Ball spretter i gulvet







$$N = \begin{cases} k(\Delta y)^{\frac{3}{2}} - \eta v \Delta y & \Delta y > 0 \\ 0 & \Delta y \leq 0 \end{cases}$$

```
for i = 1:n-1
    dy = R-y(i);
    if (dy<=0.0)
        N = 0.0;
    else
        N = k*dy^1.5-eta*v(i)*dy;
    end
    Fnet(i) = N - m*g;
    a = Fnet(i)/m;
    v(i+1) = v(i) + a*dt;
    y(i+1) = y(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```

uten dempning (η=0):
$J = \Delta p = 0.600$ kg m/s

med dempning:
$J = \Delta p = 0.566$ kg m/s

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt$$

vanskelig å modellere kraften gjennom en kollisjon
ofte kjenner vi ikke $F(t)$
vi kan måle bevegelsesmengde før og etter kollisjonen
impuls gir informasjon om den gjennomsnittlige kraften

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\vec{J} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}\,dt = \vec{F}_{\text{avg}}$$