Bevegelsesmengde

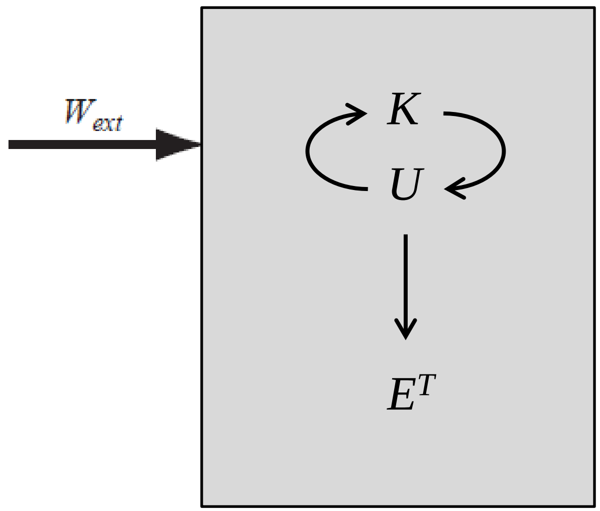
Kollisjoner

14.03.2013

neste uke: ingen forelesning
ingen gruppeundervisning
ingen datalab
på grunn av midtveiseksamen

Energibevaring

energi i systemet er bevart: $E_{\text{tot}} = K + U + E^T$



arbeid fra ytre kraft:

$$\Delta E_{\text{tot}} = W_{ext}$$

lukket system:

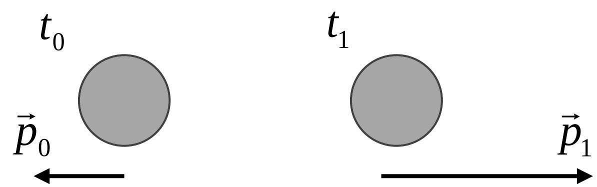
- konservative krefter
  kinetisk $\Leftrightarrow$ potensiell energi
- ikke – konservative krefter
  (dissipative krefter)
  mekanisk $\Rightarrow$ termisk energi

Bevegelsesmengde

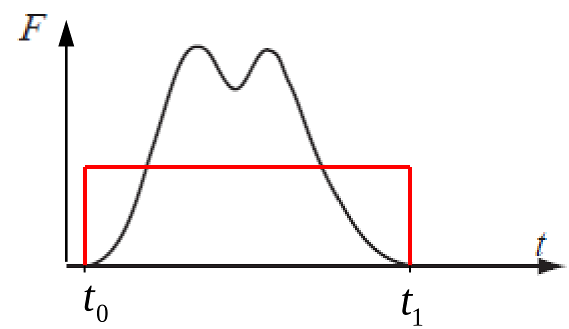
bevegelsesmengde $\vec{p} = m\vec{v}$

Newtons andre lov: $\sum_i F_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

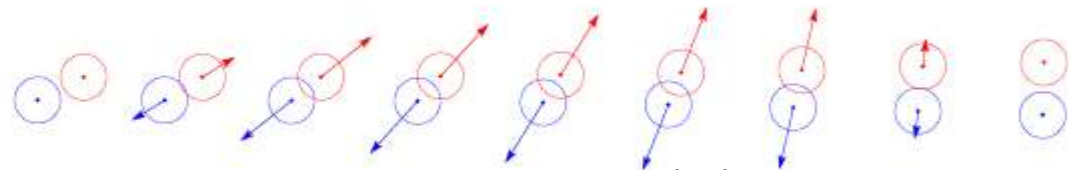
impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$



$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt = \vec{F}_{\text{avg}}$$



Kollisjon mellom to partikler



system: to partikler $\Leftrightarrow$ omgivelse

N2L for partikkel A $\quad \sum \vec{F}_A = \sum \vec{F}_A^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{B på A}} = \frac{d}{dt}\vec{p}_A$

N2L for partikkel B $\quad \sum \vec{F}_B = \sum \vec{F}_B^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{A på B}} = \frac{d}{dt}\vec{p}_B$

N3L $\quad \vec{F}_{\text{B på A}} = -\vec{F}_{\text{A på B}}$

$$\sum(\vec{F}_A + \vec{F}_B) = \sum \vec{F}_A^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{B på A}} + \sum \vec{F}_B^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{A på B}}$$

$$= \sum \vec{F}_A^{\text{ext}} + \sum \vec{F}_B^{\text{ext}} = \sum \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{p}_A + \frac{d}{dt}\vec{p}_B = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

summe av ytre krefter på partiklene = endring i bevegelsesmengde per tid for hele systemet

spesialfall: $\quad \sum \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{konst.}$

bevaringslov for bevegelsesmengde

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0 \qquad \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{konst.}$$

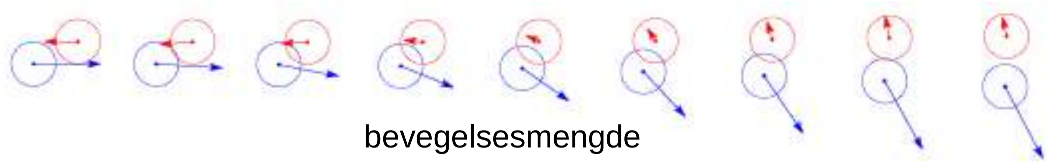
ingen ytre krefter på et system $\Leftrightarrow$ bevegelsesmengde for systemet er bevart

- vektorligning, gjelder for alle komponenter separat: $\sum F_x^{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \text{konst.}$

- gjelder for vilkårlig mange partikler

- gjelder for alle typer krefter mellom partikler
  (ikke bare konservative)

kollisjon med ytre kraft
eksempel: gravitasjon



$$\vec{P}_0 = \vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{B,0} \qquad \vec{P}_1 = \vec{p}_{A,1} + \vec{p}_{B,1}$$

$$\Delta\vec{P} = \vec{J}_{\text{ext}} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{ext}}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (-m_A g - m_B g)\, \hat{j}\, dt = -(m_A + m_B) g\, \hat{j}\, (t_1 - t_0)$$

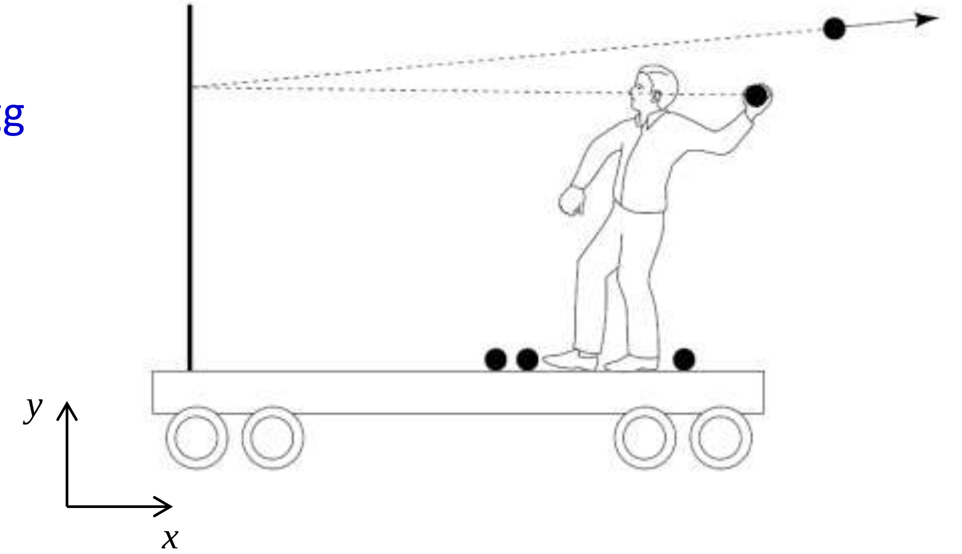
impuls fra ytre kraft er avhengig
av varigheten av kollisjonen

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_{\text{ext}} \to 0$$

bevegelsesmengden er (nesten) bevart
i en kollisjon som er (nesten) momentant

kollisjon: en prosess mellom to eller flere legemer
- hvor indre krefter er mye større enn ytre krefter fra omgivelsen
- som varer en kort tid i forhold til tidsskala av bevegelsen

Du står på en vogn som er i ro på et friksjonsfritt spor. Du kaster en ball i en vegg som er festet i vognen. Hvis ballen spretter tilbake som vist på figuren blir da vognen satt i bevegelse?



1. Ja, den beveger seg mot høyre.
2. Ja, den beveger seg mot venstre.
3. Nei, den forblir i ro.

system A: mann + vogn
system B: ball

Hva skjer hvis han fanger ballen igjen?

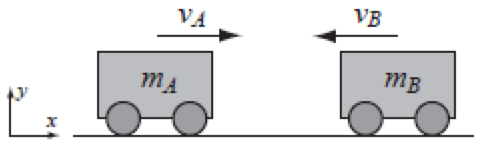
$\sum F_x^{\text{ext}} = 0$ bevegelsesmengde er bevart:

bevegelsesmengde i x retning før kast: $p_{A,0} + p_{B,0} = 0$

etter kast: $p_{B,1} > 0 \Rightarrow p_{A,1} < 0$

vogn beveger seg mot venstre

Kollisjon i én dimensjon



bevaring av bevegelsesmengde:

$$m_A v_{A,0} + m_B v_{B,0} = m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1}$$

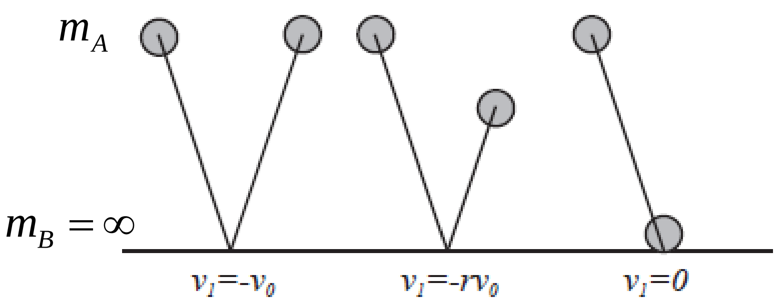
1 ligning, 2 ukjente: $v_{A,1}$, $v_{B,1}$
vi trenger mer informasjon

hvis det virker bare elastiske krefter i kollisjonen:

energibevaring: $$\frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,0}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A,1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,1}^2$$

2 ligninger, 2 ukjente: vi kan finne $v_{A,1}, v_{B,1}$

hva hvis det er også ikke-konservative krefter ?



elastisk kollisjon: $r = 1: \quad v_1 = -v_0$

energi er bevart

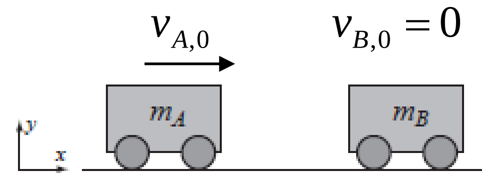
uelastisk kollisjon: $0 < r < 1: \quad v_1 = -rv_0$

energi er ikke bevart

restitusjonskoeffisient: $v_1 = -rv_0$

fullstendig uelastisk kollisjon: $r = 0: \quad v_1 = 0$

spesialfall: elastisk støt hvor $v_{B,0} = 0$



bevaring av bevegelsesmengde

$$m_A v_{A,0} = m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1}$$

$$m_A (v_{A,0} - v_{A,1}) = m_B v_{B,1}$$

bevaring av energi

$$m_A v_{A,0}^2 = m_A v_{A,1}^2 + m_B v_{B,1}^2$$

$$m_A (v_{A,0}^2 - v_{A,1}^2) = m_B v_{B,1}^2$$

$$m_A (v_{A,0} - v_{A,1})(v_{A,0} + v_{A,1}) = m_B v_{B,1}^2$$

$$v_{A,0} + v_{A,1} = v_{B,1}$$

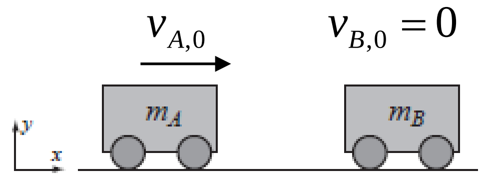
$$m_A (v_{A,0} - v_{A,1}) = m_B (v_{A,0} + v_{A,1})$$

$$(m_A - m_B) v_{A,0} = (m_A + m_B) v_{A,1}$$

$$v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$

$$v_{B,1} = v_{A,0} + v_{A,1} = v_{A,0} + \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0} = \frac{2m_A}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$

$$v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$



$$v_{B,1} = \frac{2m_A}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$

hvis: $m_A = m_B$ $\qquad v_{A,1} = 0 \qquad v_{B,1} = v_{A,0}$

hvis: $m_A << m_B$ $\qquad v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0} \approx \frac{-m_B}{m_B} v_{A,0} = -v_{A,0} \qquad v_{B,1} \approx 0$

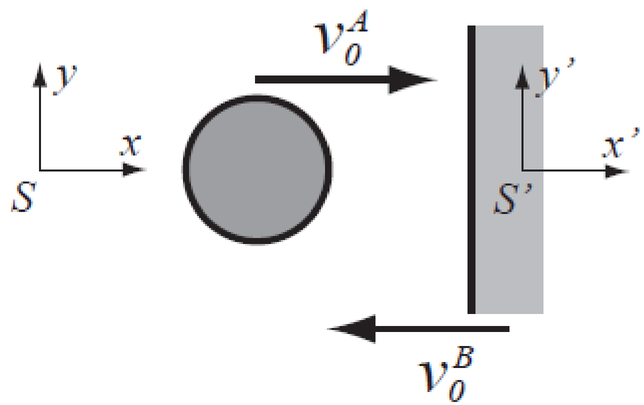
hvis: $m_A >> m_B$ $\qquad v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0} \approx \frac{m_A}{m_A} v_{A,0} = v_{A,0}$

$$v_{B,1} = \frac{2m_A}{(m_A + m_B)} v_{A,0} \approx \frac{2m_A}{m_A} v_{A,0} = 2v_{A,0}$$

vi kan bruke resultatet også hvis $v_{B,0} \neq 0$

$\Rightarrow$ transformasjon av referansesystem

Eksempel: en ball treffer en (tung) racket



vi velger et koordinatsystem S'
som beveger seg med racketen:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

$$\vec{v}'_{B,0} = \vec{v}_{B,0} - \vec{u} = \vec{v}_{B,0} - \vec{v}_{B,0} = 0$$

$$\vec{v}'_{A,0} = \vec{v}_{A,0} - \vec{u} = \vec{v}_{A,0} - \vec{v}_{B,0}$$

siden $m_A << m_B$

$$\vec{v}'_{A,1} = -\vec{v}'_{A,0}$$

$$\vec{v}'_{B,1} = 0$$

transformasjon tilbake: $\vec{v}_{A,1} = \vec{u} + \vec{v}'_{A,1} = \vec{v}_{B,0} - \vec{v}'_{A,0} = \vec{v}_{B,0} - (\vec{v}_{A,0} - \vec{v}_{B,0}) = 2\vec{v}_{B,0} - \vec{v}_{A,0}$

$$\vec{v}_{B,1} = \vec{u} + \vec{v}'_{B,1} = \vec{v}_{B,0} + 0 = \vec{v}_{B,0}$$

fullstendig uelastisk støt

partikler henger sammen etter kollisjonen: $v_{A,1} = v_{B,1} = v_1$

vi antar at partikkel B er i ro (uten tap av generell gyldighet): $v_{B,0} = 0$

bevaring av bevegelsesmengde: $m_A v_{A,0} = m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1} = (m_A + m_B) v_1$

$$v_1 = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A,0}$$

kinetisk energi: $K_0 = \frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2$

$$K_1 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_1^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) \frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} v_{A,0}^2$$

$$= \frac{m_A}{m_A + m_B} \frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} K_0$$

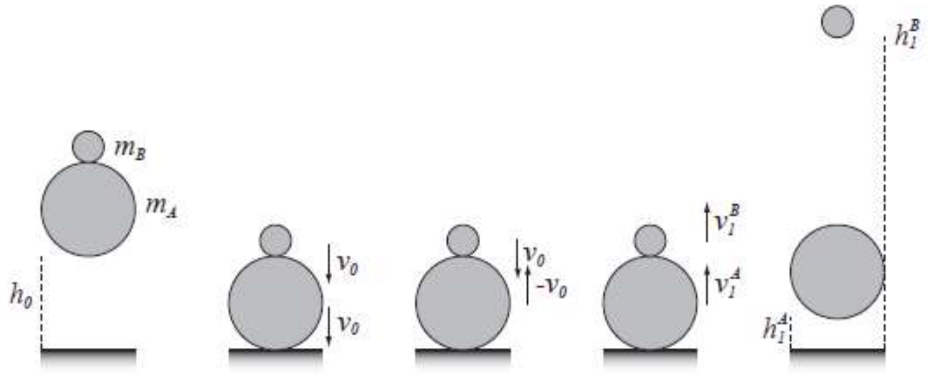
$m_A >> m_B$ $\quad K_1 \approx \frac{m_A}{m_A} K_0 = K_0$ ingen energitap

$m_A << m_B$ $\quad K_1 \approx 0$ energi fullstendig tapt hvor er energien?

Eksempel

Hva er maksimal høyde h_1 for ball B ?

(vi antar at alle kollisjoner er elastisk)



Fase 1: begge baller faller

energibevaring: $mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ $\qquad v_0 = \sqrt{2gh_0}$

Fase 2: ball A kolliderer med gulvet

bevaring av energi og bevegelsesmengde: hastigheten reverseres $-v_0 \rightarrow +v_0$

Fase 3: ball A kolliderer med ball B

momentant støt $\Rightarrow$ små impuls fra gravitasjon
$\Rightarrow$ bevaring av bevegelsesmengde

$$m_A v_0 - m_B v_0 = m_A v_A + m_B v_B$$

$$m_A(v_0 - v_A) = m_B(v_0 + v_B)$$

elastisk støt: bevaring av energi $\frac{1}{2}m_A v_0^2 + \frac{1}{2}m_B v_0^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A,1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,1}^2$

$$m_A(v_0^2 - v_A^2) = m_B(v_B^2 - v_0^2)$$

bevaring av energi $m_A(v_0^2 - v_A^2) = m_B(v_B^2 - v_0^2)$

$$m_A(v_0 - v_A)(v_0 + v_A) = m_B(v_B - v_0)(v_B + v_0)$$

bevaring av bevegelsesmengde $m_A(v_0 - v_A) = m_B(v_0 + v_B)$

vi deler de to ligninger: $v_0 + v_A = v_B - v_0$

$$v_A = v_B - 2v_0$$

vi setter inn: $m_A(v_0 - (v_B - 2v_0)) = m_B(v_0 + v_B)$

$$3m_A v_0 - m_A v_B = m_B v_0 + m_B v_B$$

$$(3m_A - m_B)v_0 = (m_A + m_B)v_B$$

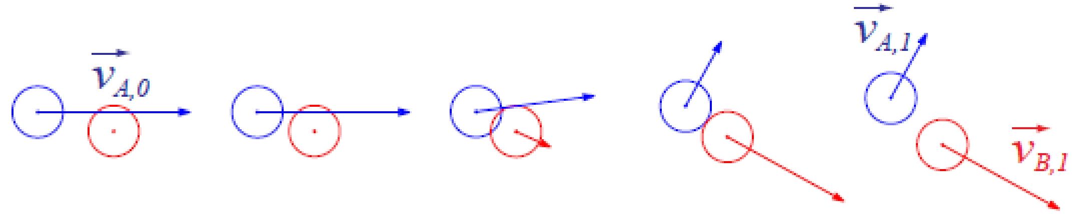
$$v_B = \frac{3m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0$$

hvis $m_A >> m_B$ $\quad v_B \approx \frac{3m_A}{m_A} v_0 = 3v_0$

energibevaring for ball B som spretter opp igjen: $m_B g h_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2$

$$h_B = \frac{1}{2g} v_B^2 = \frac{1}{2g} 9v_0^2 = \frac{9}{2g} 2gh_0 = 9h_0$$

Ikke-sentralt støt



vi kan velge et koordinatsystem slik at $\vec{v}_{B,0} = 0$

bevegelsen etter kollisjonen er todimensjonal i et plan dannet av $\vec{v}_{A,1}, \vec{v}_{B,1}$

hvis det virker ingen ytre krefter er bevegelsesmengde bevart: $m_A \vec{v}_{A,0} = m_A \vec{v}_{A,1} + m_B \vec{v}_{B,1}$

vi kan se separat på x og y retning:

$$m_A v_{A,0,x} = m_A v_{A,1,x} + m_B v_{B,1,x}$$

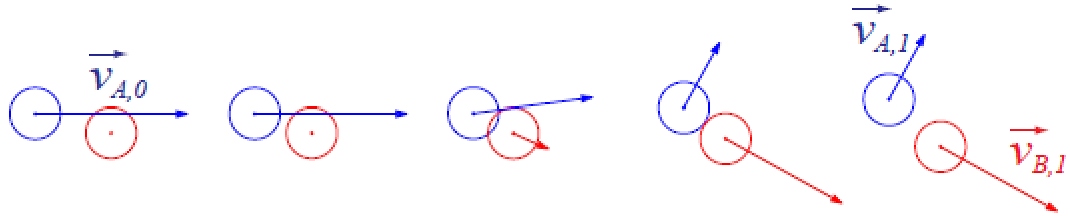
$$m_A v_{A,0,y} = m_A v_{A,1,y} + m_B v_{B,1,y}$$

hvis kollisjonen er elastisk er energi bevart: $\frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{B,0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,1}^2$

3 ligninger, men 4 ukjente: $v_{A,1,x}, v_{A,1,y}, v_{B,1,x}, v_{B,1,y}$

vi trenger mer informasjon om kreftene for a bestemme hastighetene etter kollisjonen.

vi kan modellere kollisjonen:



2 kuler med radius *R*

avstand mellom sentrene: $\Delta r = |\vec{r}_B(t) - \vec{r}_A(t)|$

avstand mellom overflatene: $|\Delta r - 2R|$

realistisk modell for kontaktkraft mellom kulene: (med dempning)

$$\vec{F} = \begin{cases} -k|\Delta r - 2R|^{\frac{3}{2}} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} + \eta \Delta v & \Delta r < 2R \\ 0 & \Delta r \geq 2R \end{cases}$$

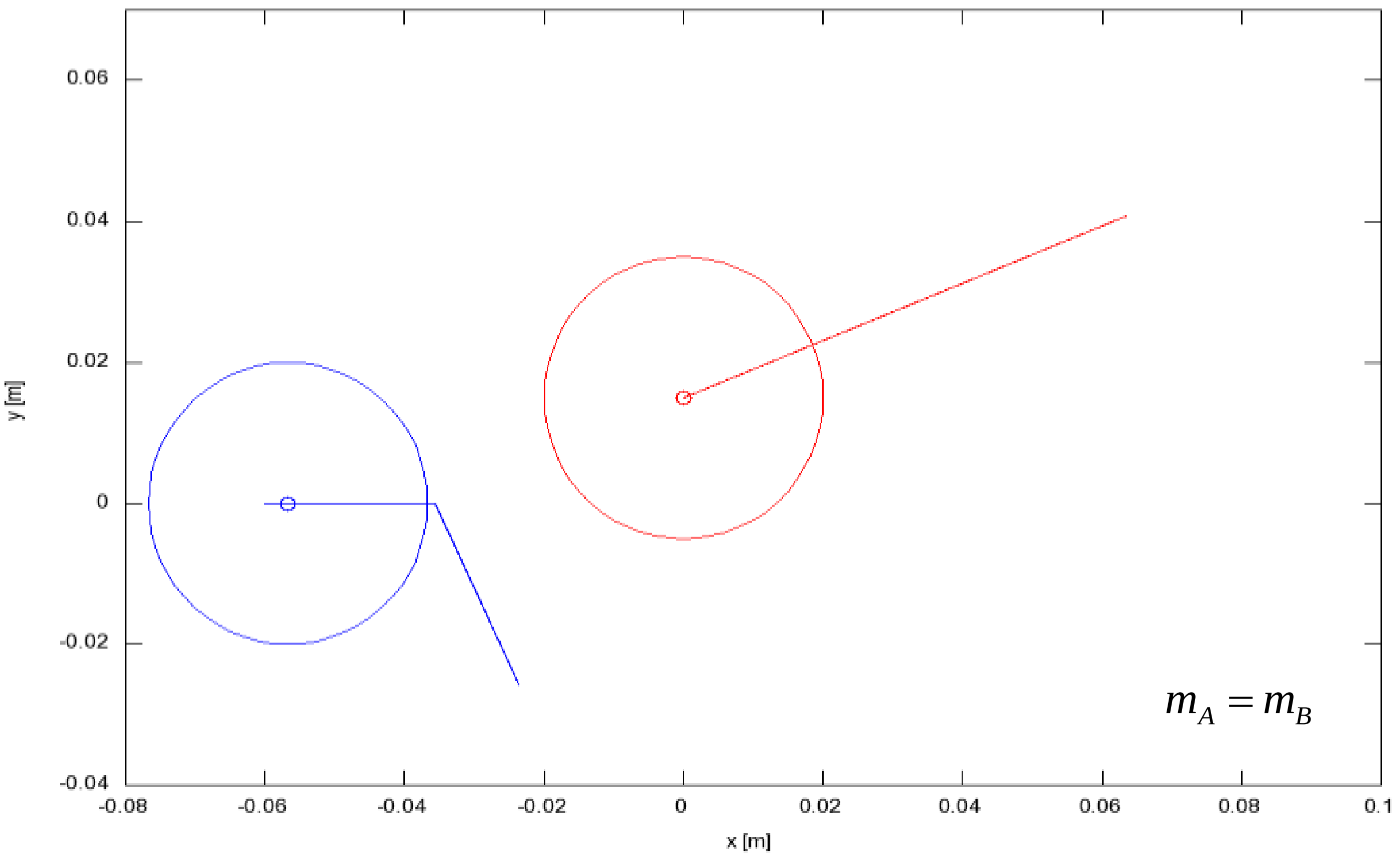
N3L: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = -\vec{F}_{\text{fra B på A}}$

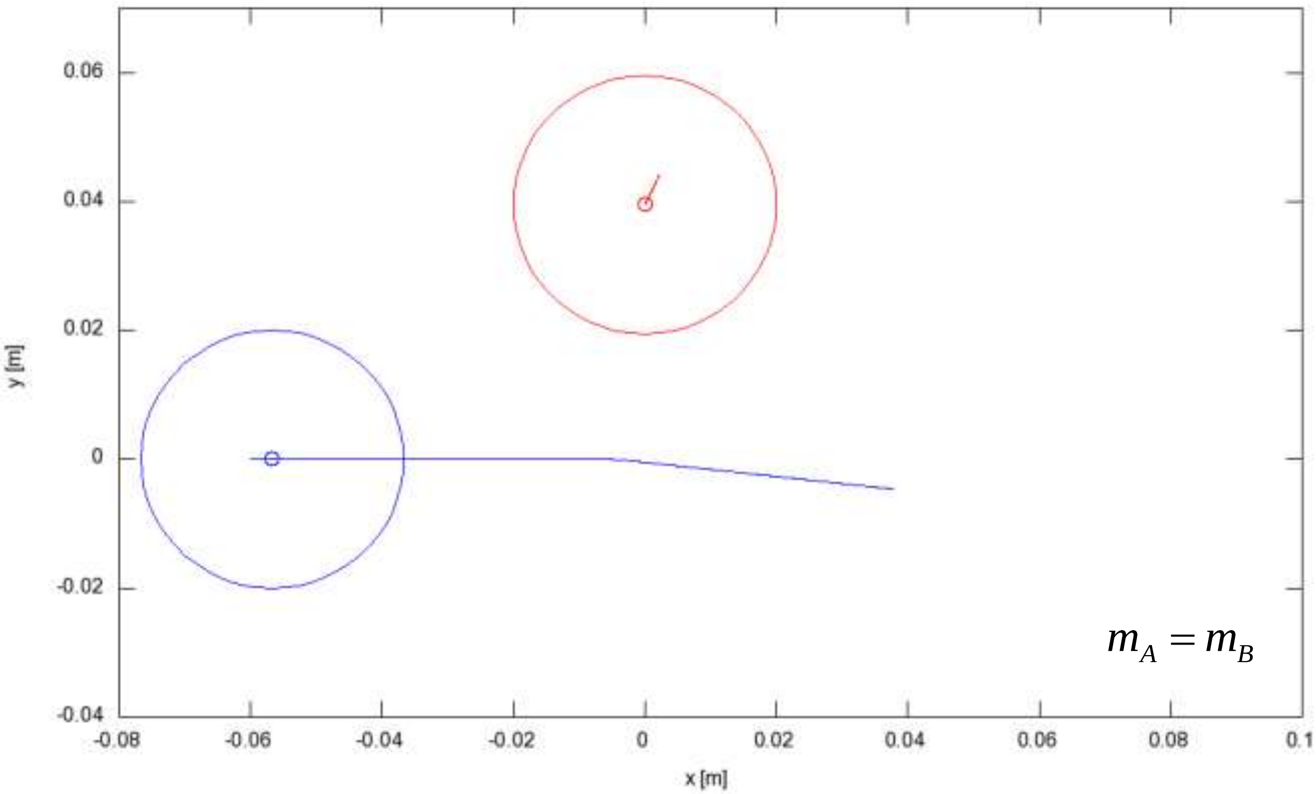
N2L: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = m_B \vec{a}_B$

$\vec{F}_{\text{fra B på A}} = m_A \vec{a}_A$

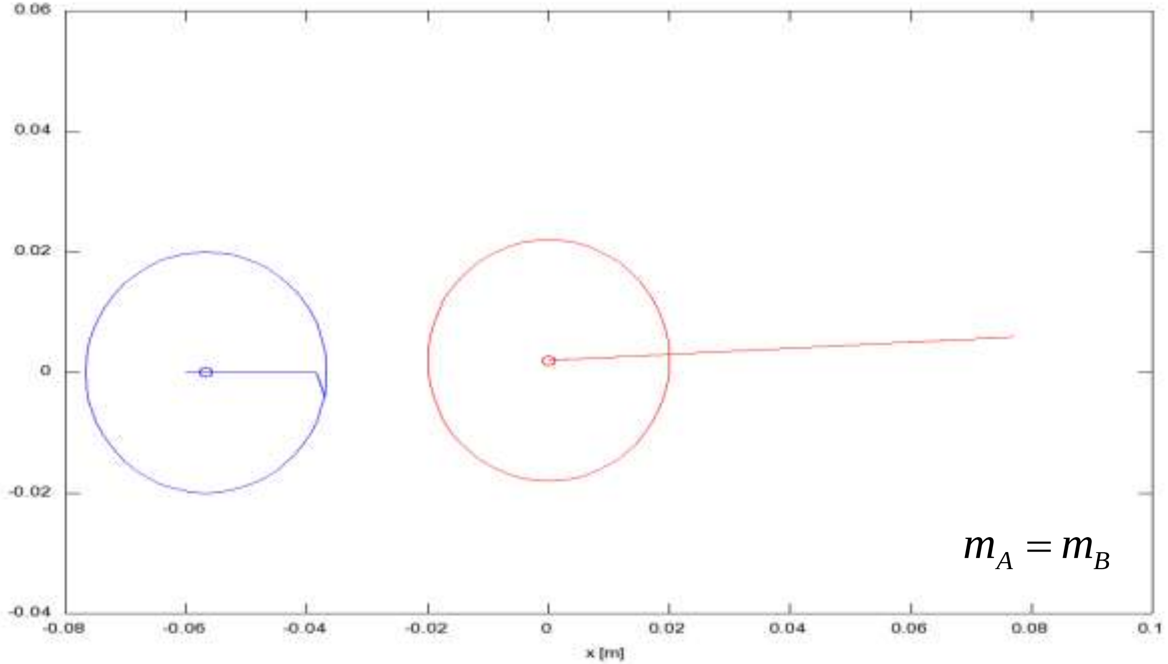
numerisk løsning:
Euler-Cromer
for begge kuler

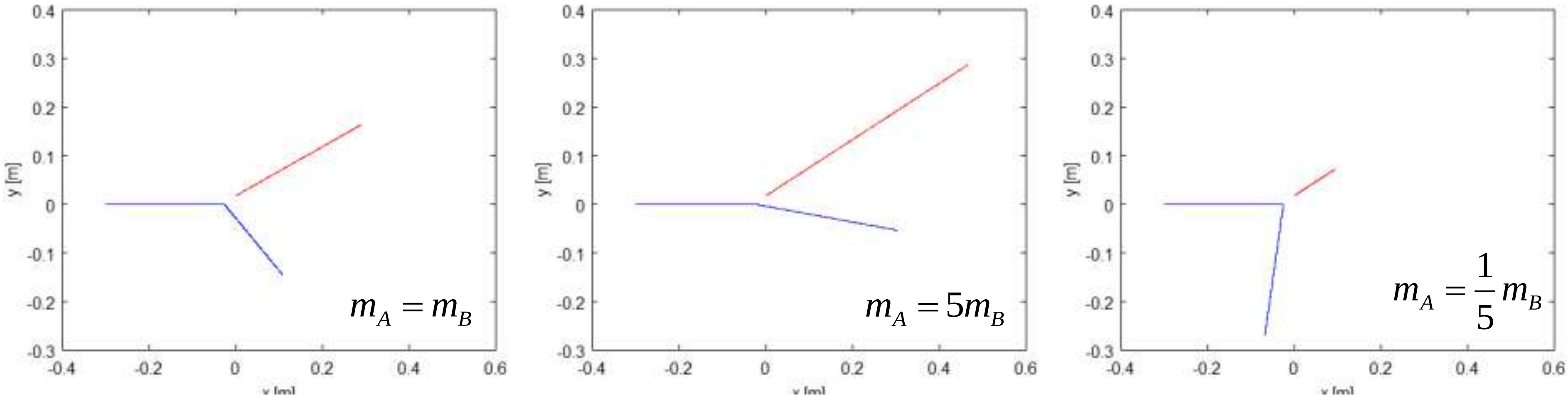
```
% Integration loop
for i = 1:n-1
    Deltar = rB(i,:)-rA(i,:);
    Deltarnorm = norm(Deltar);
    Deltav = vB(i,:)-vA(i,:);
    if (Deltarnorm>=D)
        Fnet = [0 0];
    else
        Fnet = -k*abs(Deltarnorm-D)^1.5...
            *Deltar/Deltarnorm + eta*Deltav;
    end
    F(i,:) = Fnet;
    aA = Fnet/mA;
    aB = -Fnet/mB;
    vA(i+1,:) = vA(i,:) + aA*dt;
    rA(i+1,:) = rA(i,:) + vA(i+1,:)*dt;
    vB(i+1,:) = vB(i,:) + aB*dt;
    rB(i+1,:) = rB(i,:) + vB(i+1,:)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```


0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
y [m]
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
x [m]
$m_A = m_B$



$m_A = m_B$


0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
y [m]
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
x [m]
$m_A = m_B$



samme posisjoner ved t_0
samme hastigheter ved t_0 ($v_{B,0} = 0$)
forskjellige masser