Stivt legemers dynamikk

09.04.2013

Repetisjon

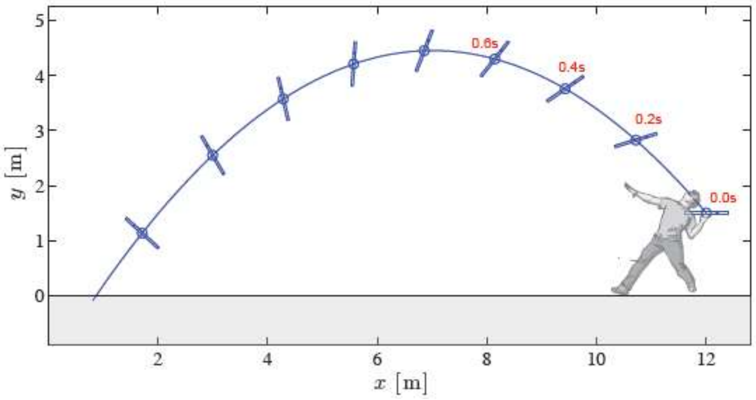
Newtons andre lov for flerpartikkelsystemer: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = M\vec{A}$

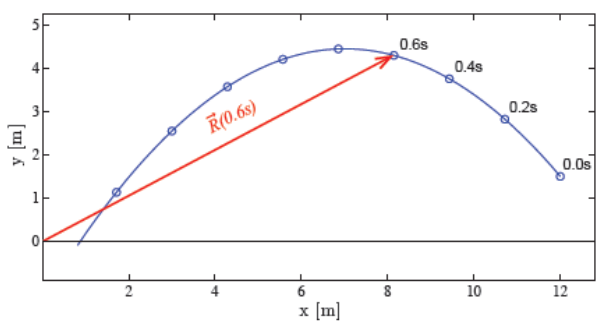
hvor: $M = \sum_i m_i$ $\quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$ (massesenter) $\quad \vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

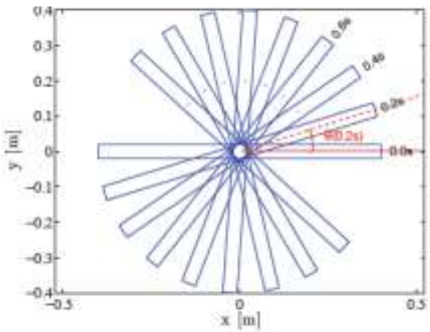
separasjon:

- bevegelse til massesenter
- bevegelse relativ til massesenter

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2$$







rotasjonsbevegelse:

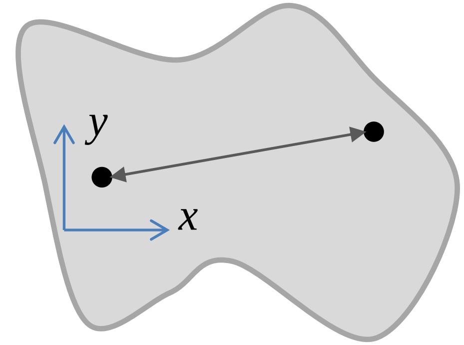
vinkel $\theta(t)$

vinkelhastighet $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$

vinkelakselerasjon

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Stivt legeme



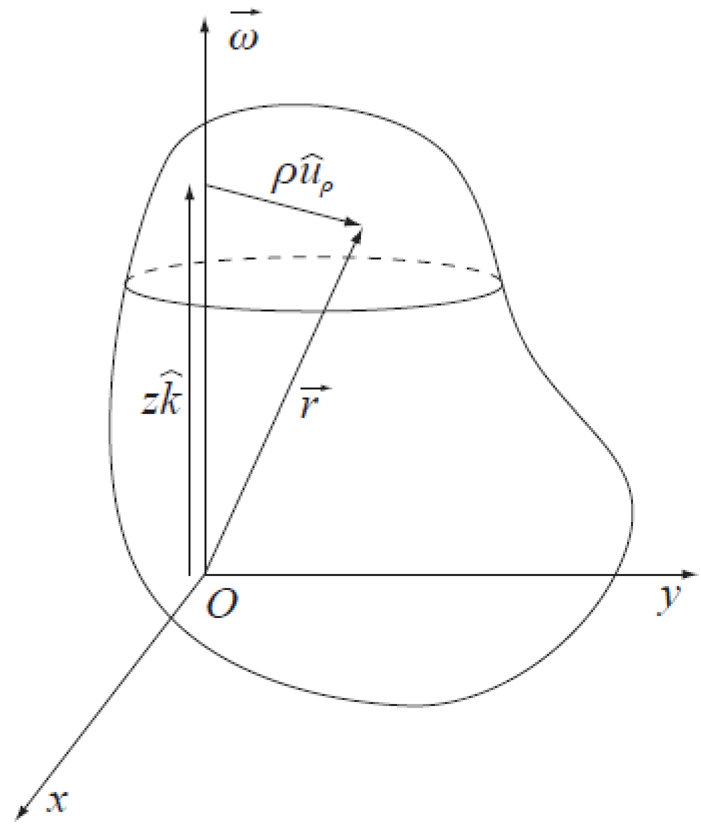
Legeme hvor den relative posisjonen til to punkter ikke endrer seg.

Legeme kan ikke deformeres.

Koordinatsystem som følger legemet:
et punkt i legemet befinner seg alltid på samme sted.

Hele legemet kan translateres og roteres.

Rotasjon av et stivt legeme:



Rotasjon er beskrevet av aksen $\vec{\omega}$ og punkt O.

Aller punkter i legemet roterer med samme $\vec{\omega}$

Hastigheten til et punkt $\vec{r}$ er: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Rotasjon av et stivt legeme:

Hastigheten til et punkt $\vec{r}$ er: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

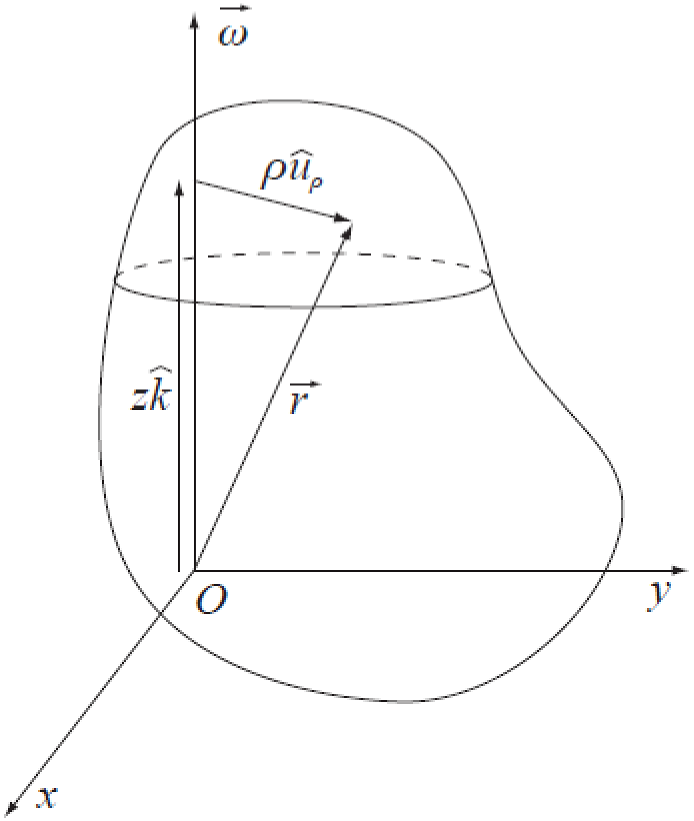
$\vec{r} = \rho \hat{u}_\rho + z\hat{k}$ hvor $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $\hat{u}_\rho$ er den radiale enhetsvektoren med $\hat{u}_\rho \cdot \hat{k} = 0$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times (\rho \hat{u}_\rho + z\hat{k})$$

$$= \omega \rho \hat{k} \times \hat{u}_\rho + \omega z \hat{k} \times \hat{k}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \omega \rho \hat{u}_\varphi$$

hvor $\hat{u}_\varphi$ er den tangensiale enhetsvektoren



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

tangensial + sentripetalakselerasjon

Rotasjon av et stivt legeme:

hastighet til et punkt : $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

$$v_i^2 = |\vec{v}_i|^2 = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 = \omega^2 r_i^2 (\sin\theta)^2 = \omega^2 \rho_i^2 = |\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i|^2$$

kinetisk energi til et punkt: $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2$

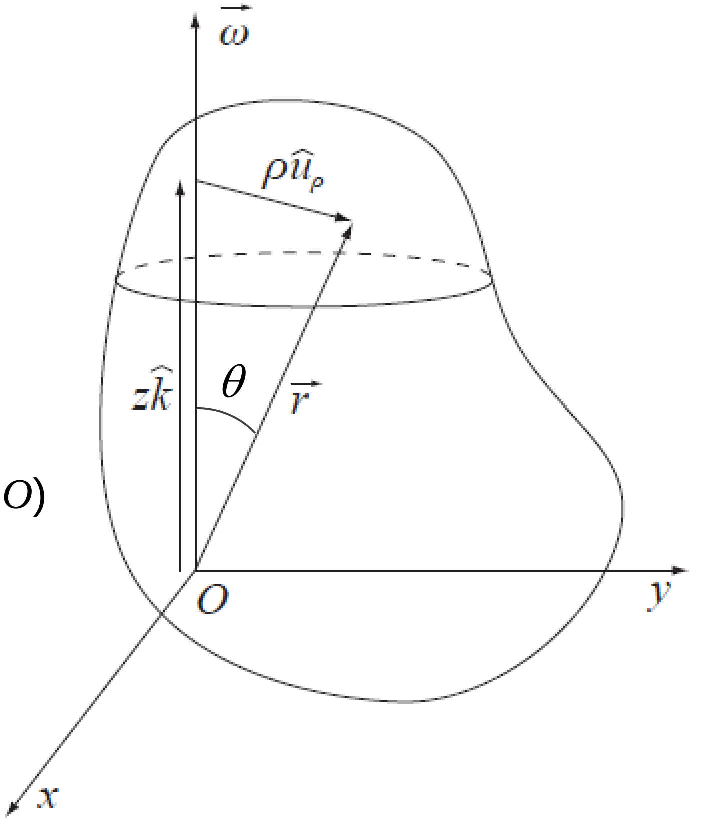
kinetisk energi til hele legemet:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2$$

definisjon: $I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$ treghetsmoment for legemet om aksen z (som går gjennom punktet O)

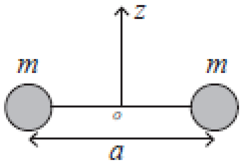
$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

jo større treghetsmomentet,
jo mer energi behøves
for å få legemet å rotere

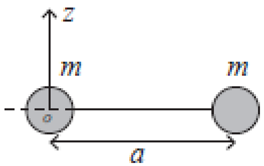


Eksempel

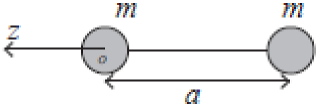
vi antar at massene er punktformig
og forbindelsen masseløs



$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 = m(\frac{1}{2}a)^2 + m(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

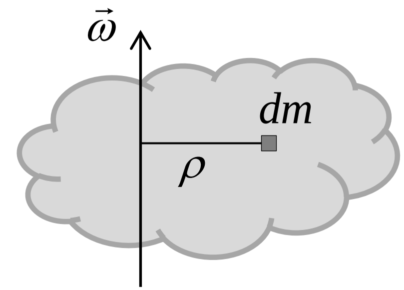


$$I_z = m0^2 + ma^2 = ma^2$$



$$I_z = m0^2 + m0^2 = 0$$

Rotasjon av et stivt legeme:



kontinuerlig legeme med massetetthet $\rho_m(\vec{r})$

som roterer med vinkelhastighet ω om aksen $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

et volumelement dV har masse $dm = \rho_m(\vec{r})dV$

og avstand ρ fra rotasjonsaksen

kinetisk energi til volumelementet:

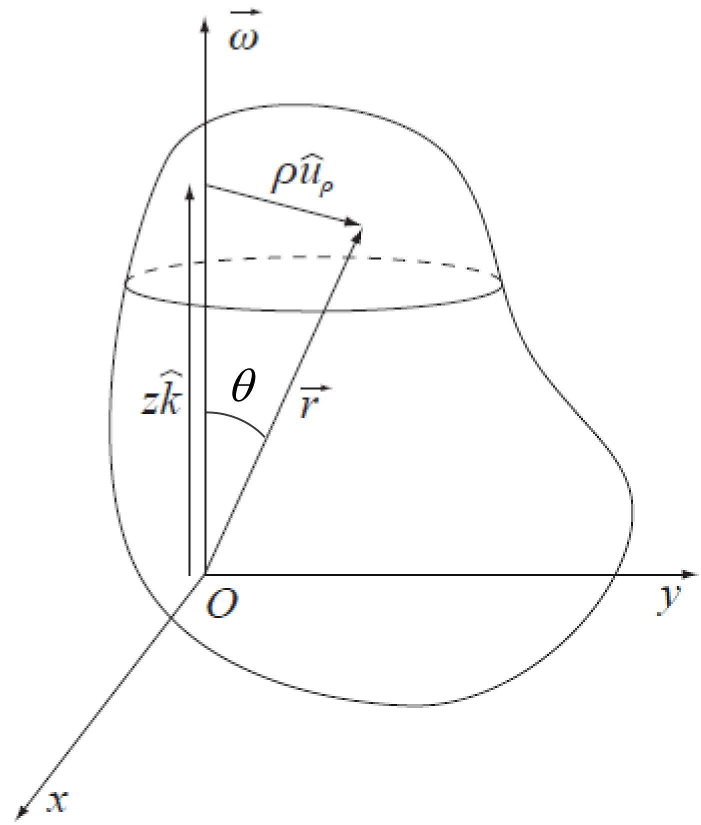
$$dK = \frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

kinetisk energi til hele legemet:

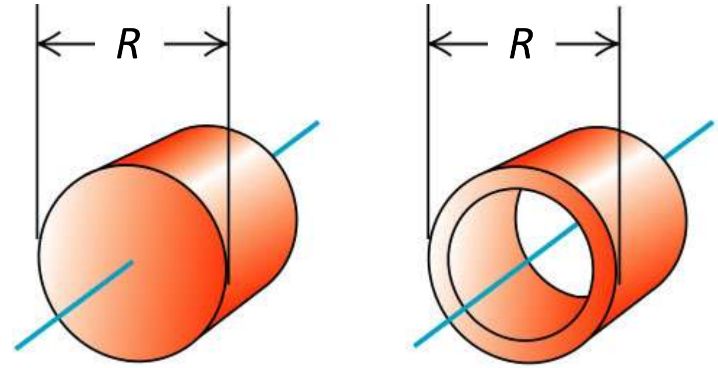
$$K = \int_V \frac{1}{2}\omega^2\rho^2\rho_m(\vec{r})dV = \frac{1}{2}\omega^2\int_V \rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

$$I_z = \sum_i m_i\rho_i^2 \quad \rightarrow \quad I_z = \int_M \rho^2 dm = \int_V \rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

$$K = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$



Legemene er homogene og har samme masse og ytre dimensjoner. Hvilket legeme har *minst* treghetsmoment om den viste aksen?



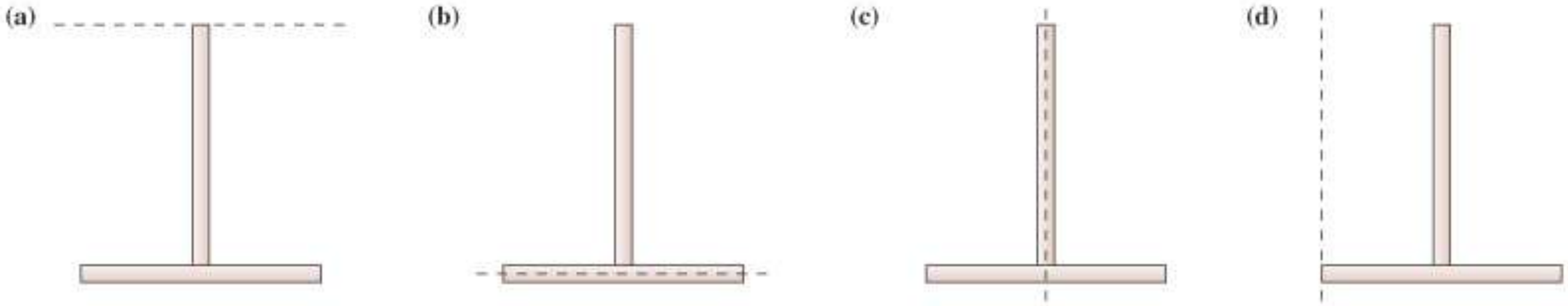
1. Sylinderen
2. Sylinderskallet

den totale massen er den samme: $M = \int_M dm \approx \sum_i m_i$

men avstanden av massepunktene fra rotasjonsaksen er gjennomsnittlig større for sylinderskallet:

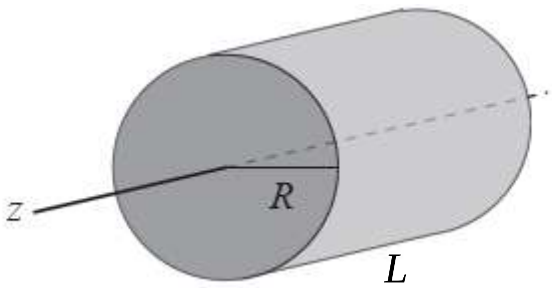
$$I_z = \int_M \rho^2 dm \approx \sum_i m_i \rho_i^2$$

Fire T-er er laget at to identiske staver med samme masse og lengde. Ranger treghetsmomentene I_a til I_d for rotasjon om den stiplede linjen.



1. $I_c > I_b > I_d > I_a$
2. $I_c = I_d > I_a = I_b$
3. $I_a = I_b > I_c = I_d$
4. $I_a > I_d > I_b > I_c$
5. $I_a > I_b > I_d > I_c$

homogen sylinder



sylinderkoordinater: $x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

z

$\rho^2 = x^2 + y^2$

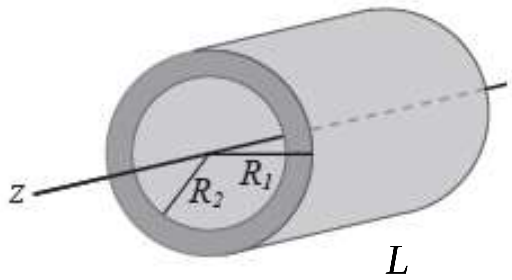
$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

Masse: $$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho_m dV = \rho_m \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \rho_m 2\pi L \int_0^R \rho\, d\rho = \rho_m 2\pi L \frac{1}{2} R^2 = \rho_m V$$

Treghetsmoment: $$I_z = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho_m \rho^2 dV = \rho_m \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho^3 d\rho\, d\varphi\, dz = \rho_m 2\pi L \int_0^R \rho^3 d\rho$$

$$= \rho_M 2\pi L \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} \rho_M \pi R^2 L R^2 = \frac{1}{2} \rho_M V R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$

homogen sylinderskall



Areal: $A = \pi R_1^2 - \pi R_2^2$

Volum: $V = \pi(R_1^2 - R_2^2)L$

Masse: $M = \rho_m \pi(R_1^2 - R_2^2)L$

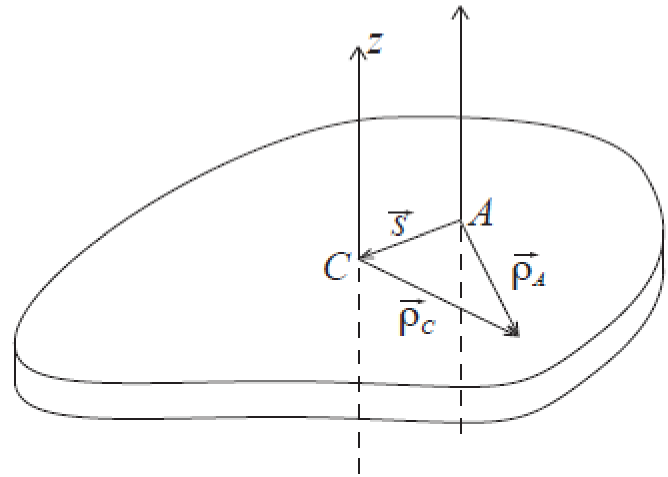
Treghetsmoment: $$I_z = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^L \rho_m \rho^2 dV = \rho_m 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \rho^3 d\rho = \rho_m 2\pi L \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_m \pi L (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)$$

full sylinder: $I_z = \frac{1}{2} M R^2$

tynn sylinderskall: $R_1 \approx R_2 \quad \Rightarrow \quad I_z = MR^2$

Parallellakseteoremet (Steiners sats)



massesenteret ligger i punkt C
treghetsmoment om z akse gjennom C er I_C

$$I_C = \int_M (\vec{\rho}_C)^2 \, dm$$

hva er treghetsmoment om en parallell akse gjennom A ?

$$\vec{\rho}_A = \vec{\rho}_C + \vec{s}$$

$$I_A = \int_M (\vec{\rho}_A)^2 \, dm = \int_M (\vec{\rho}_C + \vec{s})^2 \, dm$$

$$= \int_M (\vec{\rho}_C^2 + 2\vec{\rho}_C \cdot \vec{s} + \vec{s}^2) dm$$

$$= \int_M (\vec{\rho}_C^2) dm + 2\vec{s} \cdot \int_M \vec{\rho}_C \, dm + \vec{s}^2 \int_M dm \;= I_C + M\vec{s}^2$$

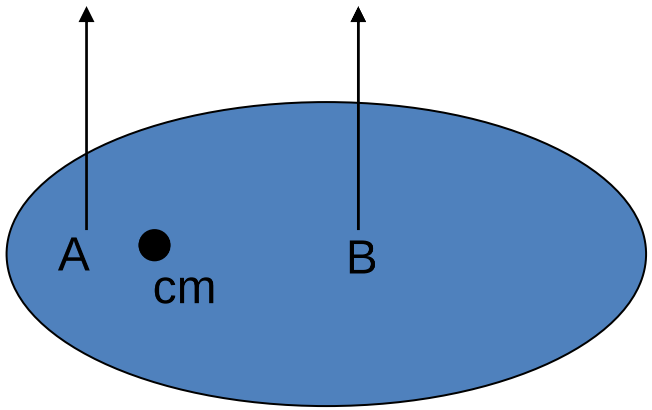
Parallellakseteoremet

$$I_A = I_C + M\vec{s}^2$$

$$\int_M \vec{\rho}_C \, dm = \sum_i m_i \vec{\rho}_i = 0$$

siden punkt C er massesenteret

Hvor stort er treghetsmomentet om A sammenliknet med treghetmomentet om B?



1. $I_A > I_B$
2. $I_A = I_B$
3. $I_A < I_B$

bruk av parallellakseteoremet: $$I_A = I_{cm} + M(d_{A,cm})^2$$

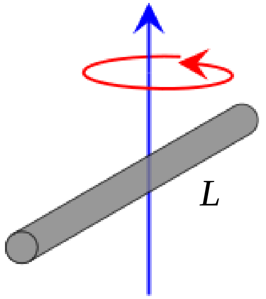
$$I_B = I_{cm} + M(d_{B,cm})^2$$

$$d_{A,cm} < d_{B,cm} \quad \Rightarrow \quad I_A < I_B$$

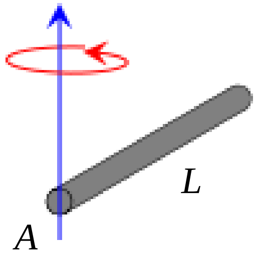
Eksempel

treghetsmomentet til en tynn lang stav
som roterer om en akse gjennom massesenteret: $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$

(regn ut som øvelse)



hva er treghetsmoment hvis staven roterer
om en akse gjennom en endepunkt ?



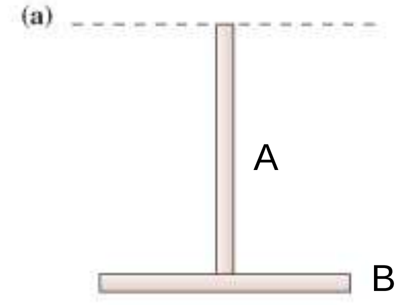
Parallellakseteoremet:

$$I_A = I_{cm} + Ms^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} ML^2$$

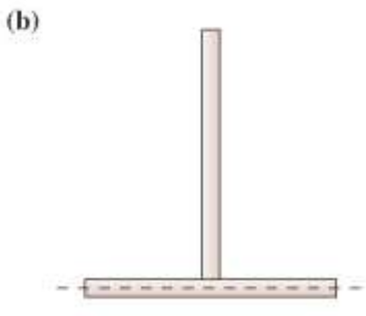
Superposisjonsprinsippet

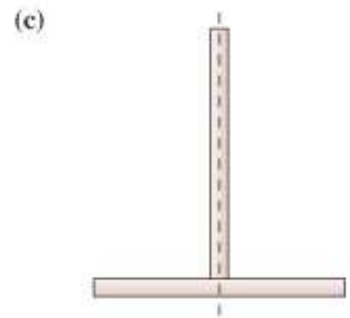
Hva er treghetsmoment for et legeme som består av to deler?

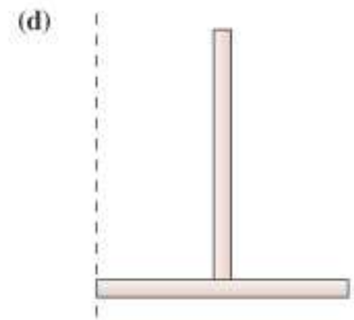


$$I_a = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i \rho_i^2 + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \rho_i^2 = I_{a,A} + I_{a,B}$$

$$I_{a,A} = \frac{1}{3} ML^2 \qquad I_{a,B} = I_{cm,B} + Ms^2 = 0 + ML^2 \qquad I_a = \frac{1}{3} ML^2 + ML^2 = \frac{4}{3} ML^2$$



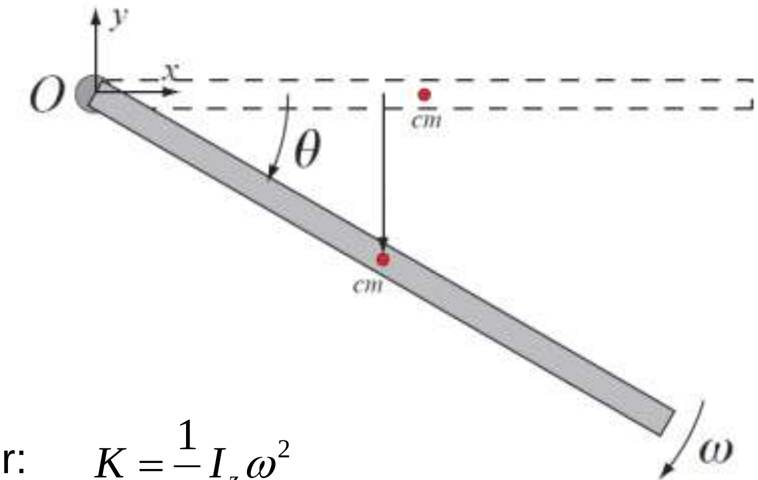




$$I_b = 0 + \frac{1}{3} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2 \qquad I_c = 0 + \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{12} ML^2 \qquad I_d = \frac{1}{3} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{7}{12} ML^2$$

$$I_{\mathrm{a}} > I_{\mathrm{d}} > I_{\mathrm{b}} > I_{\mathrm{c}}$$

En stav er festet i et friksjonsfritt hengsel og slippet fra en horisontal stilling.



finn vinkelhastigheten
(vi ser bort fra luftmotstand)

Kinetisk energi

Den kinetiske energien til et stivt legeme som roterer med vinkelhastigheten ω om en akse *z* er: $K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

Potensiell energi

Den potensielle energien til et stivt legeme i tyngdefeltet er: $U = \sum_i m_i g\, y_i = g \sum_i m_i\, y_i = MgY$

potensiell energi $\Rightarrow$ kinetisk energi

kan vi bruke energibevaring ?

la oss se på kreftene:

- gravitasjon $\Rightarrow$ potensiell energi
- ingen friksjon
- ingen luftmotstand
- normalkraft i hengselet

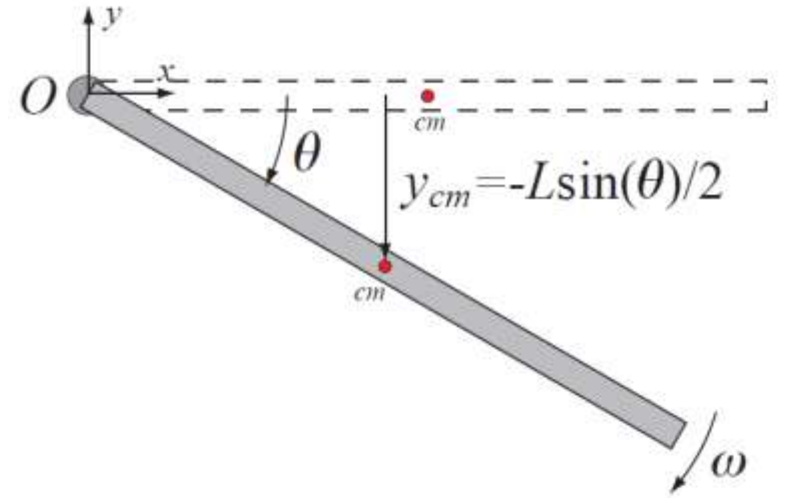
hengselet beveger seg ikke
$\Rightarrow$ normalkraft gjør ingen arbeid

energi er bevart:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 + MgY_0 = 0$$

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + MgY_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$



energibevaring: $E_0 = E_1$

$$0 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$I_O \omega_1^2 = MgL\sin\theta$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{MgL}{I_O}\sin\theta}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}\sin\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin\theta}$$

treghetsmoment:

$$I_O = \frac{1}{3} ML^2$$