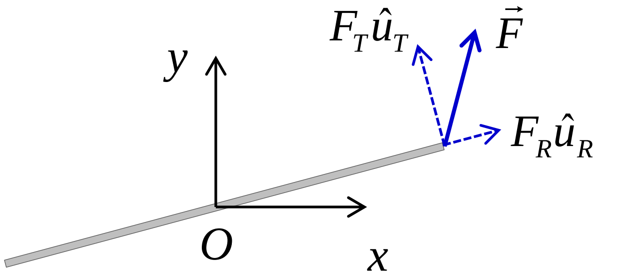
Stivt legemers dynamikk

18.04.2013

Kraftmoment



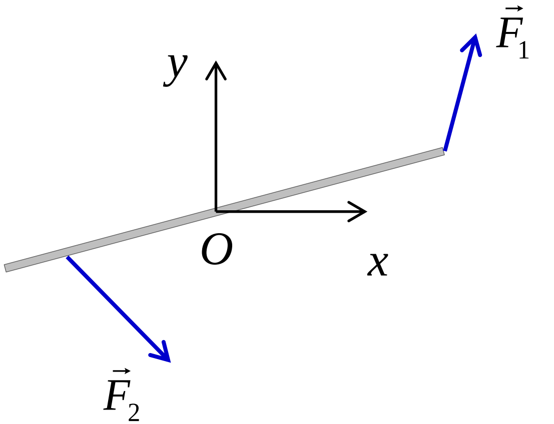
"kraftmoment om O"

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{u}_R \times (F_R\hat{u}_R + F_T\hat{u}_T)$$

$$= rF_T(\hat{u}_R \times \hat{u}_T) = rF_T\hat{k} = \tau_{O,z}\hat{k}$$

avstand mellom angrepspunkt og rotasjonsaksen vesentlig

bare den tangensiale kraftkomponenten bidrar.



netto kraftmoment: $\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{\tau}_{O,i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

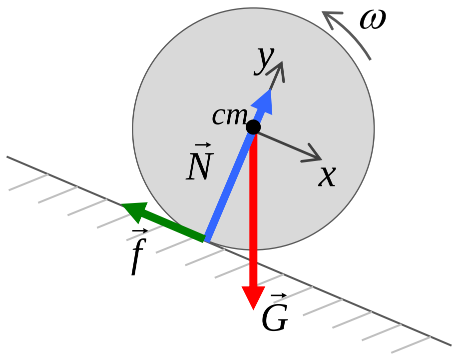
N2L for rotasjoner: $\tau_{O,z} = I_z \alpha$

N2L for translasjoner: $F = ma$

kraftmomentet er årsak for vinkelakselerasjonen

treghetsmomentet er legemets motstand mot
forandringen av rotasjonshastigheten

Problemløsning



- identifiser system og omgivelse
- definer et koordinatsystem
- finn massesenter, rotasjonsakse og treghetsmoment
- finn initialbetingelser: posisjon, hastighet, vinkel, vinkelhastighet
- finn kreftene og angrepspunktene
- finn kraftmomentene for hver kraft
- bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen til massesenteret $\sum_i F_i = M\vec{A}$
- bruk Newtons andre lov for rotasjoner for å finne vinkelakselerasjonen $\sum_i \tau_{O,z,i} = I_z \alpha$
- bruk kinematiske betingelse for å relatere translasjon og rotasjon
- løs bevegelsesligninger for translasjon og rotasjon
- kontroller og analyser bevegelsen

Bevegelsesligninger for rotasjoner

netto kraftmoment $\Rightarrow$ vinkelakselerasjon

Newtons andre lov for rotasjoner: $\tau_{O,z} = I_z \alpha$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt$$

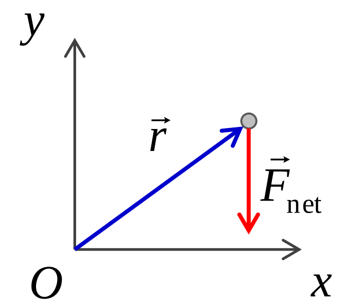
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \omega(t) dt = \int_0^t \left(\omega_0 + \int_0^t \alpha dt \right) dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \int_0^t \left(\int_0^t \alpha dt \right) dt$$

for konstant vinkelakselerasjon: $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Spinn



Newtons andre lov: $\vec{F}_{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$

kraftmoment om O: $\vec{\tau}_{\text{net}} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = \vec{\tau}_{\text{net}}$$

vi definerer:
spinn om punkt O for en partikkel
med masse m og bevegelsesmengde $\vec{p}$

engelsk:
momentum $\vec{p}$
angular momentum $\vec{l}$

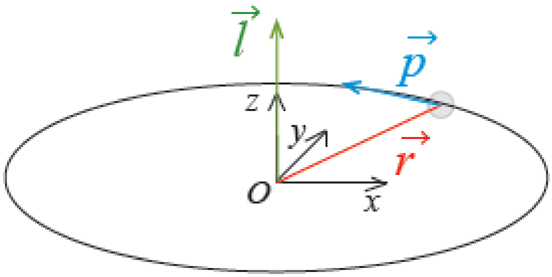
$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

spinnet er definert i forhold til et punkt!

spinnsats: $\boxed{\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{l}_O}$

uten netto kraftmoment er spinnet bevart

sirkelbane



$$\vec{l}_O = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

$$= \vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$= m\vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - m\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})$$

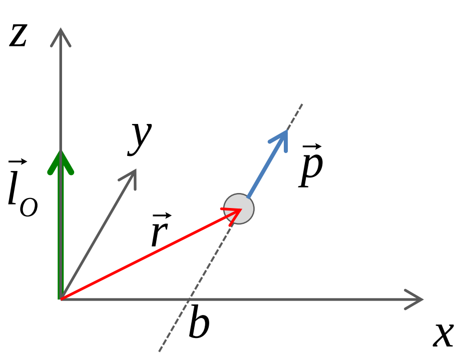
$$= mr^2\vec{\omega} \;\; = mr^2\omega\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{\omega}\perp\vec{r}$$

lineær bevegelse



vi antar: $\vec{r} = b\hat{i} + y(t)\hat{j}$

$$\vec{v} = v_y\hat{j}$$

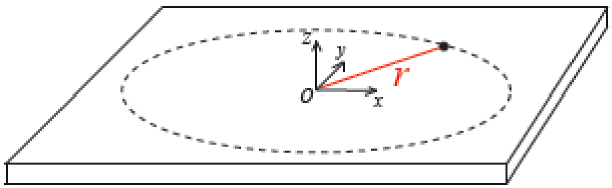
$$\vec{l}_O = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} \; = (b\hat{i} + y(t)\hat{j})\times mv_y\hat{j}$$

$$= bmv_y(\hat{i}\times\hat{j}) + y(t)mv_y(\hat{j}\times\hat{j})$$

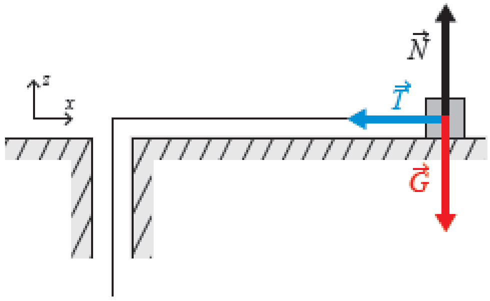
$$= bmv_y\hat{k}$$

en masse med lineær hastighet har
også et spinn i forhold til et punkt

Eksempel



En kloss med masse *m* henger i en masseløs snor som går gjennom et hull i et friksjonsfritt bord. Klossen har vinkelhastighet ω_0 ved radius r_0. Vi trekker langsomt i snoren.



Gravitasjon balanseres av normalkraften.

Eneste kraft i plantet: snordraget $\vec{T}$

kraftmoment til snordraget: $\vec{\tau}_T = \vec{r} \times \vec{T} = r\hat{u}_r \times (-T\hat{u}_r) = \vec{0}$

spinnsats: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{l}}{dt} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ spinnbevaring $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

massen beveger seg på en sirkelbane: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

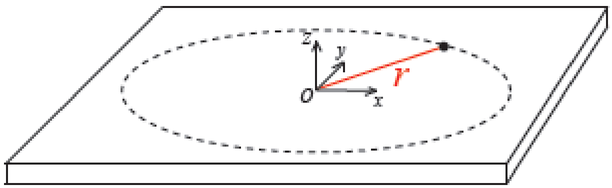
$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2\omega\hat{k}$$

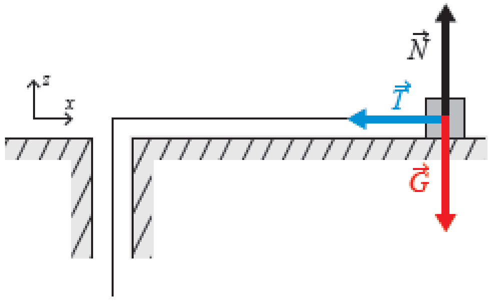
spinnbevaring: $mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$ $\omega = \dfrac{r_0^2}{r^2}\omega_0$

vinkelhastigheten øker når vi drar inn snoren

Eksempel

En kloss med masse *m* henger i en masseløs snor som går gjennom et hull i et friksjonsfritt bord. Klossen har vinkelhastighet ω_0 ved radius r_0. Vi trekker langsomt i snoren.





$$\omega = \frac{r_0^2}{r^2}\omega_0$$

kinetisk energi: $$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

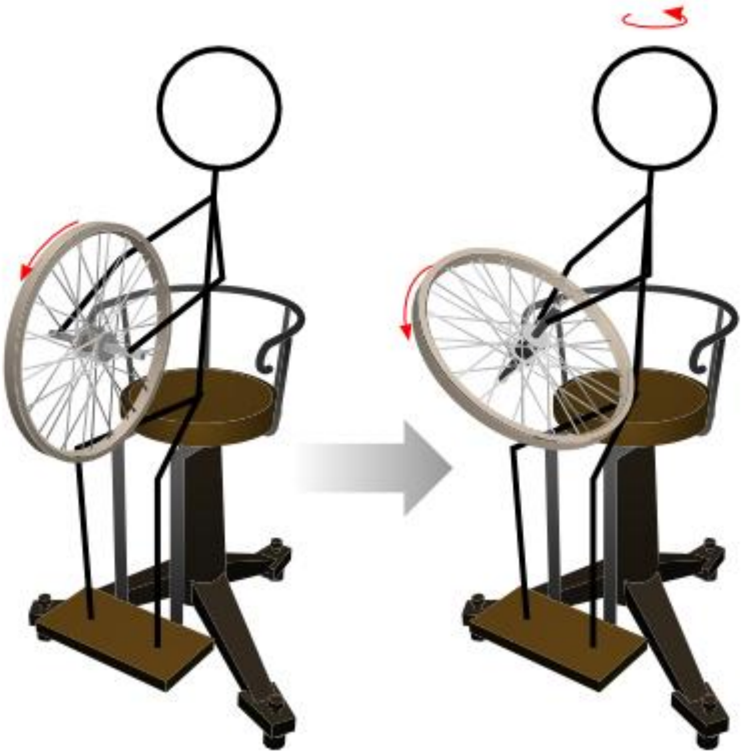
arbeid: $$W = K - K_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0^2}{r^2}\omega_0\right)^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) > 0$$

vi må gjøre positivt arbeid
for å dra inn massen mot sentrum

Spinnbevaring



Spinn til et konisk pendel

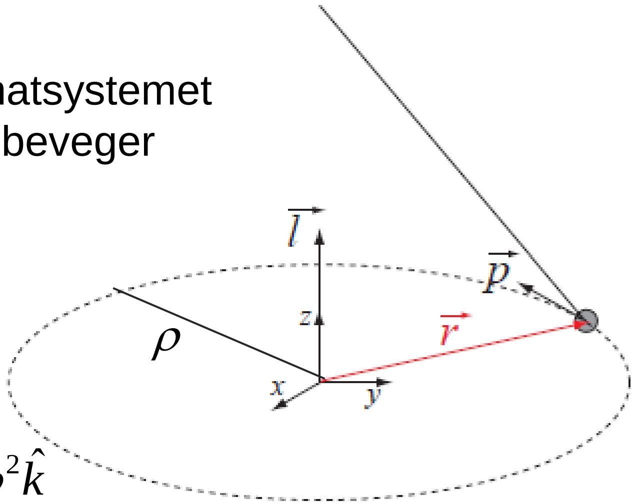
vi legger koordinatsystemet slik at pendelen beveger seg i *xy*-planet

spinn om punktet *O*: $\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$

pendel i punkt $\vec{r} = \rho \hat{j}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times \rho \hat{j} = -\omega \rho \hat{i}$$

$$\vec{l}_O = \rho \hat{j} \times m(-\omega \rho \hat{i}) = -m\omega\rho^2 (\hat{j} \times \hat{i}) = m\omega \rho^2 \hat{k}$$

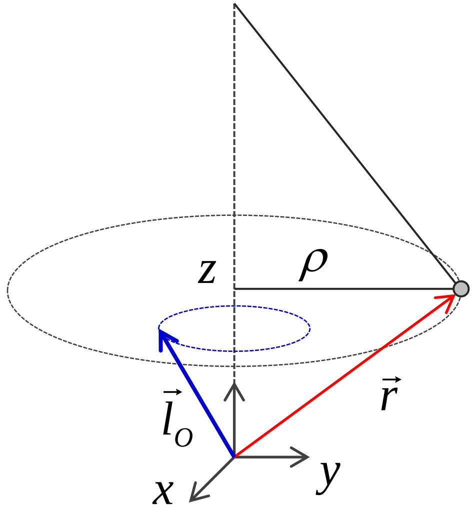


hva hvis vi velger et annet punkt (langs z aksen)?

$$\vec{r} = \rho \hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times (\rho \hat{j} + z\hat{k}) = -\omega \rho \hat{i} = -v\hat{i}$$

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p} = (\rho \hat{j} + z\hat{k}) \times m(-\omega \rho \hat{i}) = m\omega\rho^2 \hat{k} - zm\omega\rho \hat{j}$$



spinn har samme z komponent,
men også en komponent i xy-planet

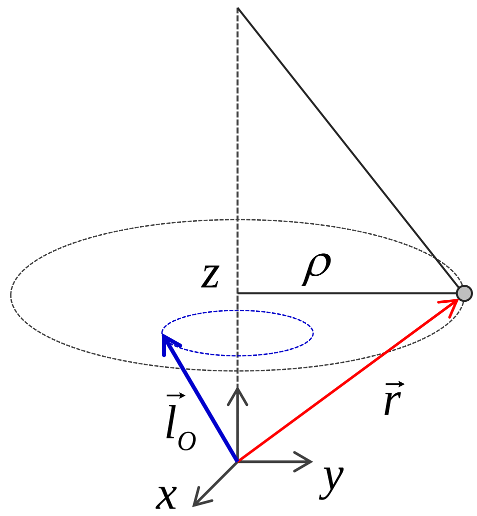
z komponenten $l_{O,z}$ er bevart

xy komponenten $l_{O,\rho}$ roterer om z aksen

$\vec{l}_O$ forandrer seg over tiden

bare z komponenten $l_{O,z}$ er konstant

det kreves et kraftmoment

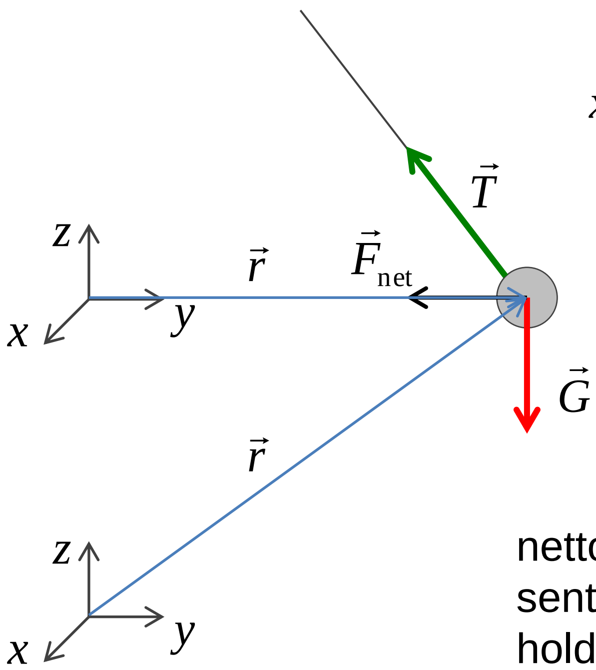


spinnsats: $\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{l}_O$

O i rotasjonsplanet:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = 0$$

$\vec{l}_O = l_{O,z}\hat{k}$ er konstant



O flyttet langs z aksen:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = (\rho\,\hat{j} + z\hat{k}) \times (-F\,\hat{j}) = zF\hat{i}$$

$$\Delta\vec{l}_O = \vec{\tau}_{\text{net}}\Delta t$$

forandring av spinn i x retning

nettokraften er
sentripetalkraft som
holder pendelen
på en sirkelbane

Spinn for flerpartikkelsystemer

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{l}_{O,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

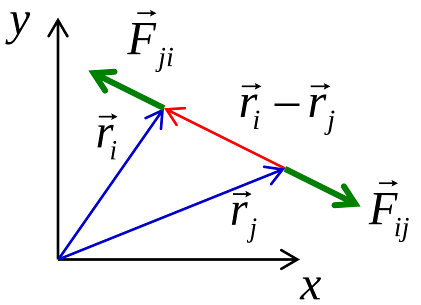
$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{0} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji})$$

$\vec{F}_{ji}$ indre kraft fra partikkel j på partikkel i

$$\sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

$$= \sum_i \sum_{j<i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})$$

$$= \sum_i \sum_{j<i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$$



N3L: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}}$$

spinnsats for flerpartikkelsystemer

Spinn til et stivt legeme

for en massepunkt i et stivt legeme:

$$\vec{r}_i = \vec{\rho}_i + z_i \hat{k} \qquad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

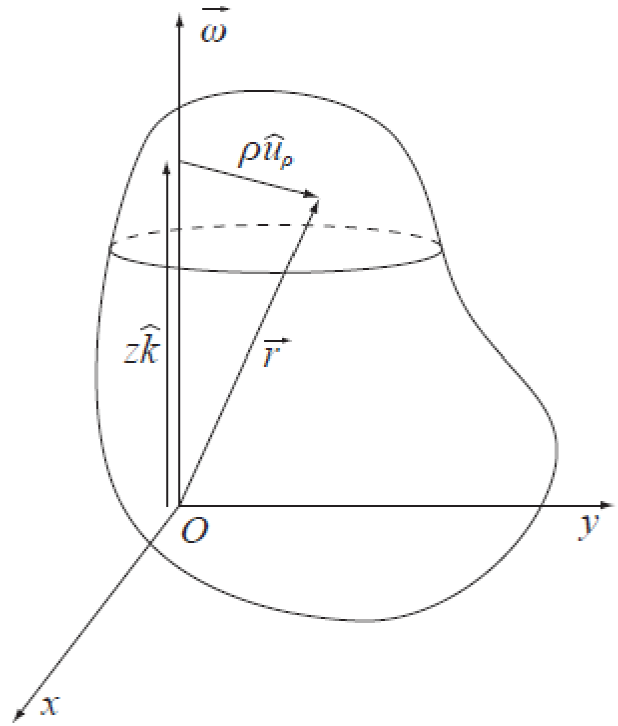
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{\rho}_i + z_i \hat{k}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

$$\vec{l}_{O,i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \;\; = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

$$= m_i \left(\vec{\omega} (\vec{r}_i \cdot \vec{\rho}_i) - \vec{\rho}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right)$$

$$= m_i \omega \hat{k} \left((\vec{\rho}_i + z_i \hat{k}) \cdot \vec{\rho}_i \right) - m_i \vec{\rho}_i \left((\vec{\rho} + z_i \hat{k}) \cdot \omega \hat{k} \right)$$

$$= \vec{\omega} m_i \rho_i^2 - \omega m_i \vec{\rho}_i z_i$$

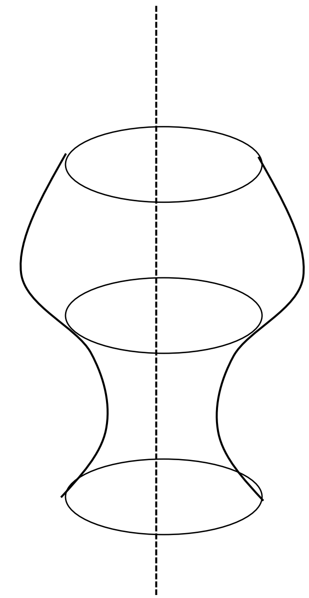


for hele legemet: $\vec{L}_O = \sum_i \vec{l}_{O,i} = \vec{\omega} \sum_i m_i \rho_i^2 - \omega \sum_i m_i \vec{\rho}_i z_i$

$$= \vec{\omega} I_z - \omega \sum_i m_i \vec{\rho}_i z_i$$

$\vec{L}_O$ og $\vec{\omega}$ er generelt ikke parallelle.

spinn til et stive legeme: $\vec{L}_O = \vec{\omega} I_z - \omega \sum_i m_i \vec{\rho}_i z_i$



spesialfall: et rotasjonssymmetrisk legeme roterer om symmetriaksen

for hver skive på høyden z er: $\sum_i m_i \vec{\rho}_i = \vec{0}$

massesenteret til skiven ligger på z aksen

$\vec{L}_O = \vec{\omega} I_z$ spinn er parallell med rotasjonsaksen

generelt: $\vec{L}_O = \vec{\omega} I_z - \omega \sum_i m_i \vec{\rho}_i z_i$

z komponent: $L_{O,z} = \vec{L}_O \cdot \hat{k} = I_z \vec{\omega} \cdot \hat{k} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \cdot \hat{k} = I_z \omega$

kraftmoment: $\tau_{O,z} = \frac{d}{dt} L_{O,z} = \frac{d}{dt}(I_{O,z}\omega) = I_{O,z}\alpha$

Newtons andre lov
for rotasjoner