

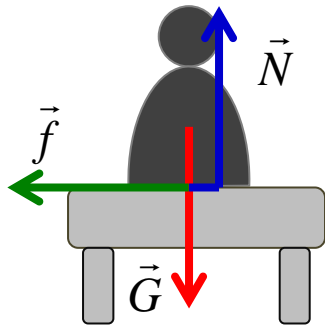
# **Fiktive krefter**

## **Gravitasjon og planetenes bevegelser**

**30.04.2013**

# Sentrifugalkraft

inertialsystem S

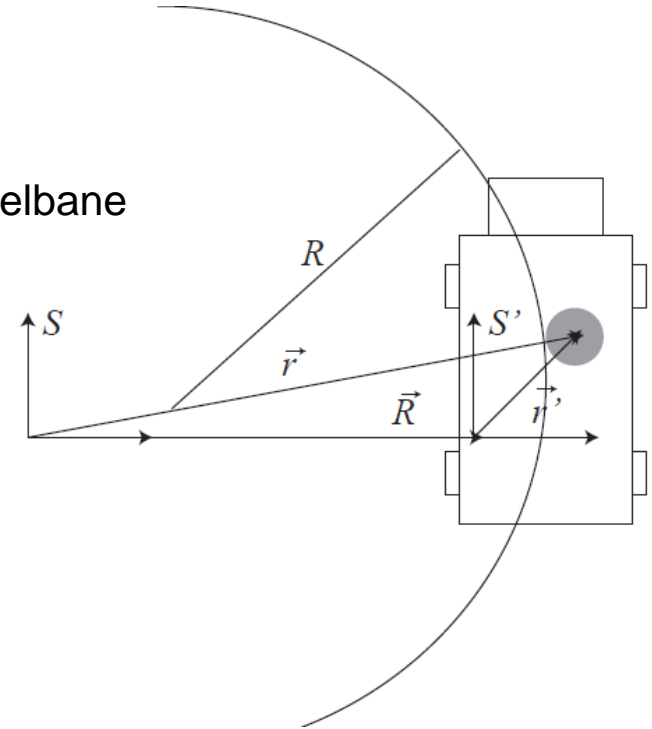


friksjon mellom passasjer og sete

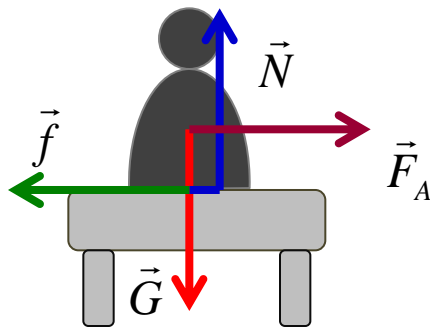
⇒ sentripetalkraft

⇒ passasjer beveger seg i en sirkelbane

$$\vec{f} = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$



roterende system S'



i roterende system sitter passasjer i ro

⇒ kreves en kraft som kompenserer sentripetalkraft (=friksjon)

⇒ sentrifugalkraft

$$\vec{F}_S = +m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

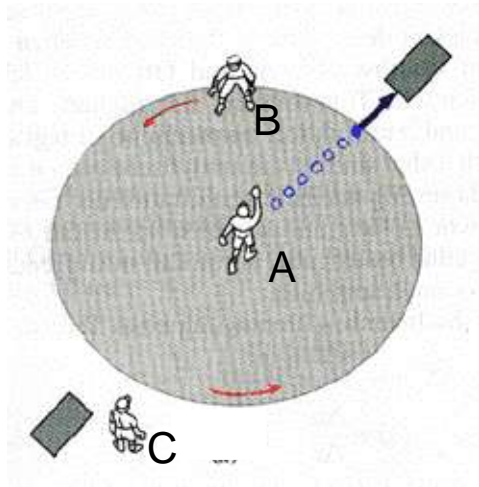
sentrifugalkraft oppstår bare i det roterende systemet

⇒ fiktive kraft

⇒ sentripetal- og sentrifugalkraft er **ikke** kraft-motkraft par

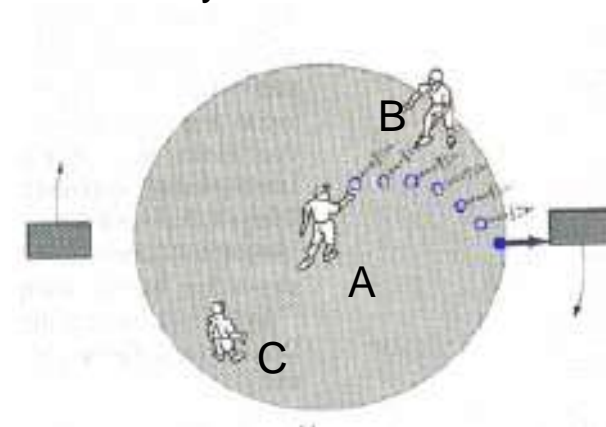
# Corioliskraft

inertialsystem



person B dreier seg ut av skuddlinjen mens ballen beveger seg mot ham

roterende system

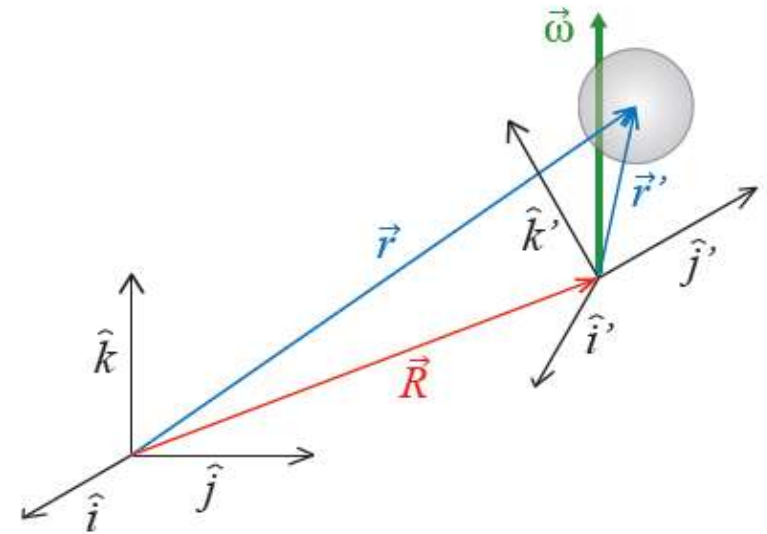


det oppstår en fiktiv kraft som avleder ballen  
⇒ Corioliskraft

## Transformasjon i et roterende koordinatsystem

vi antar  $\vec{A} = \vec{0}$ ,  $\vec{\alpha} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &= m\vec{a} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \sum \vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_S \end{aligned}$$



**Corioliskraft:**  $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

er hastighetsavhengig

**Sentrifugalkraft:**  $\vec{F}_S = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

er posisjonsavhengig

# Pendel på jorden

repetisjon: pendel i inertialsystem

radial retning:  $T - mg \cos \varphi = ma_R = 0$

$$T = mg \cos \varphi$$

tangensial retning:  $F_T = -mg \sin \varphi = ma_T$

$$a_T = -g \sin \varphi$$

pendelen beveger seg på en sirkelbane:  $v_T = \omega R$        $a_T = \alpha R$

$$\alpha R = -g \sin \varphi$$

for små vinkler  $\varphi$ :  $\ddot{\varphi} R + g \varphi = 0$

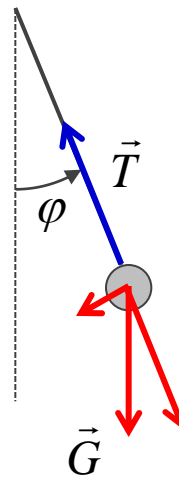
$$\ddot{\varphi} R + g \sin \varphi = 0$$

generell løsning for differensialligningen:

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega A \cos(\omega t) - \omega B \sin(\omega t)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t) - \omega^2 B \cos(\omega t) = -\omega^2 \varphi(t)$$



$$-\omega^2 R \varphi + g \varphi = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

initialbetingelse:  $\varphi(0) = B = 0$

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t)$$

# Corioliskraft på jorden

vi definerer et koordinatsystem for et sted med geografisk bredde  $\varphi$ :

x akse: øst

y akse: nord

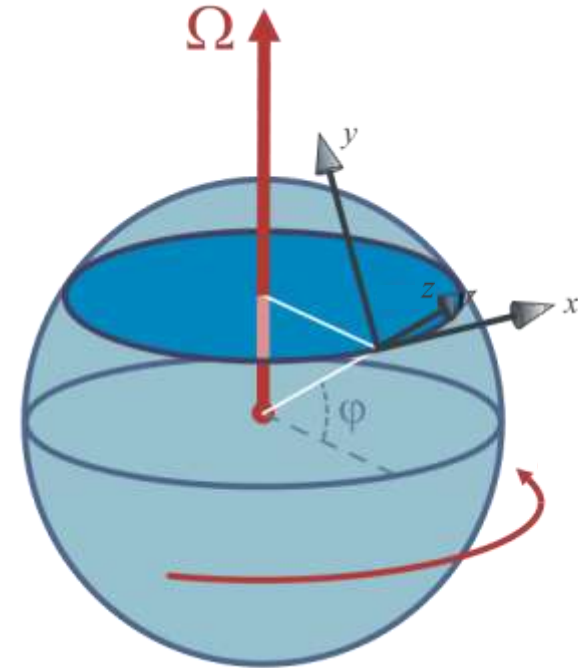
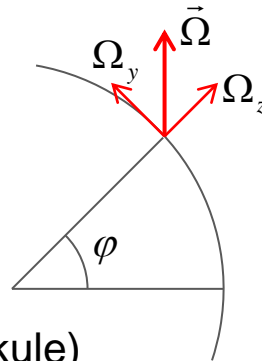
z akse: oppover

vinkelhastighet:

tangensial komponent mot nord

radial komponent opp (nordlige halvkule)

ned (sørlige halvkule)



$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \varphi \hat{j} + \Omega \sin \varphi \hat{k}$$

en masse beveger seg med hastighet  $\vec{v}$

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

$$= -2m(\Omega \cos \varphi \hat{j} + \Omega \sin \varphi \hat{k}) \times (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})$$

$$= 2mv_x \Omega \cos \varphi \hat{k} - 2mv_z \Omega \cos \varphi \hat{i} - 2mv_x \Omega \sin \varphi \hat{j} + 2mv_y \Omega \sin \varphi \hat{i}$$

## Focault pendel

$$F_{C,x} = 2mv_y\Omega \sin \varphi - 2mv_z\Omega \cos \varphi$$

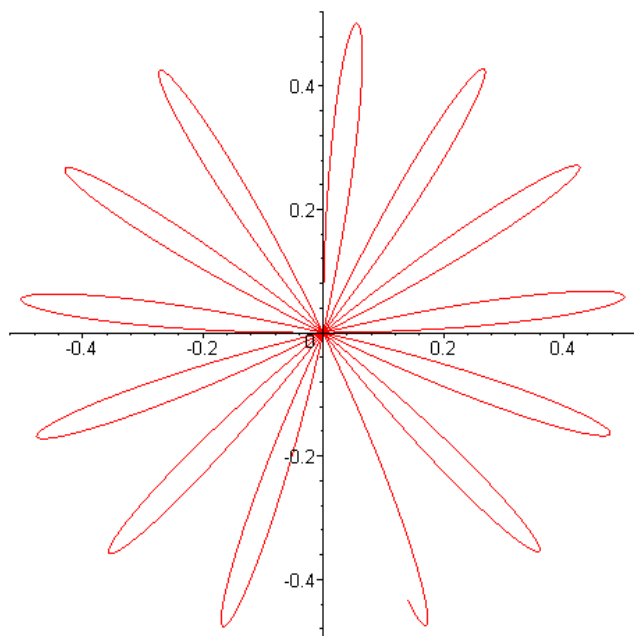
$$F_{C,y} = -2mv_x\Omega \sin \varphi$$

$$F_{C,z} = 2mv_x\Omega \cos \varphi$$

for en lang pendel er  $v_z \approx 0$

$$F_{C,x} = 2mv_y\Omega \sin \varphi$$

$$F_{C,y} = -2mv_x\Omega \sin \varphi$$



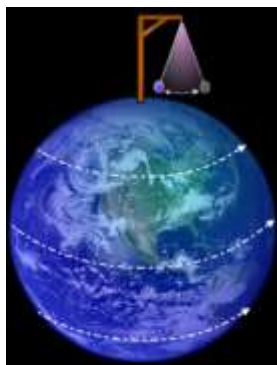
Corioliskraft på pendelen er  
avhengig av geografisk bredden:

maksimal på polen  
null på ekvator

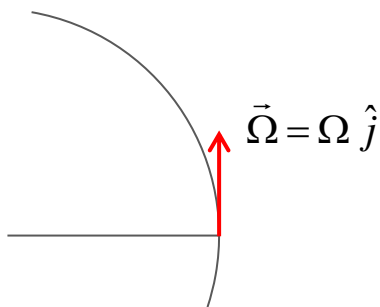
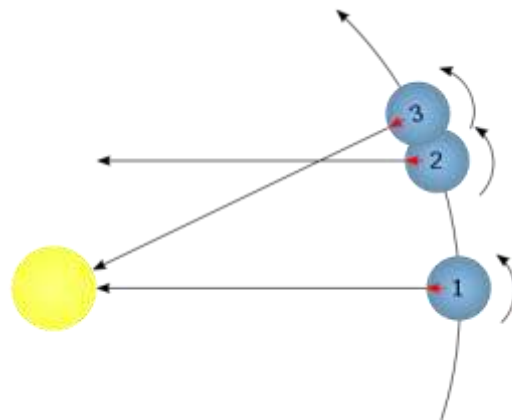
# Hvor mye tid tar det før pendelen på fysisk institutt har rotert 360°?

1. mindre enn 24 timer
2. nøyaktig 24 timer
3. mer enn 24 timer

jorden bruker 23,9345 timer for en omdreining (siderisk døgn)



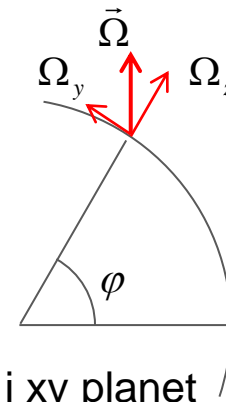
pendel på nordpolen:  
jorden dreier seg under  
pendelen i 23.9345 timer



pendel på ekvator ( $\varphi=0^\circ$ ):  
ingen vertikal komponent  $\Omega_z$   
ingen Corioliskraft

$$F_{C,x} = 2mv_y\Omega \sin \varphi$$

$$F_{C,y} = -2mv_x\Omega \sin \varphi$$



pendel i Oslo  
( $\varphi=60^\circ$ ):

pendel svinger i xy planet

$$\Omega_z = \Omega \sin \varphi$$

vinkelhastighet om z aksen  
er mindre, perioden lenger:

$$T = \frac{23.9345 \text{ h}}{\sin 60^\circ} = 27.64 \text{ h}$$



## Sentrifugalkraft på jorden

$$\vec{F}_S = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

sentrifugalkraften er ortogonal på rotasjonsaksen og rettet utover fra aksen

Vi plasserer et lodd på en vekt på bakken et sted på ekvator. Dersom vi plasserer vekten et sted nord for ekvator og leser av vekten vil den da vise

1. Den samme verdien som ved ekvator
2. En mindre verdi enn ved ekvator
3. En større verdi enn ved ekvator

sentrifugalkraft:  $\vec{F}_S = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

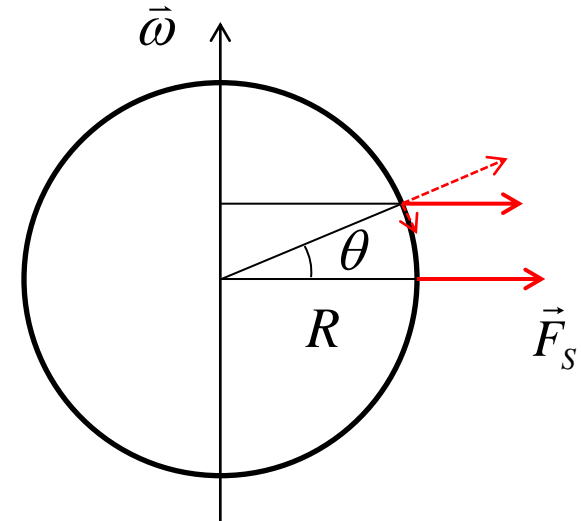
sentrifugalakselerasjon:  $\vec{a}_s = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

på ekvator:  $a_s = \omega^2 R$

på breddegrad  $\theta$ :  $a_s = \omega^2 R \cos \theta$

tyngdeakselerasjon er rettet mot jordens sentrum

den resulterende akselerasjonen er generell ikke radial



radial komponent:  $g_r = -g_0 + a_s \cos \theta = -g_0 + \omega^2 R (\cos \theta)^2$

tangensial komponent:  $g_t = a_s \sin \theta = \omega^2 R \cos \theta \sin \theta$

radial komponent:

$$g_r = -g_0 + a_s \cos \theta = -g_0 + \omega^2 R (\cos \theta)^2$$

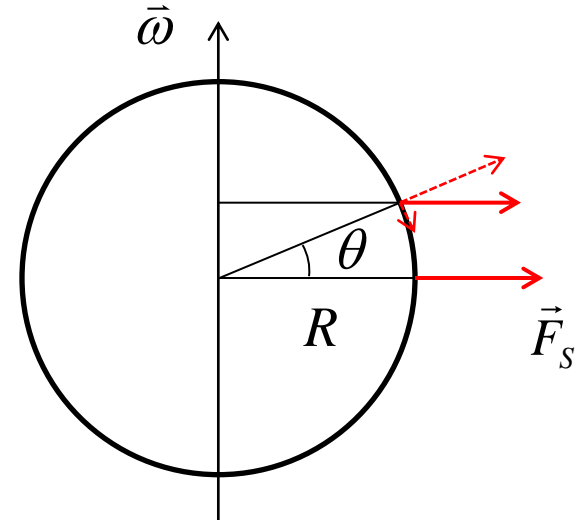
tangensial komponent:

$$g_t = a_s \sin \theta = \omega^2 R \cos \theta \sin \theta$$

siderisk døgn:  $T = 23.9345 \text{ h} = 86164 \text{ s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

jordens radius:  $R = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$



Nordpol:  $g_r = 9.832 \text{ m/s}^2$   $g_t = 0$

Oslo (59.9°):  $g_r = 9.8235 \text{ m/s}^2$   $g_t = 0.0147 \text{ m/s}^2$

Paris (48.8°):  $g_r = 9.817 \text{ m/s}^2$   $g_t = 0.0168 \text{ m/s}^2$

Ekvator:  $g_r = 9.798 \text{ m/s}^2$   $g_t = 0$

tangensialakselerasjon mot ekvator

⇒ jordens radius er større på ekvator enn på polene

$$R_{\text{ekv}} = 6378.137 \text{ km}$$

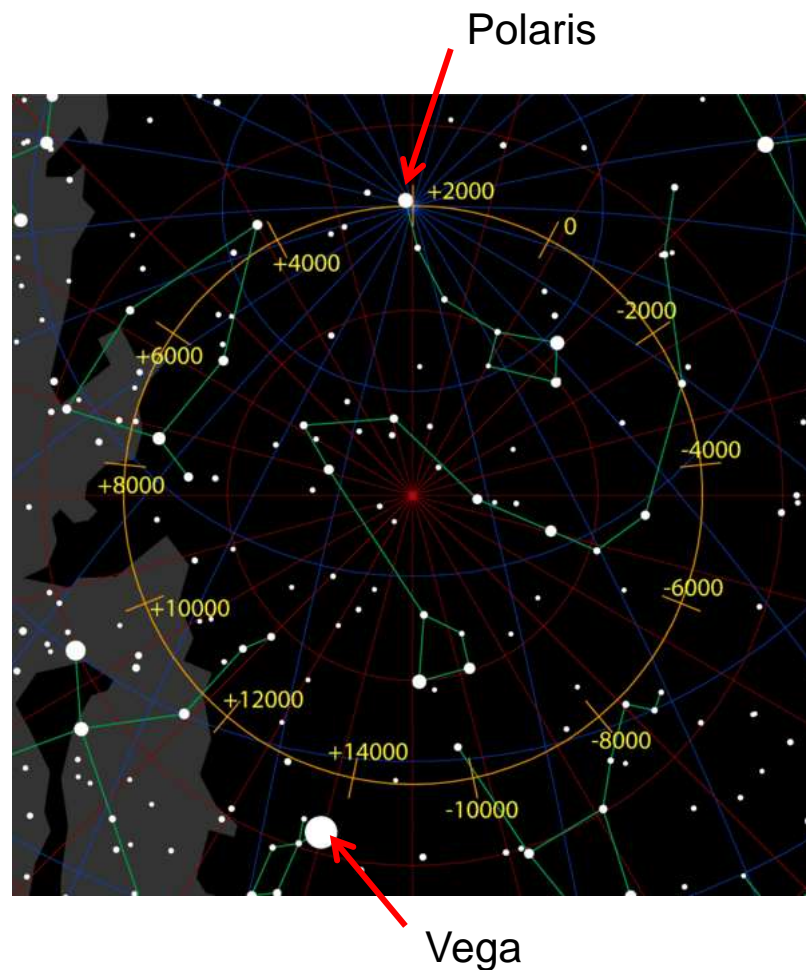
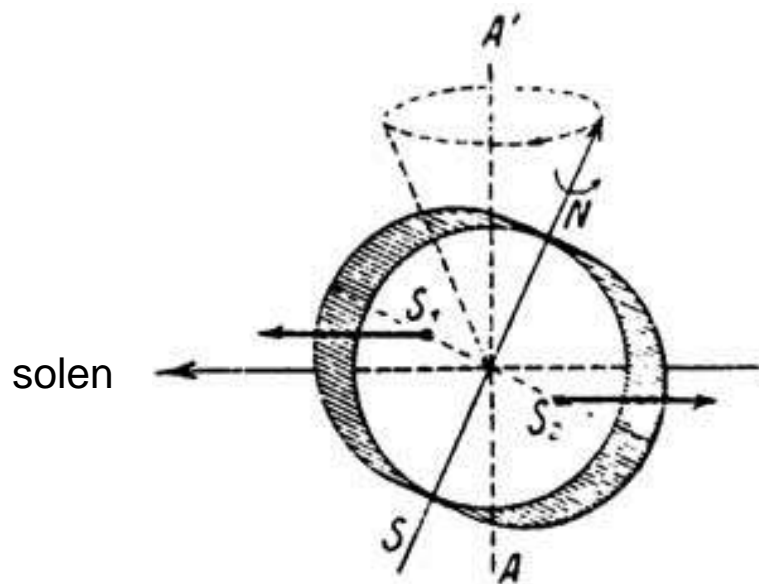
$$R_{\text{pol}} = 6356.752 \text{ km}$$

konsekvens av utflatning:

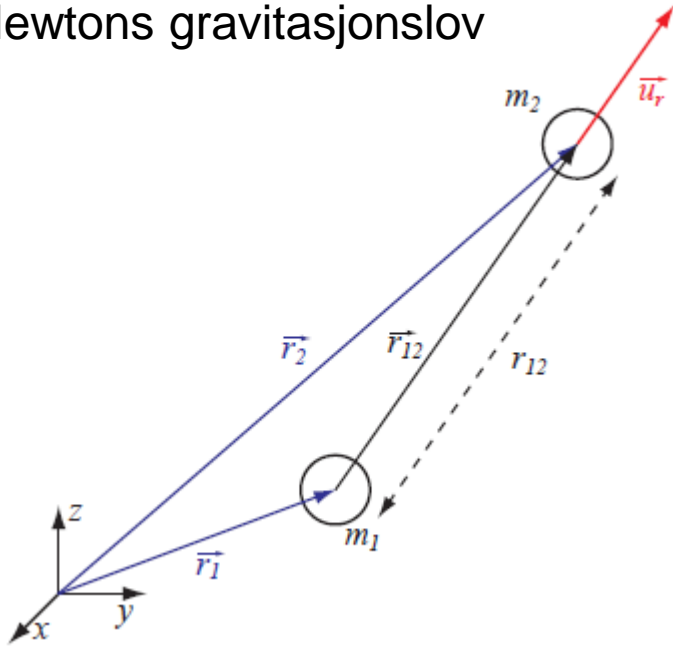
gravitasjonskraft fra solen på jorden gir et kraftmoment

spinn forandrer seg i retning av kraftmomentet  $\vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{l}$

⇒ presesjonsbevegelse  
periode: 25800 a



# Newtons gravitasjonslov



mellom ethvert partikkelpar i universet gjelder:

$$\vec{F}_{1\text{p}\ddot{a}2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{u}_r$$

hvor  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$   $\hat{u}_r = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$

$$\vec{F}_{1\text{p}\ddot{a}2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

ekvivalensprinsippet (empirisk):

gravitasjonelle masse = inertielle masse

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

det må ikke være slik,  
men det er slik

Månens masse er 1/81 av Jordens masse.  
Sammenliknet med gravitasjonskraften som  
Jorden utøver på månen, så er  
gravitasjonskraften månen utøver på Jorden:

1.  $81^2 = 6561$  ganger større
2. 81 ganger større
3. like stor
4. 1/81 så stor
5.  $(1/81)^2$  så stor

$$\vec{F}_{1\text{på}2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

kraft-motkraft par

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$$

Jorden



Månen



Saturn har 100 ganger så stor masse som Jorden,  
 Saturns avstand til solen er 10 ganger større en Jordens.  
 Sammenliknet med Jordens akselerasjon i dens bane om solen,  
 er akselerasjonen til Saturn i banen om solen:

1. 100 ganger større
2. 10 ganger større
3. Den samme
4. 10 ganger mindre
5. 100 ganger mindre

gravitasjonskraft:  $\vec{F}_{\text{sol på planet}} = -G \frac{m_S m_P}{R^2} \hat{u}_r$

N2L + ekvivalensprinsippet:  $\vec{a}_P = \frac{\vec{F}_{\text{sol på planet}}}{m_P}$

$$\vec{a}_P = -G \frac{m_S}{R^2} \hat{u}_r$$

$$a_{\text{Jord}} = G \frac{m_{\text{Sol}}}{R_{\text{Jord}}^2}$$

$$a_{\text{Saturn}} = G \frac{m_{\text{Sol}}}{R_{\text{Saturn}}^2} = G \frac{m_{\text{Sol}}}{(10R_{\text{Jord}})^2} = \frac{a_{\text{Jord}}}{100}$$