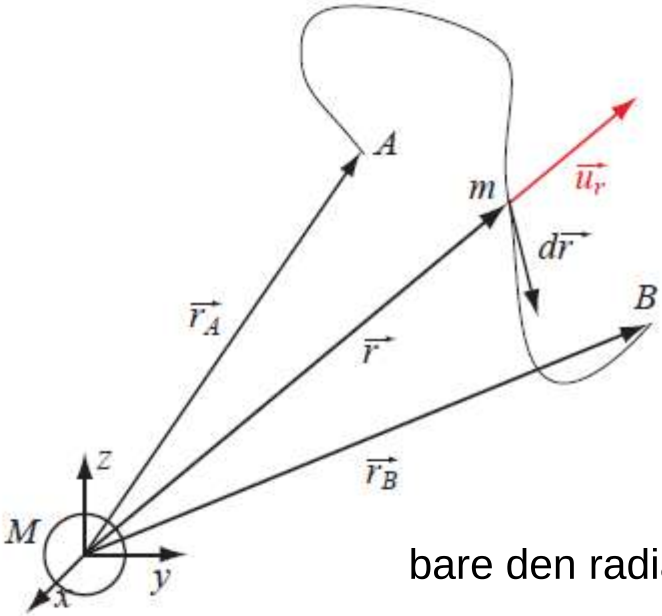
Gravitasjon og planetenes bevegelser

Statikk og likevekt

02.05.2013

Potensiell energi til tyngdekraften



en masse m beveger seg i tyngdefeltet til massen M fra punkt A til B

Newtons gravitasjonslov $\vec{F}_G = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{u}_r$

arbeid: $W = \int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{r}$

gravitasjon er en konservativ kraft

bare den radiale komponent bidrar:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} (-G\frac{mM}{r^2})dr = -GmM\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = -GmM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$$

potensial: $U(\vec{r}) = -G\dfrac{mM}{r}$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

vi kan velge nullpunktet: $U(r=\infty) = 0$

Eksempel:
De la terre à la lune
Jules Verne, 1865

Hvor stor må hastigheten til kanonkulen (masse m_K) være for å forlate jorden (=ikke falle tilbake)?

Vi ser bort fra luftmotstand, jordens rotasjon, og gravitasjonskraft fra månen til prosjektilet.

Gravitasjon er en konservativ kraft: $K_0 + U_0 = K_1 + U_1$

$$\frac{1}{2} m_K v_0^2 - G \frac{m_K m_J}{R_J} = 0 + 0$$

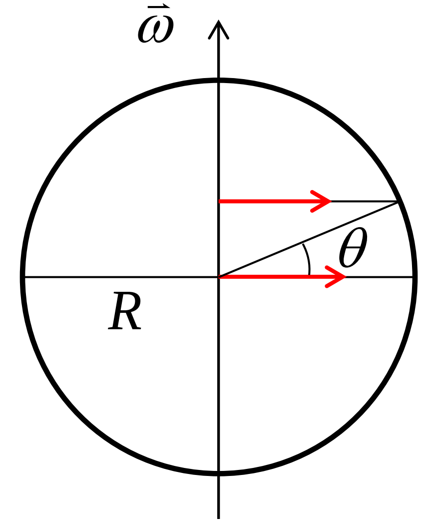
masse til jorden: $m_J = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg

radius til jorden: $R_J = 6.38 \cdot 10^{6}$ m

gravitasjonskonstant: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg}^2}$

unnslipningshastighet $v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_J}{R_J}} = 1.12 \cdot 10^{4}$ m/s uavhengig av m_K

Påvirkning av jordens rotasjon



vinkelhastighet: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.292 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$

jordens radius: $R = 6.38 \cdot 10^{6}\ \text{m}$

et punkt på ekvator har en hastighet i tangensial retning:

$$v_T = R\omega = 465\ \text{m/s}$$

hastighet i Cape Canaveral (θ=28.5° N):

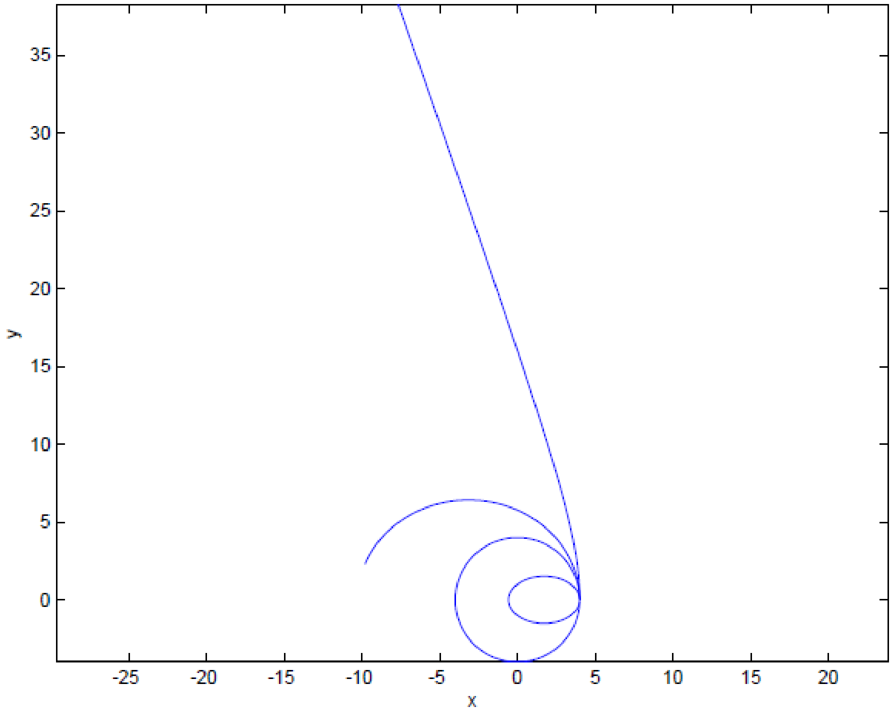
$$v_T = R\omega\cos\theta = 409\ \text{m/s}$$

gratis hastighet hvis
raketten skytes mot øst

unnslipningshastighet redusert
fra $1.12 \cdot 10^4$ til $1.08 \cdot 10^4$ m/s

Gravitasjon $\vec{F}_{\text{sol på planet}} = -G\frac{m_S m_P}{r^2}\hat{u}_r$ sentralkraft

vi har beregnet banen numerisk
$\Rightarrow$ forelesning 12. feb. (komet3.m)



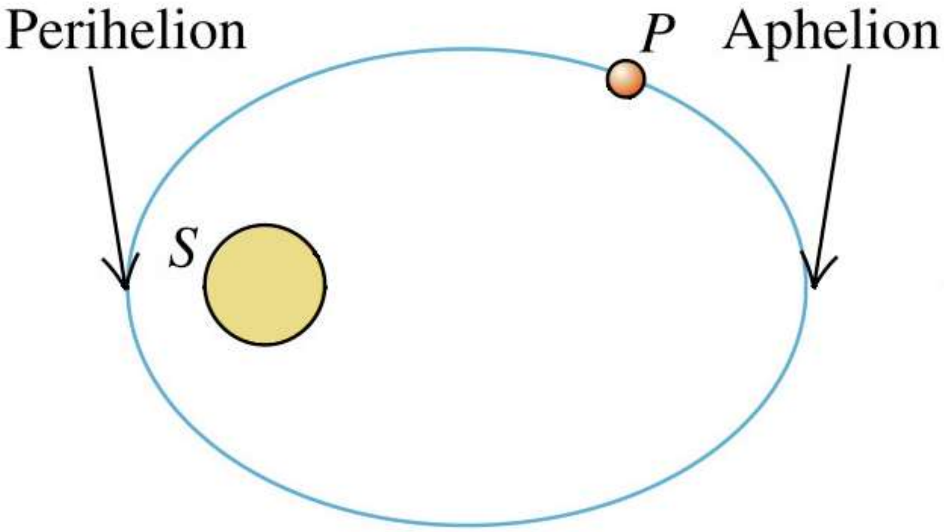
initialbetingelser:

$$\vec{r}_0 = 4\hat{i}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} 0.25\,\hat{j} \\ 0.5\,\hat{j} \\ 0.6\,\hat{j} \\ 1.0\,\hat{j} \end{cases}$$

små initialhastighet $\Rightarrow$ lukket elliptisk bane
stor initialhastighet $\Rightarrow$ objekt fjerner seg mot uendelig
vi kan finne initialbetingelser for sirkelbane

En planet (P) beveger seg i en ellipsebane om solen (S). Mens planeten beveger seg fra Aphelion til Perihelion gjør solens gravitasjonskraft:



1. Et positivt arbeid på planeten.
2. Et negativt arbeid på planeten.
3. Null arbeid på planeten.

energibevaring: $K_A + U_A = K_P + U_P$

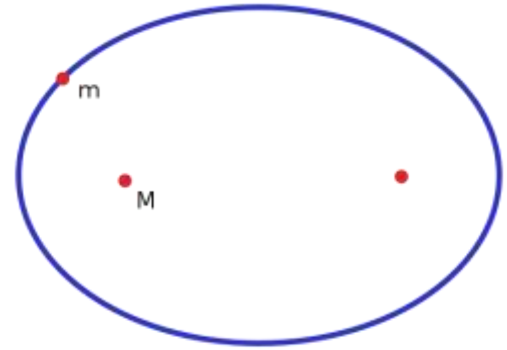
$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{G m_S m_P}{r_A} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{G m_S m_P}{r_P}$$

arbeid fra aphelion til perihelion: $W_{A \to P} = K_P - K_A = U_A - U_P = -\frac{G m_S m_P}{r_A} + \frac{G m_S m_P}{r_P} > 0$

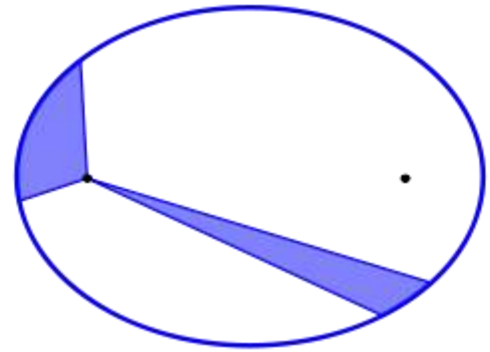
gravitasjon gjør positivt arbeid,
farten øker fra aphelion til perihelion

Keplers lover for planetenes bevegelser (1609)

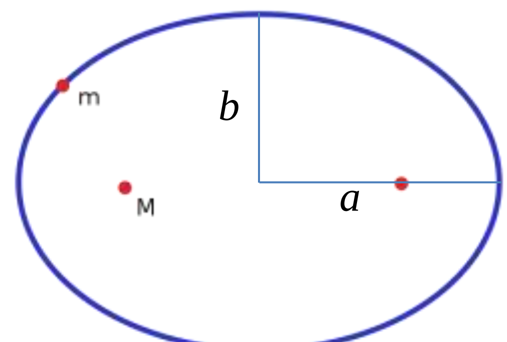
1. Planetene beveger seg i ellipsebaner;
   solen er i et av fokuspunktene.



2. En linje mellom solen og planeten tegner like arealer over like tidsintervaller

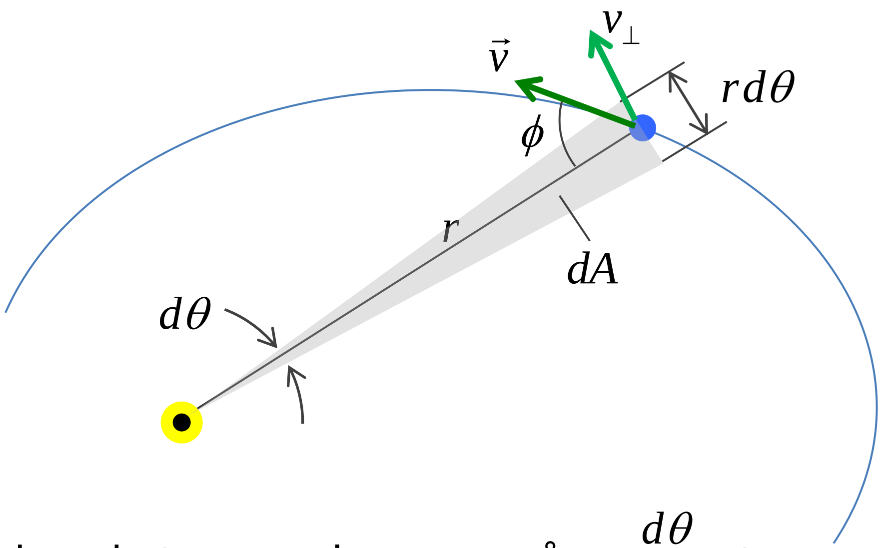


3. $T^2 \propto a^3$ hvor T er periodetiden og a er største halvakse



bevis for 1. og 3. lov krever mye matematikk...
vi ser nærmere på 2. lov

2. En linje mellom solen og planeten tegner like arealer over like tidsintervaller



en linje fra solen til planeten beveger seg en vinkel $d\theta$ i et tidsintervall dt

areal av trekant: $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

sektorhastighet: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$

Keplers andre lov: $\frac{dA}{dt} = \text{konst.}$

i nærheten av solen er r små og $\frac{d\theta}{dt}$ stor

bort fra solen er r stor og $\frac{d\theta}{dt}$ små

hastighet er tangensial

$$v_\perp = v \sin\phi = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin\phi$$

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = r v \sin\phi$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

Keplers andre lov $\Leftrightarrow$ bevaring av spinn

spinn er bevart fordi: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$

Statikk og likevekt

vi anvender Newtons lover og spinnsatsen
for legeme i likevekt – legemer som ikke beveger seg

massesentersats $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{A} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$\vec{A}$ akselerasjon til massesenteret

$\vec{P}$ bevegelsesmengde til massesenteret

spinnsats om massesenteret $\vec{\tau}_{cm}^{\text{ext}} = \sum \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$

$\vec{\tau}_{cm}^{\text{ext}}$ kraftmoment fra ytre krefter om massesenteret

$\vec{L}_{cm}$ spinn om massesenteret

likevekt: $\vec{P} = \vec{0}$ og $\vec{L}_{cm} = \vec{0}$

nødvendig betingelse: $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ og $\vec{\tau}_{cm}^{\text{ext}} = \vec{0}$

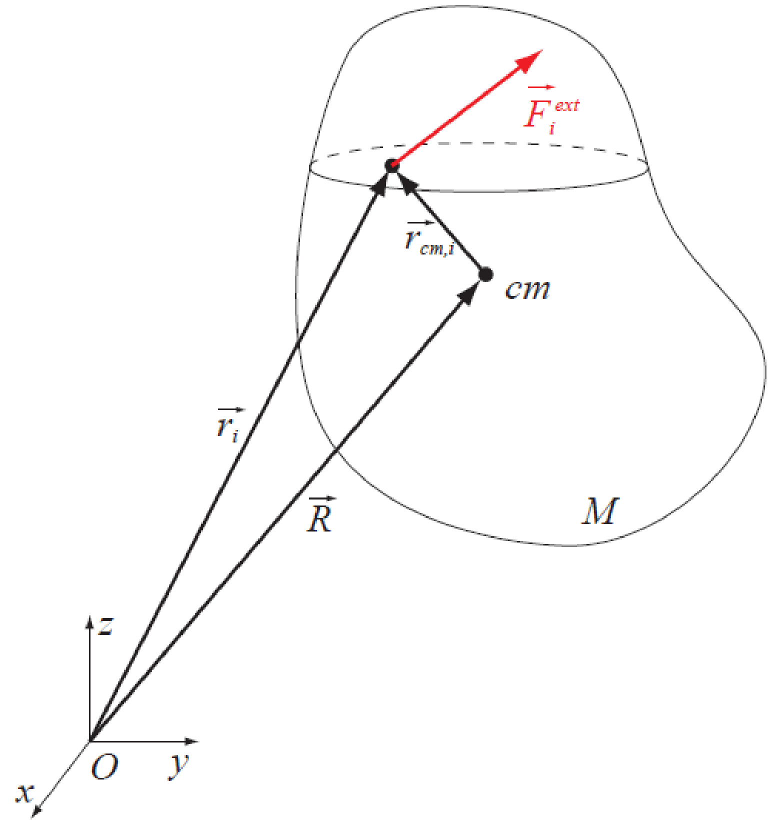
vi ser på et system hvor $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}$

kraftmoment om vilkårlig punkt O:

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_{cm,i}) \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$= \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$= \sum_i \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{\tau}_{cm}^{\text{ext}}$$

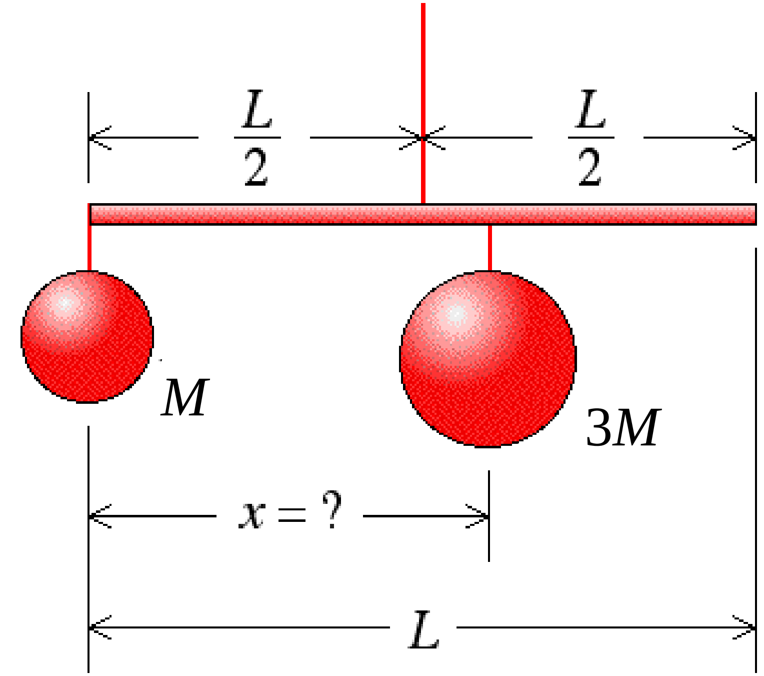


for statiske problemer er: $\vec{\tau}_{cm}^{\text{ext}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \vec{0}$ for alle punkter O

vi kan velge et hensiktsmessig punkt O

En masseløs stav med lengde L henger fra taket i en snor festet i sentrum av staven. En kule med masse M henger fra den venstre siden av staven. Hvor må vi henge en annen kule med masse $3M$ for at staven skal forbli horisontal?



1. $x = 2L/3$
2. $x = 3L/4$
3. $x = 4L/5$
4. $x = 3L/5$

$$\sum \vec{F} = \vec{N} - Mg\,\hat{j} - 3Mg\,\hat{j} = \vec{0}$$

$$\vec{N} = 4Mg\,\hat{j}$$

kraftmoment om midtpunkt av staven:

$$\tau_m = \frac{1}{2}LMg - (x - \frac{1}{2}L)3Mg = 0$$

$$\frac{1}{2}L + \frac{3}{2}L = 3x$$

$$x = \frac{2}{3}L$$

kraftmoment om venstre enden:

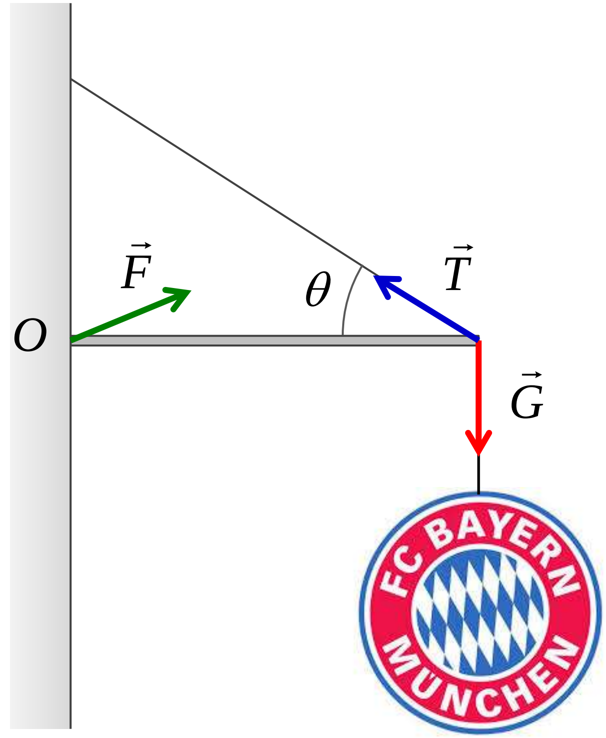
$$\tau_0 = \frac{1}{2}L\,4Mg - x3Mg = 0$$

$$2L - 3x = 0$$

$$x = \frac{2}{3}L$$

Eksempel

Et skilt med masse *m* henger i enden av en masseløs stav med lengde *L*. Staven er festet med et hengsel i punktet *O.* I den andre enden er staven festet med en kabel som har en vinkel θ med horisontalen. Hva er snordraget i kabelen? Hva er kraft på hengselet?



x retning: $F_x - T\cos\theta = 0$

y retning: $F_y + T\sin\theta - mg = 0$

kraftmoment om *O*: $\tau_O = LT\sin\theta - Lmg = 0$

$$T = \frac{mg}{\sin\theta}$$

snordraget blir stor for små vinkel θ

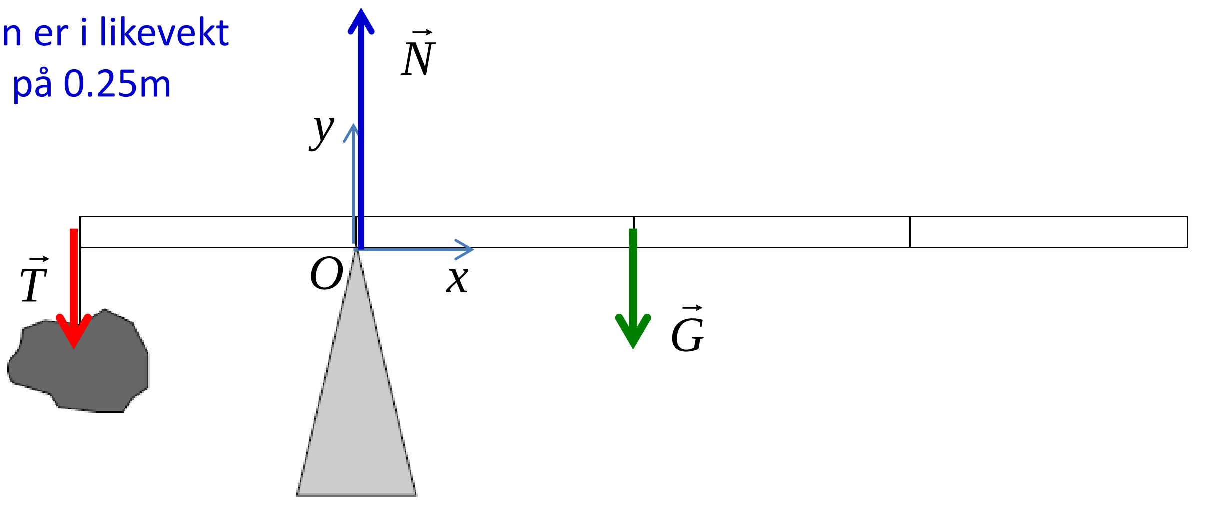
$$F_y + \frac{mg}{\sin\theta}\sin\theta - mg = F_y = 0$$

kraft i hengselet er horisontal:

$$F_x = T\cos\theta = \frac{mg}{\tan\theta}$$

En stein på m=1 kg henger i en masseløs snor fra en ende av en meterstokk. Hva er massen M til meterstokken dersom stokken er i likevekt når den balanserer på en støtte på 0.25m merket?

1. 0.25 kg
2. 0.5 kg
3. 1 kg
4. 2 kg
5. 4 kg



krefter på stokken:

snordraget $\vec{T} = -mg\,\hat{j}$

normalkraft $\vec{N} = N\,\hat{j}$

gravitasjon $\vec{G} = -Mg\,\hat{j}$

angriper i massesenteret til stokken

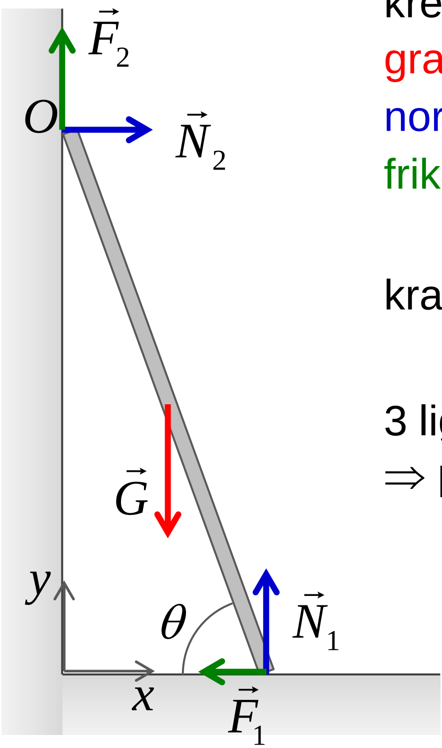
kraftmoment om O

$$T\frac{L}{4} - G\frac{L}{4} = 0$$

$$mg = Mg$$

massen til meterstokken er M = 1 kg

Eksempel: stige



krefter:
gravitasjon G
normalkreftene N_1, N_2
friksjonskreftene F_1, F_2

x retning: $N_2 - F_1 = 0$

y retning: $N_1 + F_2 - G = 0$

kraftmoment: $\tau_O = N_1 L \cos\theta - F_1 L \sin\theta - G\frac{L}{2}\cos\theta = 0$

3 ligninger men 4 ukjente: N_1, N_2, F_1, F_2
$\Rightarrow$ problemet er ubestemt

vi trenger mer informasjon for å finne kreftene

eksempel: vi antar at veggen er friksjonsfri: $F_2 = 0$

nå kan vi finne kreftene N_1, N_2, F_1 som funksjon av vinkelen θ og vekten til stigen

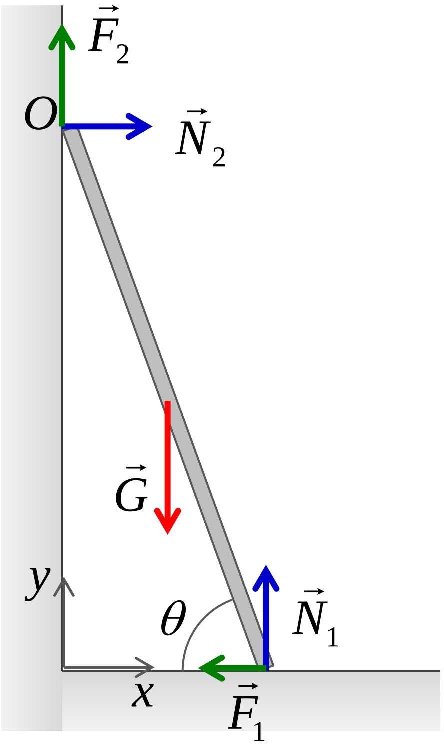
vi kan også spørre: når begynner stigen å skli?

for at stigen ikke sklir må være:

$$0 \le F_1 \le \mu_1 N_1$$

$$0 \le F_2 \le \mu_2 N_2$$

Eksempel: stige



begge sider må begynne å skli samtidlig

det skjer hvis $F_1 = \mu_1 N_1$ og $F_2 = \mu_2 N_2$

x retning: $N_2 = F_1 = \mu_1 N_1$

y retning: $N_1 + F_2 - G = 0$

$$G = N_1 + \mu_2 N_2 = N_1 + \mu_2 \mu_1 N_1 \qquad N_1 = \frac{G}{1+\mu_1\mu_2}$$

kraftmoment: $N_1 \cos\theta - F_1 \sin\theta - \frac{G}{2}\cos\theta = 0$

$$N_1 - F_1 \tan\theta - \frac{G}{2} = 0$$

$$N_1 - \frac{G}{2} = F_1 \tan\theta = \mu_1 N_1 \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\mu_1} - \frac{G}{2\mu_1}\frac{1+\mu_1\mu_2}{G} = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}$$

hvis vinkelen er mindre begynner stigen å skli (uavhengig av vekten til stigen)

hvis $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ $\qquad \tan\theta = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$

$$\mu = 0.3 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\min} = 56.6°$$

$$\mu = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\min} = 67.4°$$