Statikk og likevekt

Elastisitetsteori

07.05.2013

	uke 19	20	21	22	23
man	6 innlev. oblig 10 gruppe: statikk	13 gruppe: elastisitet	20 Pinse- mandag	27 gruppe: spes. relativitet	3 ingen gruppe orakel 10-14 Ø394
tir	7 forelesning: elastisitetsteori	14 forelesning: spes. relativitet	21 forelesning: repetisjon	28 ingen forelesning	4 ingen forelesning
ons	8 gruppe: statikk	15 gruppe: elastisitet	22 gruppe: spes. relativitet	29 ingen gruppe	5 **EKSAMEN**
tor	9 Himmelfart	16 forelesning: spes. relativitet gruppe: statikk + elastisitet	23 ingen forelesning gruppe: spes. relativitet	30 ingen forelesning ingen gruppe	
fre	10 ingen datalab	17 17. Mai	24 ingen datalab	31 orakel 10-16 Ø394	

Eksamen: Onsdag, 5. Juni, 9:00 – 13:00

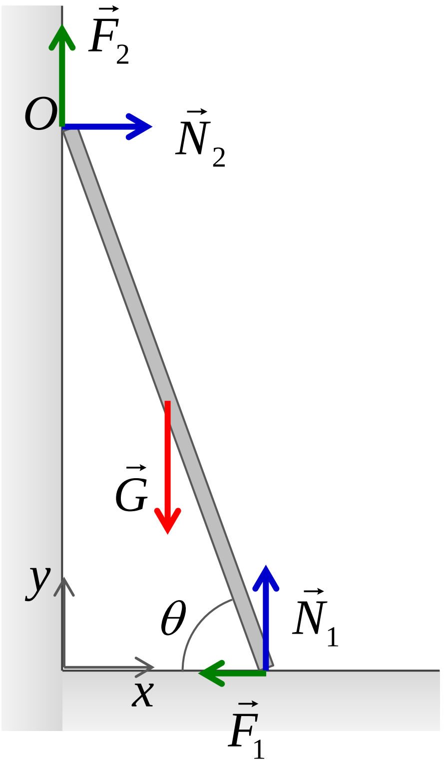
Tillatte hjelpemidler:

- Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller
- Angell, Lian, Øgrim: Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler
- Rottmann: Matematisk formelsamling
- Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Tidligere eksamensoppgaver:

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS-MEK1110/v13/

Statikk: legemer i likevekt



fri-legeme diagram:
finn alle krefter og angrepspunkter

Newtons andre lov: $\sum F_x = 0$

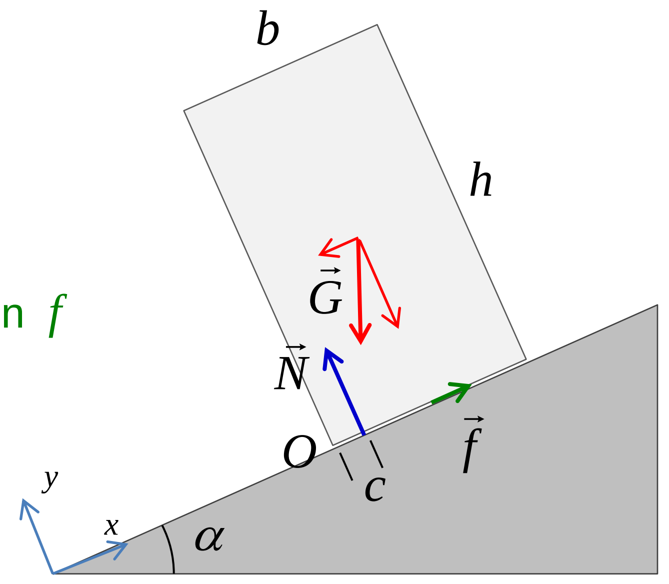
$$\sum F_y = 0$$

spinnsats: $\sum \tau_{O,x} = 0$ for et vilkårlig punkt O
(velg hensiktsmessig)

bruk andre betingelser, f.eks. statisk friksjon

Eksempel: kiste på skråplan

En homogen kiste med masse *m*, bredde *b* og høyde *h* står på et skråplan med vinkel α. Hva er betingelser for likevekt?



krefter på kisten: gravitasjon G normalkraft N friksjon f

angrepspunkt?

x retning: $f - mg\sin\alpha = 0$

$$f = mg\sin\alpha$$

y retning: $N - mg\cos\alpha = 0$

$$N = mg\cos\alpha$$

kisten kan enten skli eller tippe

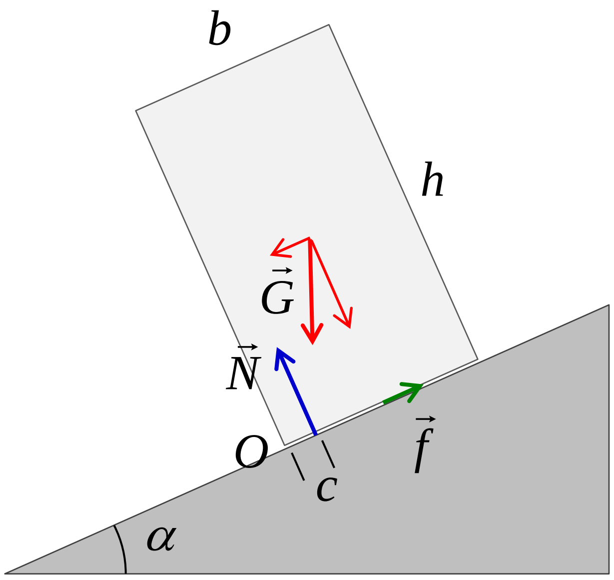
hvis den tipper er O den eneste kontaktpunkt og $c = 0$

kraftmoment om O:

$$-\frac{b}{2}mg\cos\alpha + \frac{h}{2}mg\sin\alpha + Nc = 0$$

$$c = \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\tan\alpha$$

Eksempel: kiste på skråplan



$$f = mg\sin\alpha \qquad N = mg\cos\alpha \qquad c = \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\tan\alpha$$

friksjonskraft: $0 \leq f \leq \mu_s N$

kisten begynner å skli hvis: $f = \mu_s N$

$$mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$$

$\Rightarrow$ kritisk vinkel: $\tan\alpha = \mu_s$

samtidlig må være: $c > 0$ ellers har kisten allerede tippet $\Rightarrow \frac{b}{h} > \tan\alpha$

kisten begynner å tippe hvis: $c = 0$ $\Rightarrow$ kritisk vinkel: $\frac{b}{h} = \tan\alpha$

samtidlig må være: $f < \mu_s N$ ellers har kisten allerede sklidd $\Rightarrow \tan\alpha < \mu_s$

eksempel: $\frac{b}{h} = 0.5$

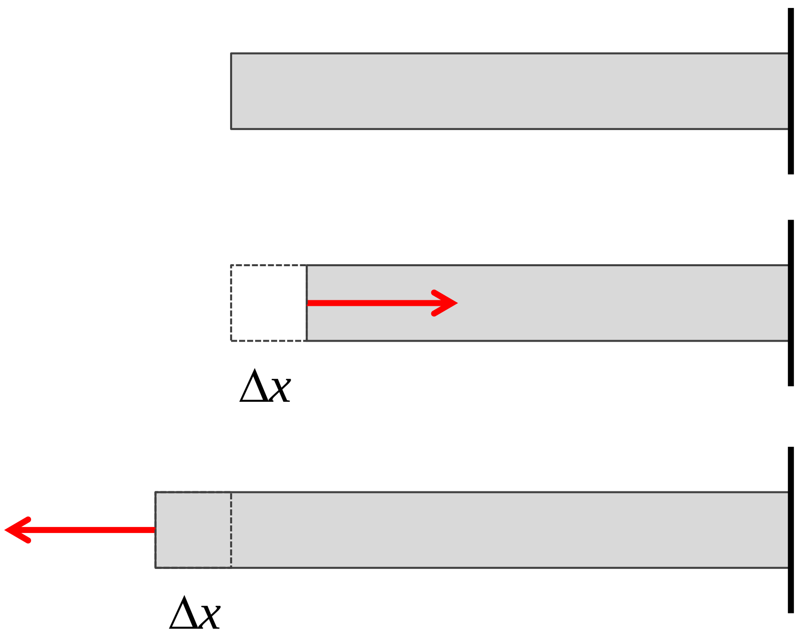
$\mu_s = 0.4$ kisten sklir ved $\alpha_{\text{crit}} = \arctan(\mu_s) = 21.8°$

$\mu_s = 0.6$ kisten tipper ved $\alpha_{\text{crit}} = \arctan\left(\frac{b}{h}\right) = 26.6°$

Elastisitetsteori

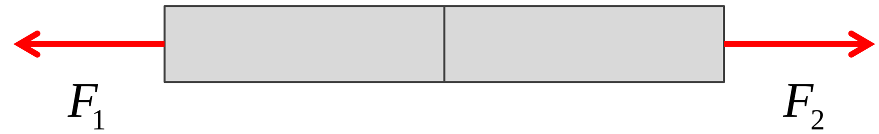
Hvordan blir faste stoffer deformert når de påvirkes av krefter?

Vi har så langt modellert deformasjoner med fjærkrefter:

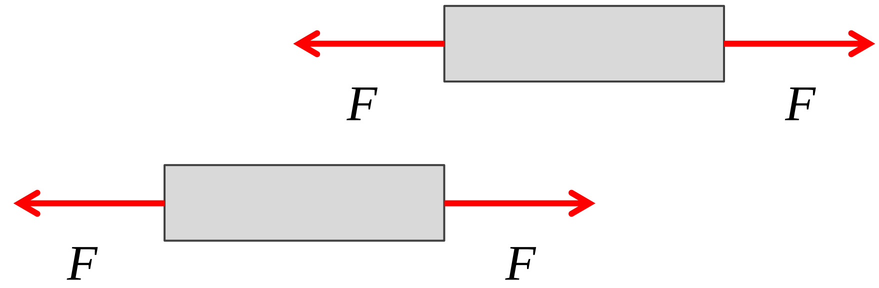


$$F = -k\Delta x$$

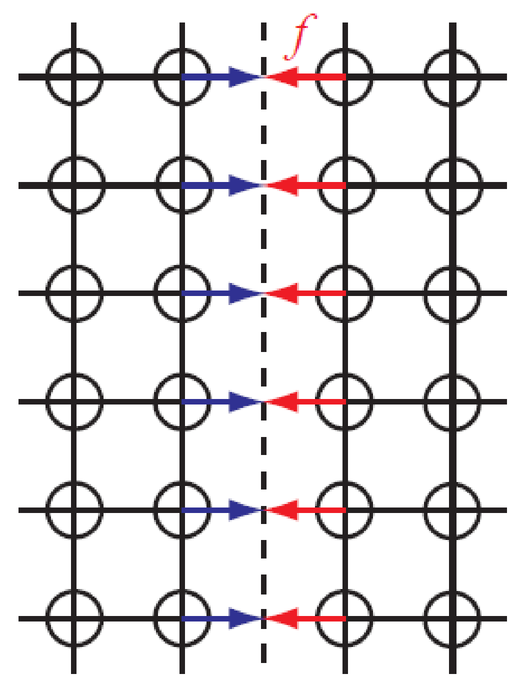
bjelke i likevekt: $F_1 = F_2$



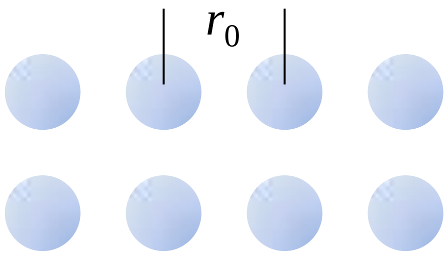
vi tenker oss en
imaginær snittflate

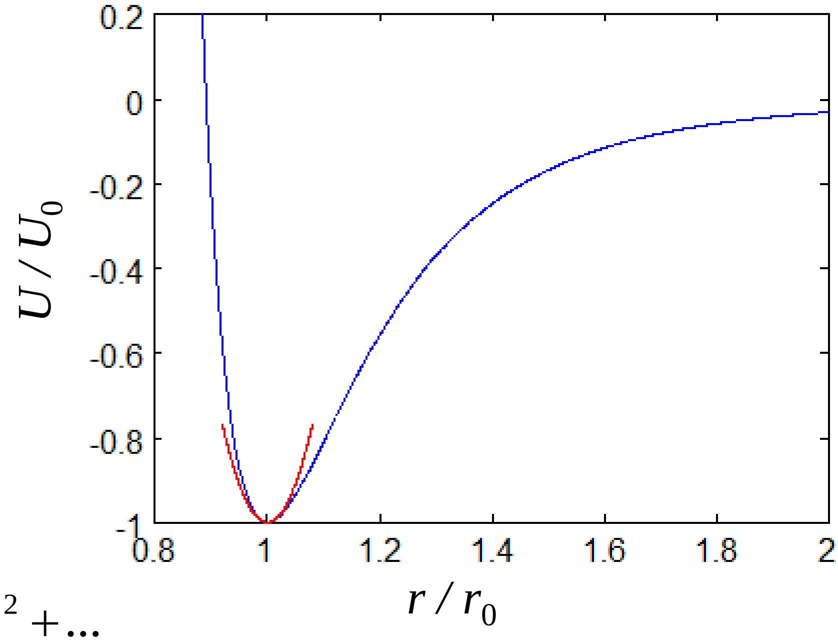


vi tenker oss en snittflate
på en atomær skala



vekselvirkningspotensialet mellom atomer ser typisk ut som dette:





Taylorutvikling om minimumspunktet r_0:

$$U(r) = U(r_0) + U'(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2} U''(r_0)(r - r_0)^2 + \ldots$$

Lennard-Jones potensial

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right]$$

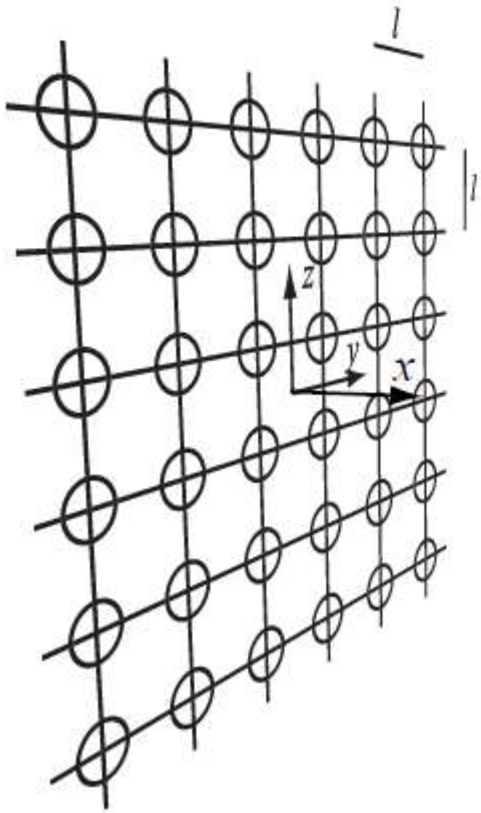
for et minimumspunkt er: $U'(r_0) = 0$

vi definerer: $k = U''(r_0)$

$$U(r) \approx U(r_0) + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} \approx -\frac{d}{dr} \left(U(r_0) + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \right) \quad = -k(r - r_0)$$

$\Rightarrow$ fjærkraft



kubisk krystall

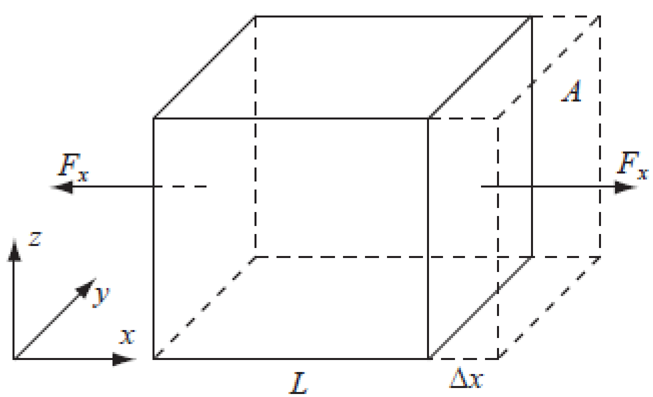
kraft mellom to atomer i x retning: $f = k(x - x_0)$

kraft på en snittflate med areal $A = N_y l \, N_z l$

$$F = k(x - x_0) N_y N_z$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{k}{l}\frac{\Delta x}{l} = \frac{k}{l}\varepsilon$$ Hookes lov

$\sigma = \dfrac{F}{A}$ spenning $\qquad \varepsilon = \dfrac{\Delta x}{l}$ tøyning



$$E = \frac{k}{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$ Elastisitetsmodul
Youngs modul

enhet: $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$

Elastisitetsmodul

eksempler:

stål	$2 \cdot 10^{11}$ Pa = 200 GPa = 200 kN/mm^2
bly	19 GPa
silikon	0.05 GPa

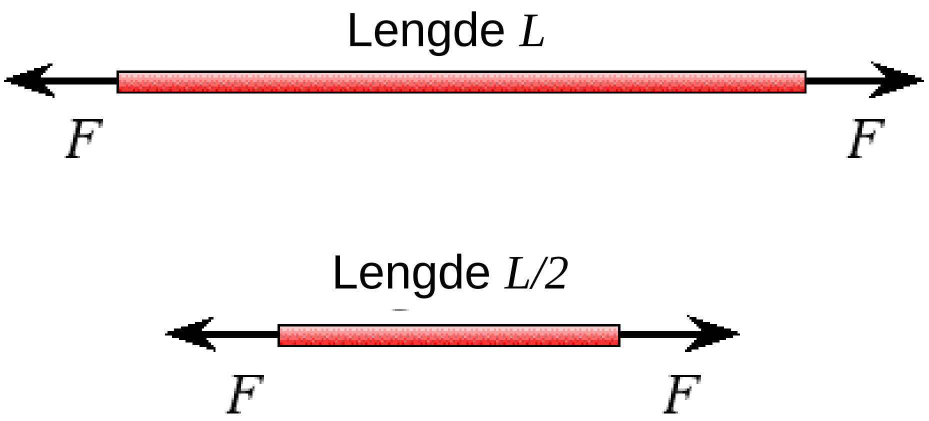
Eksempel — Et lodd på 1 kg henger i en ståltråd med 1 mm diameter og lengden 1 m. Hva er forlengelsen av tråden?

spenning: $$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s}_2}{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-4})^2\ \mathrm{m}^2} = 1.25 \cdot 10^7\ \mathrm{Pa}$$

$$\sigma = E\,\frac{\Delta x}{L}$$

$$\Delta x = \frac{\sigma}{E} L = \frac{1.25 \cdot 10^7\ \mathrm{Pa}}{2 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 6.25 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} = 62.5\,\mu\mathrm{m}$$

To staver, en med lengde *L* og en med lengde *L/2* er laget av samme type stål og har samme diameter. En kraft *F* anvendes i hver ende av stavene som vist. Sammenliknet med staven med lengde *L* har staven med lengde *L/2*



1. Større spenning og større tøyning
2. Samme spenning og større tøyning
3. Samme spenning og mindre tøyning
4. Mindre spenning og samme tøyning
5. Samme spenning og samme tøyning

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\frac{\Delta x}{l} = E\varepsilon$$

Hookes lov

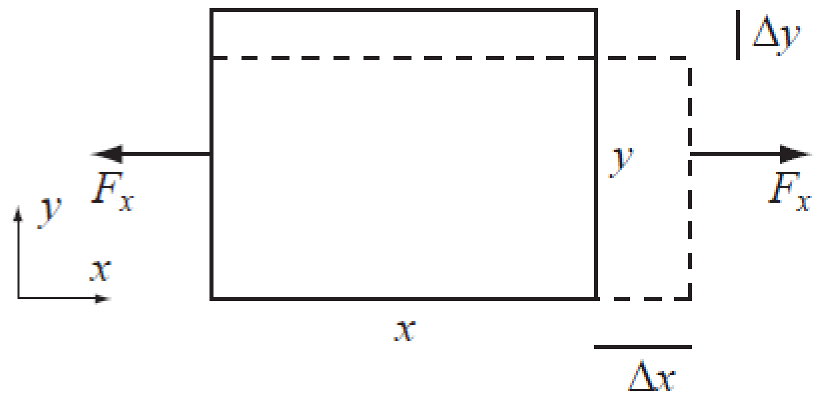
$$\sigma = \frac{F}{A}$$ spenning

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{l}$$ tøyning

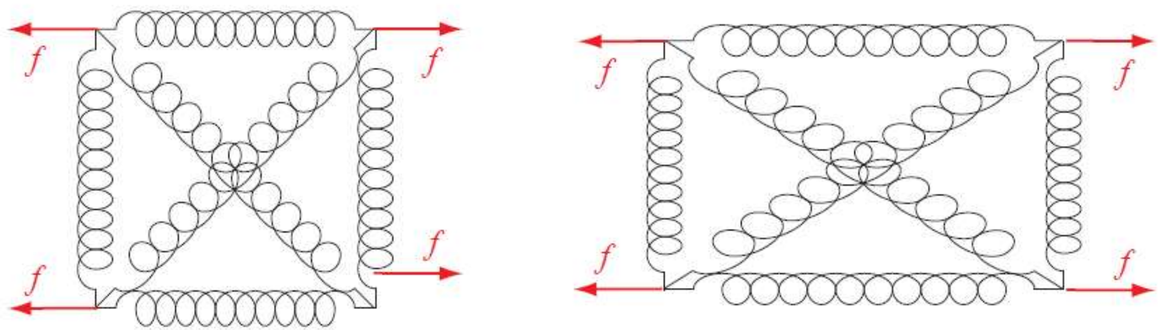
samme kraft, samme diameter
$\Rightarrow$ samme spenning
E er en materialegenskap
$\Rightarrow$ samme tøyning

tøyning i x retning: $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\sigma_x}{E}$

tøyning i y retning: $\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \frac{\Delta x}{x}$



ν tverrkontraksjonstall
Poissons tall



volumendring:

$$\Delta V = (x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z) - xyz$$

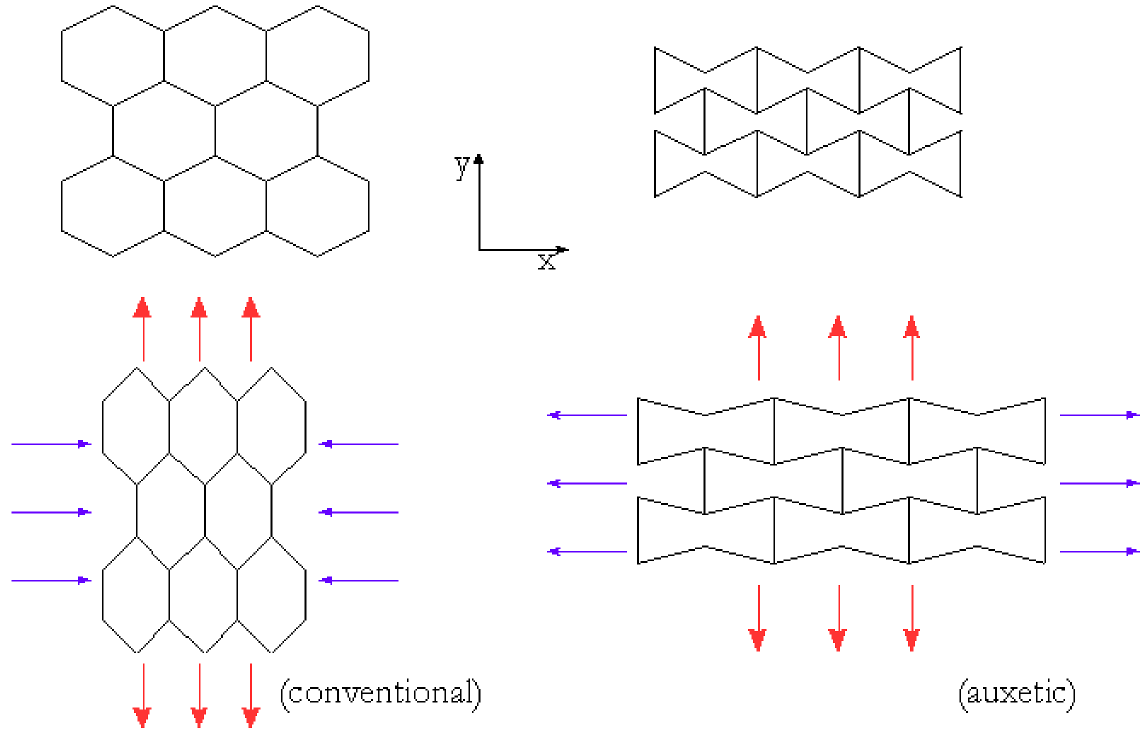
$$\approx xy(\Delta z) + x(\Delta y)z + (\Delta x)yz$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} \quad = \frac{\Delta x}{x}(1-2\nu)$$

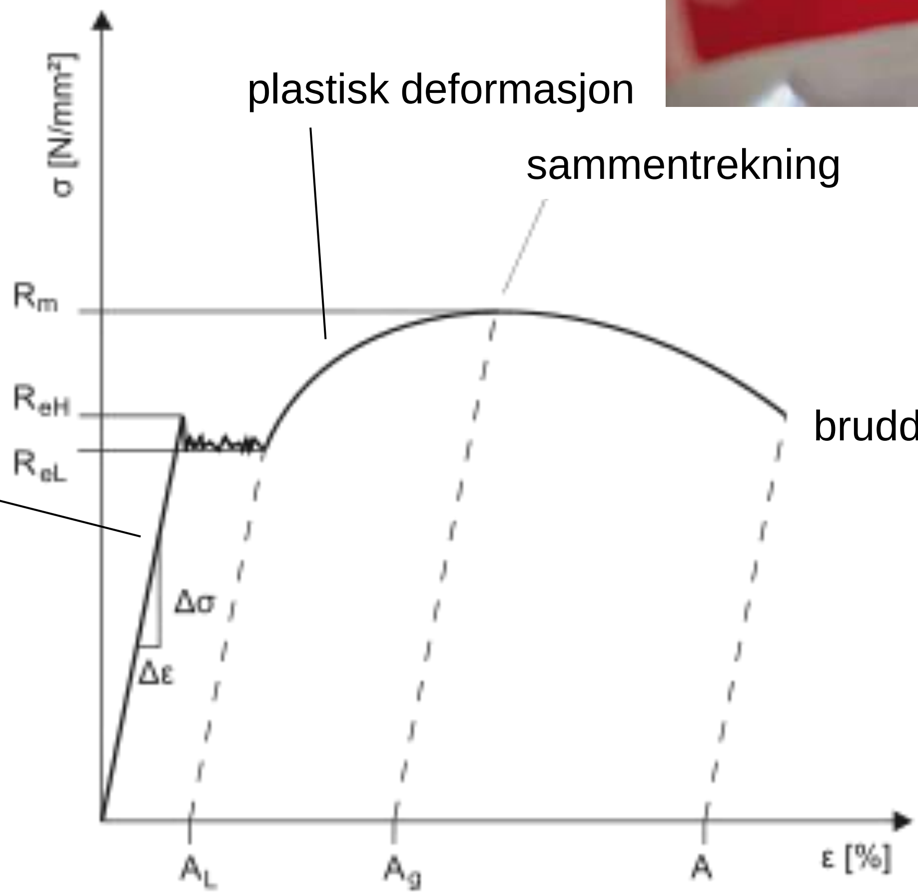
$\nu = 0.5$ volum er konstant

$\nu = 0.2 \ldots 0.3$ for de fleste materialer

noen materialer har
negativ Poissons tall



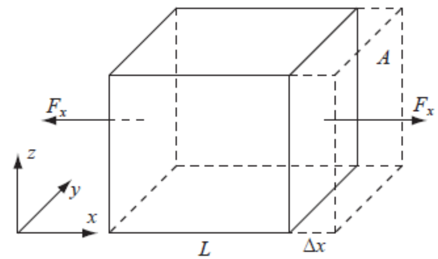
Spennings-tøyningskurve



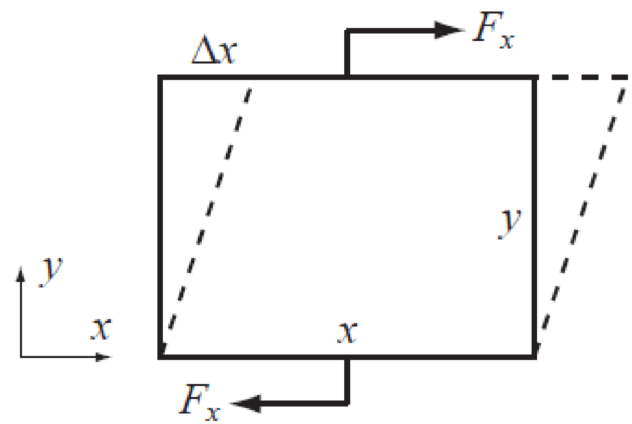
Hookes lov:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Skjærdeformasjon



normalspenning: $$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\,\frac{\Delta x}{x}$$



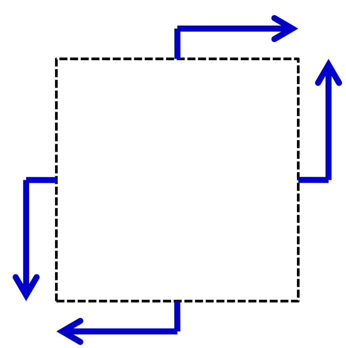
skjærspenning: $$\sigma_{xy} = \frac{F_x}{A_y} = G\,\frac{\Delta x}{y}$$

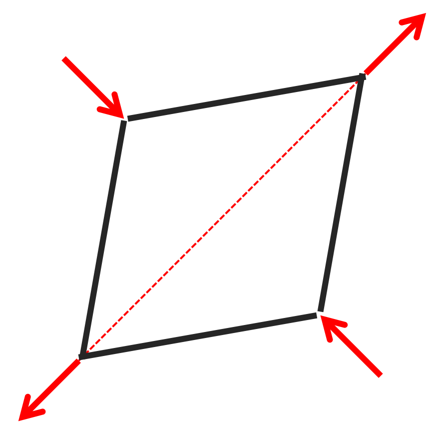
G: skjærmodul

skjærmodulen G er relatert til elastisitetsmodulen E og tverrkontraksjonstallet ν

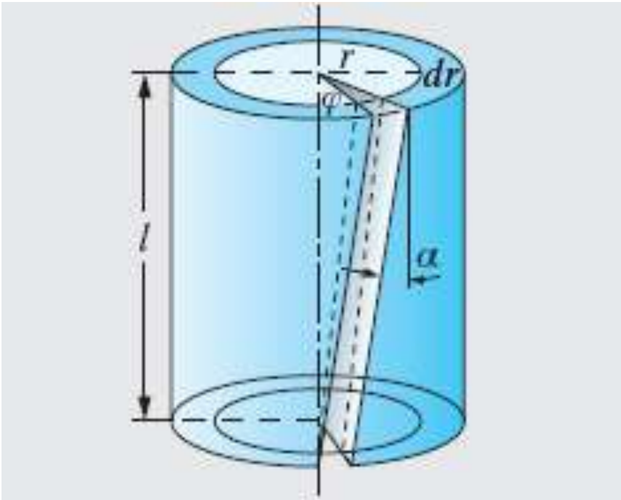
for isotrope materialer:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



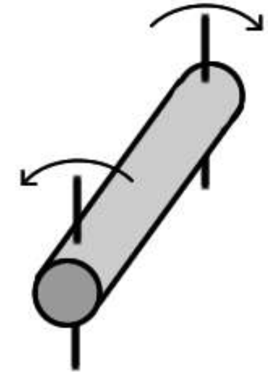


Vridning



to motsatte kraftmomenter vrir
en tråd om en vinkel ϕ

vi tenker oss en tynn sylinderskall



$$\alpha = \frac{r\varphi}{l}$$

skjærspenning: $\sigma = G\alpha = G\frac{r\varphi}{l}$ skjærmodul G

skjærkraft: $dF = \sigma\, dA = \sigma\, 2\pi r dr$

kraftmoment: $dT = r dF = rG\frac{r\varphi}{l}2\pi r dr = \frac{2\pi G\varphi}{l}r^3 dr$

over hele sylinderen: $T = \frac{2\pi G\varphi}{l}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G R^4 \varphi}{2l}$

torsjonsmodul $D_r = \frac{T}{\varphi} = \frac{\pi G R^4}{2l}$