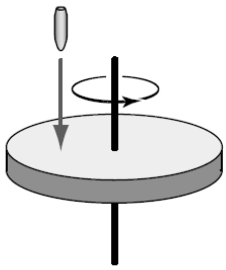
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: 7 juni 2016
Tid for eksamen: 14:30 – 18:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 3 sider
Vedlegg: Formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å forklare hvordan du løser problemene og begrunn svarene dine.

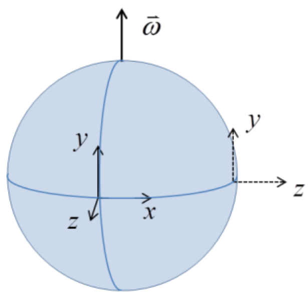
Oppgave 1 (5 poeng)



En massiv sirkulær treskive roterer friksjonsløst med vinkelhastighet ω om en fast vertikal akse som går gjennom massesenteret langs symmetriaksen. Et prosjektil som skytes inn parallelt med rotasjonsaksen treffer skiven i en avstand d fra rotasjonsaksen og blir sittende fast i skiven. Vil vinkelhastigheten til skiven endre seg ved denne prosessen? Begrunn svaret!

Spinnet omkring aksen for systemet som består av skiven og kulen vil bevares siden kraftmomentet i sammenstøtet er null i forhold til aksen. Det betyr at ω vil avta litt etter sammenstøtet siden prosjektilet, som opprinnelig ikke hadde noe spinn i forhold til aksen, nå vil få et spinn siden det blir sittende fast i skiven. Da må vinkelhastigheten til selve skiven gå litt ned for at spinnet til skiven skal avta like mye som spinnet til prosjektilet øker, for at totalspinnet om aksen skal være uforandret.

Oppgave 2 (5 poeng)



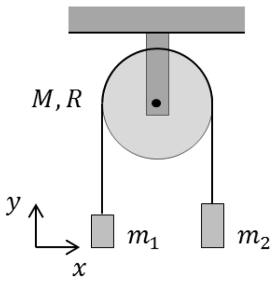
Du står på en høy bygning i Singapore (som ligger i nærheten av ekvatoren). Du er så uheldig å miste telefonen din over kanten av bygningen. Mens den faller ned til bakken virker Corioliskraften $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ på telefonen, hvor $\vec{\omega}$ er jordens vinkelhastighet. Finn retningen til Corioliskraften. Du kan anta at telefonen beveger seg bare i vertikal retning. Vil telefonen lande nord, øst, sør eller vest fra posisjonen der du mistet den? Begrunn svaret!

Vi bruker koordinatsystemet som er vist i figuren med x aksen mot øst, y aksen mot nord og z aksen vertikalt opp. Rotasjonsaksen er i retning nord: $\vec{\omega} = \omega\hat{j}$, mens telefonen faller i negativ z retning: $\vec{v} = -v\hat{k}$. Corioliskraften er:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = -2m\omega\hat{j} \times \left(-v\hat{k}\right) = 2m\omega v\hat{\imath}$$

Corioliskraften virker i retning øst og telefonen lander øst fra punktet der du droppet den.

Oppgave 3 (6 poeng)



To lodder med masse $m_1 = m$ og $m_2 = 2m$ er knyttet sammen med en masseløs snor som går over et hjul med masse $M = 2m$ og radius R. Hjulet kan rotere om en stasjonær akse uten friksjon, og treghetsmomentet er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Opprinnelig er loddene i ro på samme høyde $y = 0$. Når du slipper loddene fri synker m_2 ned mens m_1 går opp uten at snoren sklir over hjulet. Finn hastigheten til loddene som funksjon av den vertikale posisjonen. Du kan se bort fra luftmotstanden.

Uten friksjon og luftmotstand er det bare gravitasjon som virker og den mekaniske energien i systemet er bevart. Med definisjon av koordinatsystemet som vist i figuren er den potensielle energien til loddene i begynnelsen null. Etterhvert får m_1 positiv og m_2 negativ potensiell energi, og begge to får kinetisk energi. Trinsen befinner seg ved høyde h og har potensiell energi som er konstant siden massesenteret til trinsen beveger seg ikke, men trinsen får kinetisk rotasjonsenergi. Vi setter opp en ligning for energibevaring:

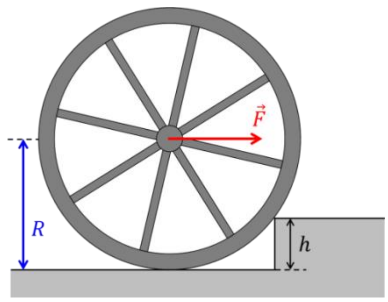
$$Mgh = m_1gy - m_2gy + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + Mgh + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Loddet m_1 går like mye opp som m_2 går ned med samme hastighet v. Siden snoren ikke sklir over trinsen vet vi at et punkt på overflaten til trinsen beveger seg med samme fart v som snoren, og vi finner en relasjon mellom vinkelhastighet og hastighet til snoren: $\omega = \frac{v}{R}$. Vi setter inn massene:

$$0 = mgy - 2mgy + \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} = -mgy + 2mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}gy}$$

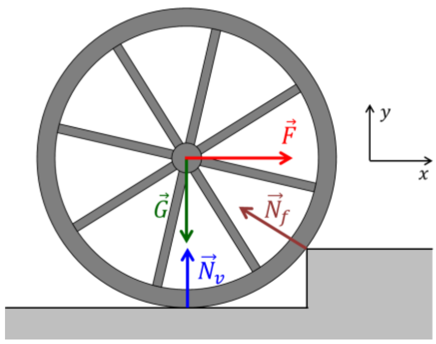
Oppgave 4 (11 poeng)



Du prøver å dra et sykkelhjul med masse m og radius R opp en fortauskant av høyde h. For å gjøre dette bruker du en horisontal kraft F som virker på aksen i sentrum av hjulet.

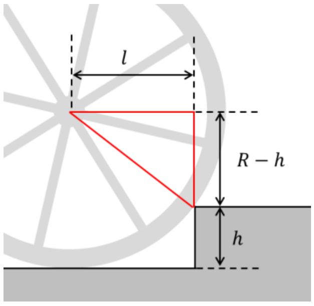
a. Tegn et frilegemediagram av hjulet og navngi alle krefter. (3 poeng)

Det virker 4 krefter: Gravitasjon G horisontalt på aksen, den horisontale kraften F som brukes for å dra hjulet, en normalkraft N_v fra veien og en kontaktkraft N_f fra fortauskanten.



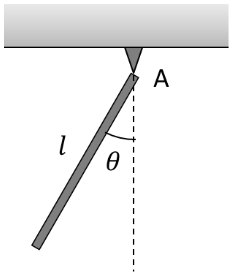
b. Forklar kvalitativt hvordan de andre kreftene endres når du øker kraften F, men før hjulet kommer opp på fortauskanten. (3 poeng)
Så lenge hjulet ikke kommer opp på fortauet er hjulet i likevekt og summen over alle krefter og kraftmomenter er null. Hvis vi øker den horisontale kraften F, så øker kraften fra fortauskanten N_f mens normalkraften fra veien N_v minker. Hjulet mister kontakten med veien når N_v blir null.

c. Hva er den minste kraften F som kreves for å dra hjulet opp på fortauskanten når radius av hjulet er $R = 20$ cm og høyden på fortauskanten er $h = 8$ cm? Uttrykk svaret som en funksjon av massen m og tyngdeakselerasjonen g. (5 poeng)
For å finne betingelsen for at hjulet kommer opp på fortauskanten ser vi på netto kraftmomentet om kontaktpunktet med kanten. Kraftarmen til kraften F om kanten er $R - h = 12$ cm. Kraftarmen til gravitasjonskraften finner vi ved hjelp av Pythagoras: $l = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = 16$ cm. For å få et negativ kraftmoment (med klokken) trenger vi at:



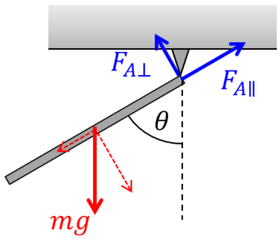
$$F(R-h) > mgl$$
$$F > \frac{l}{R-h}mg = \frac{4}{3}mg$$

Oppgave 5 (20 poeng):
En tynn homogen stang med masse m og lengde l er opphengt i A som vist på figuren. Vinkelen θ måles mellom stangen og vertikalen. Vi antar at det virker ingen friksjon eller luftmotstand. Tyngdens akselerasjon er g. Treghetsmomentet til en stang som roterer om sitt massesenter er $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$. Bevegelsen starter med at stangen slippes fra ro i horisontal stilling.



a. Finn treghetsmomentet til stangen om dreieaksen i A. (3 poeng)
Vi bruker parallellakseteoremet:
$$I_A = I_{cm} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

b. Tegn et frilegemediagram for stangen og navngi alle krefter. (3 poeng)
Uten friksjon og luftmotstand virker det to krefter: gravitasjonskraften $G = mg$ og en kontaktkraft i hengselet F_A som vi deler i en parallell og en normal komponent.



c. Finn vinkelakselerasjonen som funksjon av vinkelen θ. (4poeng)
Vi bruker spinnsatsen om opphengningspunkt A:
$$\tau = I_A\alpha$$
Kraftarmen vinkelrett på gravitasjonskraften er $\frac{l}{2}\sin\theta$.
$$\alpha = \frac{\tau}{I_A} = \frac{mg\frac{l}{2}\sin\theta}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta$$

d. Vis at vinkelhastigheten som funksjon av θ er: (4 poeng)

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\cos\theta}{l}}$$

Siden vi ikke kjenner vinkelen $\theta(t)$ som funksjon av tiden kan vi ikke finne vinkelhastigheten ved integrasjon av vinkelakselerasjonen. I stedet bruker vi energibetraktninger. Siden det er ingen friksjon eller luftmotstand kan vi bruke energibevaring. Vi setter nullpunktet til den potensielle energien i hengselet.

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2 - mg\frac{l}{2}\cos\theta = 0$$

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\cos\theta}{l}}$$

e. Finn, som funksjon av θ, kraften som virker på stangen i opphengningspunktet. Det er hensiktsmessig å dele kraften i en komponent langs stangen og en komponent normalt på stangen. (6 poeng)

Vi finner først kraftkomponenten som er parallell med stangen. Massesenteret til stangen beveger seg på en sirkelbane. Vi bruker Newtons andre lov og at nettokraften er lik sentripetalkraften mot hengselet:

$$F_{A\parallel} - mg\cos\theta = m\omega^2\frac{l}{2}$$

Siden vi kjenner vinkelhastigheten fra d) kan vi sette inn:

$$F_{A\parallel} = mg\cos\theta + m\frac{3g\cos\theta}{l}\frac{l}{2} = \frac{5}{2}mg\cos\theta$$

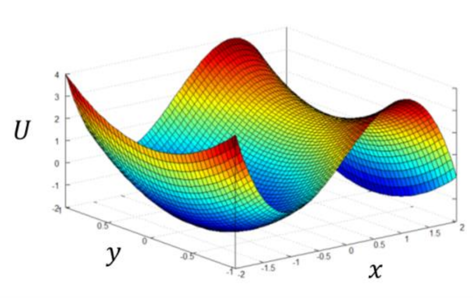
For å finne kraftkomponenten $F_{A\perp}$ som står vinkelrett på stangen kan vi bruker spinnsatsen om massesenteret. Vinkelakselerasjonen om massesenteret er den samme som vinkelakselerasjonen om hengselet som vi fant i c).

$$\tau_{cm} = F_{A\perp}\frac{l}{2} = I_{cm}\alpha = \frac{1}{12}ml^2\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta = \frac{1}{8}mgl\sin\theta$$

$$F_{A\perp} = \frac{1}{4}mg\sin\theta$$

Oppgave 6 (15 poeng)

Bevegelsen til en partikkel i xy planet kan beskrives ved potensialfunksjonen $U(x,y) = 3x - x^3 + 2y^2$. Potensialet er plottet i figuren.



a. Finn kraften som virker på partikkelen i posisjon $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$. Uttrykk kraften som en vektor med komponenter i x og y retning. (3 poeng)

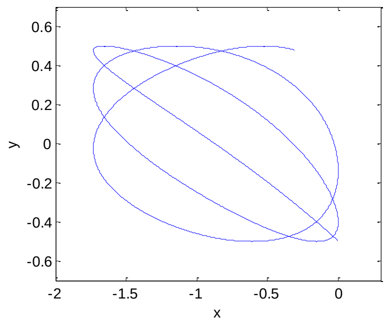
Vi finner kraften ved å ta gradienten til potensialet:

$$\vec{F} = -\nabla U(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} = (3x^2 - 3)\hat{\imath} - 4y\hat{\jmath}$$

b. Finn likevektspunktene. Er de stabile? (3 poeng)
I likevektspunktene er nettokraften null. Ligningen $\vec{F} = 0$ har to løsninger for $x = \pm 1$ og $y = 0$. Vi finner likevektspunktene $\vec{r}_1 = \hat{\imath}$ og $\vec{r}_2 = -\hat{\imath}$. Fra figuren ser vi at $\vec{r}_1$ er et sadelpunkt som er et ustabilt likevektspunkt fordi partikkelen vil beveger seg langt bort ved en liten forstyrelse. Punkt $\vec{r}_2$ derimot er et minimumspunkt og derfor et stabilt likevektspunkt.

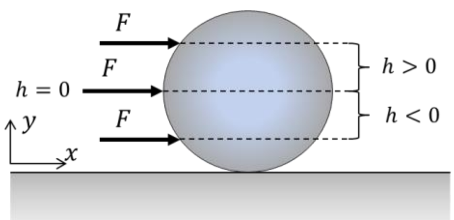
c. Partikkelen starter i ro fra posisjon $\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}$. Skriv et program som beregner posisjon til partikkelen som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (5 poeng)

```
for (i=1:n-1)
    F = [(3*r(i,1)^2-3) -4*r(i,2)];
    a = F/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```



d. Du kjører programmet for en partikkel som starter ved posisjon $\vec{r}_0 = -0.5\hat{\jmath}$ og du plotter posisjonen i xy planet som funksjon av tiden. Du får resultatet som er vist i figuren. Tolk resultatet og beskriv bevegelsen til partikkelen. (4 poeng)
Partikkelen beveger seg mot minimumspunktet i potensialet ved $\vec{r} = -\hat{\imath}$ hvor hastigheten er maksimal. Partikkelen fortsetter bevegelsen og «klatrer opp potensialfjellet» på den andre siden av senkningen. Siden potensialet ikke er symmetrisk beveger partikkelen seg tilbake på en annen vei. I det høyeste punktet på den andre siden har partikkelen en liten hastighetskomponent vinkelrett på kraften, slik at denne gangen går partikkelen rundt minimumspunktet og ikke gjennom. Dette fortsetter og partikkelen sirkler i potensialsenkningen mens den svinger opp og ned fra side til side.

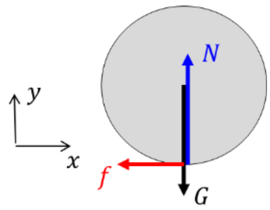
Oppgave 7 (28 poeng):



En biljardkule av masse m og radius R ligger i ro på et horisontalt bord. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kulen og overflaten på bordet er μ_d. Tyngdeakselerasjonen er g. Treghetsmoment til kulen er $I = \frac{2}{5}mR^2$. Du støter kulen med en konstant horisontal kraft F på en høyde h som måles i forhold til midten av kulen, som vist på figuren. Vi definerer positiv vinkelhastighet (om z-aksen) i retning mot klokken og positiv hastighet mot høyre i x-retningen.
Først analyserer vi bevegelsen etter støtet og vi antar at vi kjenner initialbetingelsene til bevegelsen. Vi ser på tilfellet hvor du treffer kulen i midten på høyden $h = 0$, slik at kulen får en translatorisk initialhastighet v_0, men ingen initialvinkelhastighet, $\omega_0 = 0$. Vi ignorerer luftmotstanden.

a. Tegn et frilegemediagram for ballen umiddelbart etter støtet (slik at kraften F ikke lenger virker) og uttrykk alle kreftene som en funksjon av m, g og μ_d. (3 poeng)

Gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{\jmath}$. Normalkraft fra bordet: $\vec{N}$. Det er ingen bevegelse i vertikal retning. Fra Newtons andre lov får vi at: $\vec{N} = -\vec{G} = mg\hat{\jmath}$. Ved støtet på høyden $h = 0$ får kontaktpunktet mellom kulen og bordet hastighet i x retning. Friksjon virker i motsatt retning: $\vec{f} = -\mu_d N\hat{\imath} = -\mu_d mg\hat{\imath}$



b. Finn uttrykker for translatorisk akselerasjon og vinkelakselerasjon til kulen etter støtet. Hvor lenge er disse uttrykkene gyldig? (4 poeng)

Vi får akselerasjon fra Newtons andre lov: $\sum \vec{F} = \vec{f} = -\mu_d mg\hat{\imath} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = -\mu_d g\hat{\imath}$$

Vi får vinkelakselerasjonen fra spinnsatsen: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

Gravitasjonen angriper i massesenteret og gir ingen kraftmoment. Normalkraften er parallell med kraftarmen og gir ingen kraftmoment heller. Den eneste kraften som gir et kraftmoment om massesenteret er friksjonskraften.

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{-R\hat{\jmath} \times (-\mu_d mg\hat{\imath})}{\frac{2}{5}mR^2} = -\frac{5}{2}\frac{\mu_d g}{R}\hat{k}$$

Uttrykkene for akselerasjon og vinkelakselerasjon er bare gyldig så lenge det er friksjon, det vil si så lenge kulen sklir. Når kulen begynner å rulle uten å skli er både akselerasjon og vinkelakselerasjon null.

c. Finn hastigheten, $v(t)$, og vinkelhastigheten, $\omega(t)$, som funksjon av tiden for kulen fram til tidspunktet når den begynner å rulle uten å skli. Beskriv bevegelsen til kulen. (4 poeng)

Vi har en bevegelse med konstant akselerasjon og konstant vinkelakselerasjon. Kulen har initialhastighet v_0 og ingen initialvinkelhastighet, $\omega_0 = 0$. Vi integrerer og får:

$$v(t) = v_0 - \mu_d gt$$

$$\omega(t) = -\frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R}t$$

Rett etter støtet sklir kulen uten å rotere. Friksjonskraften bremser linearbevegelsen og gir samtidig et kraftmoment som resulterer i en vinkelakselerasjon med klokken. Over tid sklir kulen mindre og roterer raskere. På et viss tidspunkt er rullebetingelsen oppfylt og kulen ruller uten å skli etterhvert. Når kulen bare ruller virker det ikke lenger friksjon, slik at kulen fortsetter å rulle med konstant vinkelhastighet.

d. Finn tidspunktet t_r når kulen begynner å rulle uten å skli. (4 poeng)

Vi finner tidspunktet ut fra rullebetingelsen: $v(t_r) = -R\omega(t_r)$

$$v_0 - \mu_d g t_r = \frac{5}{2}\mu_d g t_r$$

$$v_0 = \frac{7}{2}\mu_d g t_r$$

$$t_r = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_d g}$$

Vi ser nå nærmere på kollisjonen mellom køen og kulen som resulterer i en initialhastighet v_0 og en initialvinkelhastighet ω_0. Køen støter kulen på høyden h i forhold til sentrum. Vi antar at kraften F er konstant og virker i løpet av en kort tid Δt. Alle andre krefter kan neglisjeres i løpet av den korte perioden Δt.

e. Finn et uttrykk for translatorisk akselerasjon og vinkelakselerasjon til ballen under støtet med køen som en funksjon av massen m, kraften F, radiusen R og høyden h. (3 poeng)

Vi finner akselerasjon ut fra Newtons andre lov:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

Vi bruker spinnsatsen for å finne vinkelakselerasjonen:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{h\hat{j} \times F\hat{\imath}}{\frac{2}{5}mR^2} = -\frac{hF\hat{k}}{\frac{2}{5}mR^2} = -\frac{5}{2}\frac{hF}{mR^2}\hat{k}$$

f. Finn et uttrykk for hastigheten v_0 og vinkelhastigheten ω_0 umiddelbart etter støtet som en funksjon av varigheten Δt, og vis at sammenheng mellom hastighet og vinkelhastighet er: (4 poeng)

$$\omega_0 = -\frac{5}{2}\frac{h}{R^2}v_0$$

Vi har også her en bevegelse med konstant akselerasjon og konstant vinkelakselerasjon. Vi finner hastigheten og vinkelhastigheten ved integrasjon:

$$v_0 = \frac{F}{m}\Delta t$$

$$\omega_0 = -\frac{5}{2}\frac{hF}{mR^2}\Delta t$$

Vi eliminerer tidsintervallet Δt:

$$\omega_0 = -\frac{5}{2}\frac{hF}{mR^2}\frac{m}{F}v_0 = -\frac{5}{2}\frac{h}{R^2}v_0$$

g. Hvis du ønsker å støte kulen slik at den ruller uten å skli helt fra starten, i hvilken høyde h_r bør du treffe kulen? (3 poeng)

For at kulen ruller uten å skli helt fra starten må initialhastighet v_0 og initialvinkelhastighet $\omega_0$oppfylle rullebetingelsen: $v_0 = -R\omega_0$. Vi setter inn resultatet fra den forrige oppgaven:

$$\omega_0 = -\frac{5}{2}\frac{h_r}{R^2}v_0 = \frac{5}{2}\frac{h_r}{R}\omega_0$$

$$h_r = \frac{2}{5}R$$

h. Hvilken retning har friksjonskraften hvis du støter kulen ved høyde $h > h_r$? Beskriv bevegelsen til kulen i dette tilfellet. (3 poeng)

I dette tilfellet får kulen en stor negativ vinkelhastighet (i retning med klokken) som er større enn i betingelsen for å rulle uten å skli. Det betyr at punktet på kulen som er i kontakt med bordet sklir mot venstre i negativ x retning relativ til bordet. Friksjonskraften virker i motsatt retning til høyre (i positiv x retning). Kulen vil i begynnelsen rotere rask uten stor lineærhastighet. Friksjonskraften bremser rotasjonsbevegelsen og samtidig akselererer massesenteret til høyre. Når rullebetingelsen er oppfylt fortsetter kulen å rulle uten å skli uten at det virker en friksjonskraft lenger.

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!