

Differensialligninger i FYS1100

Joakim Bergli (oppdatering vår 2023 og 2024, Ann-Cecilie Larsen)

February 8, 2024

Her er en oversikt over de forskjellige typene differensialligninger vi vil se på i FYS1100, med eksempler på hvordan vi løser dem. Det står også mye i kapittel 10 i Kalkulus-boka til Tom Lindstrøm (MAT1100), og studieboka er også nyttig. Videre har matematikk.net en veldig fin introduksjon til differensialligninger, se [“Introduksjon til differensiallikninger”](#).

NB! Ofte brukes notasjonen $y'(x)$ for $\frac{dy}{dx}$ og $y''(x)$ for $\frac{d^2y}{dx^2}$ i matematikk-bøker og -tekster. Det gjør vi ikke her i dette fysikk-kurset, vi bruker kun “merket” for å skille mellom variablene vi integrerer over, og for referansesystemer i spesiell relativitetsteori. For enkelhets skyld forkorter vi også “differensialligninger” til “diff-ligninger”.

1 Separable diff-ligninger

1.1 Løsningsstrategi

En diff-ligning for funksjonen $x(t)$ er separabel hvis den kan skrives på formen

$$q(x) \frac{dx}{dt} = p(t),$$

der $q(x)$ og $p(t)$ er vilkårlige funksjoner. Den kan da løses ved å integrere begge sider med hensyn på t , og bruke substitusjon på venstre side:

$$\int q(x) dx = \int p(t) dt.$$

Hvis begge disse integralene lar seg løse, får vi

$$Q(x) = P(t) + C$$

der $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$, og C er en integrasjonskonstant som må bestemmes fra initialbetingelsen $x(t_0) = x_0$. Denne ligningen må løses hvis vi skal ha et eksplisitt uttrykk for $x(t)$.

Integrasjonskonstanten C finner vi ved å sette inn for initialbetingelsen $x(t_0) = x_0$:

$$C = Q(x_0) - P(t_0).$$

Setter vi dette inn i løsninga har vi

$$Q(x) = P(t) + Q(x_0) - P(t_0),$$

eller

$$Q(x) - Q(x_0) = P(t) - P(t_0).$$

Vi ser at dette er lik

$$\int_{x_0}^x q(x') dx' = \int_{t_0}^t p(t') dt'.$$

Ofte vil vi derfor bruke disse bestemte integralene direkte og initialbetingelsen er allerede tatt hensyn til.

1.2 Eksempel: Fall med luftmotstand

Vi ser først på det enkleste tilfellet der størrelsen på luftmotstanden er gitt ved $F_D = kv$. Vi tenker at vi starter med å slippe en gjenstand fra ro slik at den faller vertikalt nedover, og størrelsen på tyngdekraften er gitt ved $G = mg$. Vi velger origo der den slippes fra og positiv retning nedover. Newtons andre lov gir da

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Dermed er

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \quad (1)$$

Vi definerer de dimensjonsløse variablene

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau} \quad \bar{v} = \frac{v}{v_T},$$

hvor τ representerer en naturlig (også kalt karakteristisk) tidsskala for det gitte systemet, og v_T er (den konstante) terminalfarten som oppnås når luftmotstanden er like stor som tyngdekraften. Uttrykt i disse variablene blir ligning (1)

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = 1 - \bar{v}. \quad (2)$$

Vi løser den ved å omforme til

$$\frac{1}{1 - \bar{v}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = 1$$

og så integrere begge sider med hensyn på $\bar{t}$:

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{1 - \bar{v}'} \frac{d\bar{v}'}{d\bar{t}'} d\bar{t}' = \int_0^{\bar{t}} d\bar{t}'.$$

Her har vi byttet navnet på variabelen $\bar{t}$ til $\bar{t}'$ inne i integralet og definert $\bar{v}' = \bar{v}(\bar{t}')$. I integralet på venstre side gjør vi så integrasjon ved substitusjon, og skifter integrasjonsvariabelen til $\bar{v}'$:

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{1 - \bar{v}'} \frac{d\bar{v}'}{d\bar{t}'} d\bar{t}' = \int_0^{\bar{v}} \frac{1}{1 - \bar{v}'} d\bar{v}' = [-\ln |1 - \bar{v}'|]_0^{\bar{v}} = -\ln |1 - \bar{v}|.$$

Dermed har vi at

$$-\ln |1 - \bar{v}| = \bar{t}$$

som gir

$$\bar{v} = 1 - e^{-\bar{t}}.$$

2 Første ordens lineære differensialligninger med integrerende faktor

2.1 Løsningsstrategi

Dette er ligninger på formen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (3)$$

Vi ganger begge sider med $e^{\int p(x)dx}$ og får

$$\frac{dy}{dx} e^{\int p(x)dx} + p(x)y e^{\int p(x)dx} = q(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Vi kan se at venstre side er den deriverte av et produkt:

$$\frac{d}{dx} \left[y e^{\int p(x)dx} \right] = q(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Dermed kan vi integrere og få

$$y e^{\int p(x)dx} = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$$

der C er en integrasjonskonstant som må bestemmes av initialbetingelsen.

2.2 Eksempel: Sand i jernbanevogn

Dette er en utvidelse av eksempel 12.7.1 i læreboka til Anders Malthe-Sørensen. En jernbanevogn beveger seg rett fram mens det lastes sand oppi. Sanda faller ned med en konstant rate $R = \frac{dm}{dt}$ samtidig som den trekkes med en kraft F . I eksempelet i boka er det funnet hvor stor F må være for at farta skal være konstant. Vi kan utvide oppgaven og finne farta som funksjon av tiden for en kraft som ikke nødvendigvis gir konstant fart. Vi har da rakettligningen (ligning (12.132) i læreboka) gitt ved:

$$F = Rv + m \frac{dv}{dt}.$$

Her varierer massen som funksjon av tid og er gitt ved $m = m(t) = m_0 + Rt$. Vi kan skrive om denne ligningen som

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}.$$

Så lenge F er konstant, er denne ligningen også separabel (du kan prøve å løse den ved separasjon). Vi skal bare se på dette tilfellet, men metoden med integrerende faktor vil også virke for en kraft som varierer med tid. Denne ligningen er på formen til ligning (3) med $p(t) = \frac{R}{m(t)}$. Vi må regne ut

$$\int p(t)dt = \int \frac{R}{m_0 + Rt} dt = \ln |m_0 + Rt|.$$

Den integrerende faktoren vi må gange med er

$$e^{\int p(t)dt} = m_0 + Rt.$$

Det gir

$$(m_0 + Rt) \frac{dv}{dt} + Rv = F,$$

som vi ser er lik

$$\frac{d}{dt} [(m_0 + Rt)v] = F.$$

Dermed er

$$(m_0 + Rt)v = \int F dt = Ft + C.$$

Hvis initialbetingelsen er $v(0) = v_0$, er $C = m_0 v_0$. Dermed får vi

$$v(t) = \frac{Ft + m_0 v_0}{Rt + m_0}.$$

For å sjekke om dette virker rimelig, kan vi se at det gir riktig enhet (m/s). Vi kan også sjekke at $v(0) = \frac{m_0 v_0}{m_0} = v_0$ som det skal. Vi kan også se hva som skjer etter lang tid, $t \rightarrow \infty$. Da vil konstantleddene i teller og nevner være ubetydelige, og vi har

$$v(t) \approx \frac{Ft}{Rt} = \frac{F}{R}.$$

Dette er nettopp den konstante farta i eksempel 12.7.1.

3 2. ordens homogene lineære ligninger med konstante koeffisienter

3.1 Løsningsstrategi

Vi ser på ligninger på formen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = 0$$

Her er p og q konstanter (ikke funksjoner av t). Disse ligningene har løsninger på formen $x = e^{\lambda t}$, og vi tipper dette og setter det inn i ligningen. Vi får da *den karakteristiske ligningen*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

som har to røtter λ_1 og λ_2 . Den generelle løsningen er da

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Konstantene A og B bestemmes av initialbetingelsene.

3.2 Eksempel: Harmonisk oscillator

En harmonisk oscillator er et system beskrevet av ligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x.$$

Her er ω_0 *egenfrekvensen* (den naturlige frekvensen) til systemet. Eksempler på fysiske systemer er et lodd i ei fjær eller en pendel med lite utslag. Vi løser den ved å tippe $x = e^{\lambda t}$, setter inn og får

$$\lambda^2 = -\omega_0^2$$

som betyr at $\lambda = \pm i\omega_0$. Den generelle løsningen er da

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}.$$

For å bestemme A og B trenger vi initialbetingelser. Det vanligste er å tenke at vi har trukket x bort fra nullpunktet, holder systemet i ro og så slipper det. Da er $x(0) = x_0$ og $\frac{dx(0)}{dt} = 0$. I dette tilfellet får vi

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = x_0 \\ \frac{dx(0)}{dt} &= A - B = 0, \end{aligned}$$

som vi kan løse og vi finner

$$A = B = \frac{x_0}{2}.$$

Løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene er da gitt ved

$$x(t) = \frac{x_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

En annen vanlig variant er hvis vi har en eller annen form for lineær dempning, f.eks. luftmotstand proporsjonal med farta. Da må vi legge til et ledd i ligningen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x. \quad (4)$$

Vi setter inn $x = e^{\lambda t}$ og får

$$\lambda^2 + k\lambda + \omega_0^2 = 0$$

med løsningene

$$\lambda_{\pm} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{k}{2} \pm i\Omega,$$

med $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4}}$. Dette gir den generelle løsningen

$$x(t) = (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) e^{-\frac{k}{2}t}. \quad (5)$$

Hvis dempningen er liten ($k/2 < \omega$) er Ω reell, og vi får svingninger med avtagende utslag (amplitude). Hvis $k/2 > \omega$ er Ω imaginær, og vi får bare en eksponensielt avtagende funksjon (dette kalles ofte et overdempet system).

4 2. ordens inhomogene lineære ligninger med konstante koeffisienter

Dette vil vi ikke jobbe mye med, og vi forventer ikke at dere kan løse slike ligninger. Det viktige her er at dere forstår hva ligningene betyr og at dere kan avgjøre om en gitt funksjon er en løsning av ligningen eller ikke (dvs. sette inn og se om den passer).

4.1 Løsningsstrategi

Vi har en ligning på formen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t),$$

der $f(t)$ er en gitt funksjon som ofte vil representere en ytre tidsavhengig kraft som virker på systemet. Strategien her er først å finne den generelle løsningen $x_h(t)$ til den tilsvarende homogene ligningen (der $f(t) = 0$) med metoden beskrevet i avsnitt 3. Så må vi finne en enkelt (partikulær) løsning $x_p(t)$ av den inhomogene ligningen. Til slutt kan vi finne en generell løsning av den inhomogene ligningen ved å legge sammen de to løsningene:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Det å finne den partikulære løsningen er ofte ikke så lett, men for endel vanlige inhomogene ledd, $f(t)$, er det ofte vellykket å tippe en partikulær løsning på samme form som $f(t)$.

4.2 Eksempel: Harmonisk oscillator med ytre kraft. Resonans.

Vi baserer oss på ligning (4), men legger til en ytre periodisk kraft:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = F_0 \cos \omega t.$$

Her er ω frekvensen til den ytre krafta, mens ω_0 er egenfrekvensen til oscillatoren, og F_0 er styrken til den ytre krafta. Løsningen av den homogene ligningen har vi allerede funnet, se ligning (5):

$$x_h(t) = (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t})e^{-\frac{k}{2}t}.$$

Vi tipper en partikulær løsning av samme form som $f(t)$, og setter inn $x = C \cos \omega t + D \sin \omega t$ (i dette tilfellet trenger vi *både* sinus og cosinus siden den deriverte av den ene gir den andre). Da får vi:

$$-C\omega^2 \cos \omega t - D\omega^2 \sin \omega t - kC\omega \sin \omega t + kD\omega \cos \omega t + C\omega_0^2 \cos \omega t + D\omega_0^2 \sin \omega t = F_0 \cos \omega t,$$

som vi skriver om til

$$(-C\omega^2 + kD\omega + C\omega_0^2) \cos \omega t + (-D\omega^2 - kC\omega + D\omega_0^2) \sin \omega t = F_0 \cos \omega t.$$

Denne ligningen skal gjelde for alle t , og dermed må koeffisientene foran $\cos \omega t$ og $\sin \omega t$ være like på begge sider. Det gir to ligninger:

$$\begin{aligned} -C\omega^2 + kD\omega + C\omega_0^2 &= F_0 \\ -D\omega^2 - kC\omega + D\omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

som vi løser og finner

$$\begin{aligned} C &= \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (k\omega)^2} \\ D &= \frac{F_0k\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (k\omega)^2} \end{aligned}$$

Hvis vi nå definerer

$$\cos \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (k\omega)^2}$$

$$\sin \phi = \frac{k\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (k\omega)^2}$$

(normalt kan vi ikke definere sinus og cosinus uavhengig av hverandre, men vi ser av uttrykkene at de tilfredsstiller $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, så de to ligningene er konsistente) kan vi skrive

$$x_p(t) = F_0 \cos \omega t \cos \phi + F_0 \sin \omega t \sin \phi = F_0 \cos(\omega t - \phi).$$

Dermed er den generelle løsningen

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) e^{-\frac{k}{2}t} + F_0 \cos(\omega t - \phi).$$

Igjen må A og B bestemmes fra initialbetingelser.

5 Ligninger av typen $\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$

Dette beskriver bevegelse uten demping med en posisjonsavhengig kraft $F(x)$ (vi setter massen lik 1 kg for å forenkle notasjonen).

5.1 Løsningsstrategi

Det er to måter å starte på, en fysisk og en matematisk.

5.1.1 Fysisk metode

Vi vet at energien er bevart så lenge krafta ikke er avhengig av farta (gjelder i en dimensjon). Vi velger initialbetingelsene $x(0) = x_0$, $\frac{dx(0)}{dt} = 0$ og nullpunktet til den potensielle energien i startpunktet x_0 . Den potensielle energien er da

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx'$$

og energibevaring gir at

$$0 = K_0 + U_0 = K + U = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x),$$

og dermed

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{-2U(x)}.$$

Denne ligningen er separabel, og vi har

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{-2U(x')}} = \int_0^t dt' = t.$$

Hvis vi kan regne ut dette integralet finner vi løsningen til diffiligningen.

5.1.2 Matematisk metode

Vi ganger begge sider av ligningen med $\frac{dx}{dt}$ og får

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} F(x).$$

Vi integrerer begge sider:

$$\int_0^t \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = \int_0^t \frac{dx}{dt} F(x).$$

Her har vi brukt initialbetingelsen $\frac{dx(0)}{dt} = 0$. Vi får:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -U(x),$$

som er den samme ligningen som vi fant over.

5.2 Eksempel: Pendelligningen

Dette eksempelet er mer avansert enn det vi venter at dere skal klare å gjøre selv. Det viser hvordan vi kan bruke det dere har lært til å finne hvordan svingetiden til en pendel avhenger av hvor stort utslag vi gir den før vi slipper den.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x$$

Den potensielle energien er

$$U(x) = \omega^2 \int_{x_0}^x \sin x = \omega^2 (\cos x_0 - \cos x)$$

Dermed er

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{-2U(x)} = \sqrt{2\omega^2 (\cos x - \cos x_0)}$$

og vi får

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\cos x' - \cos x_0}} = \sqrt{2}\omega \int_0^t dt' = \sqrt{2}\omega t.$$

Integralet på venstre side kan vi ikke løse i form av vanlige funksjoner, så vi kan ikke lett komme videre med eksakte uttrykk. Men ved å bruke Taylorrekka og tilnærme høyre side av ligningen med $\sin x \approx x$ kan vi løse den. Vi kan gjøre noe tilsvarende nå, hvis vi antar at $x_0 \ll 1$, og dermed også $x \ll 1$ siden $|x| \leq x_0$. Vi kan da rekkeutvikle:

$$\begin{aligned} \cos x' - \cos x_0 &= 1 - \frac{1}{2!}x'^2 + \frac{1}{4!}x'^4 + \dots - \left(1 - \frac{1}{2!}x_0^2 + \frac{1}{4!}x_0^4 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2!}(x_0^2 - x'^2) - \frac{1}{4!}(x_0^4 - x'^4) + \dots \\ &= \frac{x_0^2}{2!}(1 - u^2) - \frac{x_0^4}{4!}(1 - u^4) + \dots \\ &= \frac{x_0^2}{2}(1 - u^2) \left[1 - \frac{x_0^2}{12}(1 + u^2) + \dots \right] \end{aligned}$$

der $u = x'/x_0$. Her har vi brukt rekkeutviklinga til $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$. Vi bruker også den såkalte binomiske rekka:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$

(sjekk gjerne denne ved å bruke det generelle uttrykket for Taylorrekka) og får at

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x' - \cos x_0}} = \frac{\sqrt{2}}{x_0 \sqrt{1-u^2}} \left[1 + \frac{x_0^2}{24}(1+u^2) + \dots \right]$$

Vi kan nå integrere denne rekka ledd for ledd. Vi vil finne et uttrykk for perioden T (svinger fra maks utslag, til det andre maks-utslagspunktet, og tilbake igjen), og integrerer derfor fra vi slipper pendelen og til den er på det laveste punktet. Dette svarer til tida $T/4$, og vi har derfor

$$\int_{x_0}^0 \frac{dx'}{\sqrt{\cos x' - \cos x_0}} = \sqrt{2} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left[1 + \frac{x_0^2}{24}(1+u^2) + \dots \right] = \sqrt{2}\omega \frac{T}{4},$$

som betyr at

$$T = \frac{4}{\omega} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left[1 + \frac{x_0^2}{24}(1+u^2) + \dots \right].$$

For å regne ut disse integralene bruker vi substitusjonen $u = \cos v$, $du = -\sin v dv$ og får

$$\begin{aligned} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int_0^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2} \\ \int_1^0 \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 v dv = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2v) dv = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left[1 + \frac{1}{16}x_0^2 + \dots \right]$$

Vi har dermed funnet hvordan perioden øker med startposisjonen x_0 til andre orden i x_0 . Hvis vi ville ha større nøyaktighet måtte vi tatt med flere ledd i rekkeutviklingene og løst flere integraler.