

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2024

Dato: Onsdag 4. desember 2024, kl. 9:00-13:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: ?? sider + et formelark.

Tillatte hjelpemidler:

Rottmann: "Matematisk formelsamling".

Elektronisk kalkulator av godkjent type.

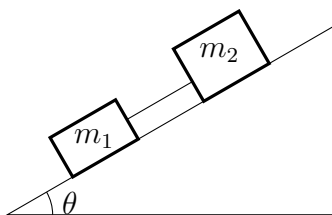
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Husk at alle svar må begrunnes!

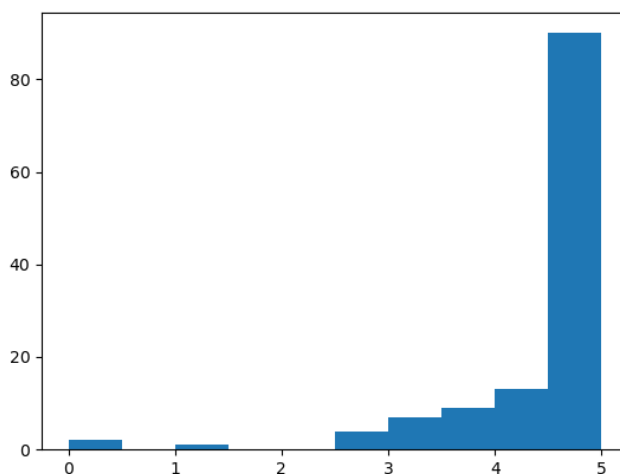
Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 To klosser

To klosser ligger på et skråplan med helningsvinkel θ . Klossene har massene m_1 og m_2 , og friksjonstallene mellom klossene og underlaget er μ_1 og μ_2 (vi antar for enkelhets skyld at de dynamiske og statiske friksjonstallene er like). Klossene er forbundet med en massesløs snor.



- a) Tegn to frilegemediagrammer, ett for hver kloss. Husk å navngi alle kreftene. Du kan anta at friksjonen er liten nok slik at begge klossene glir nedover skråplanet.



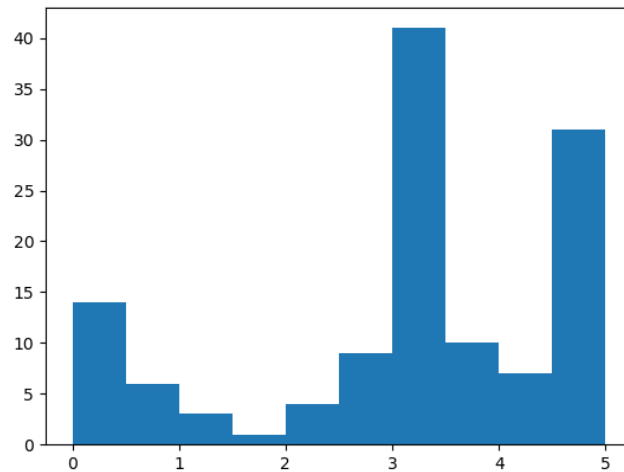
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
4.40	0.94	0.39

b) Vis at klossene får en akselerasjon

$$a = g \sin \theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \theta$$

når vi velger positiv retning nedover langs skråplanet og at snordraget i snora mellom dem er

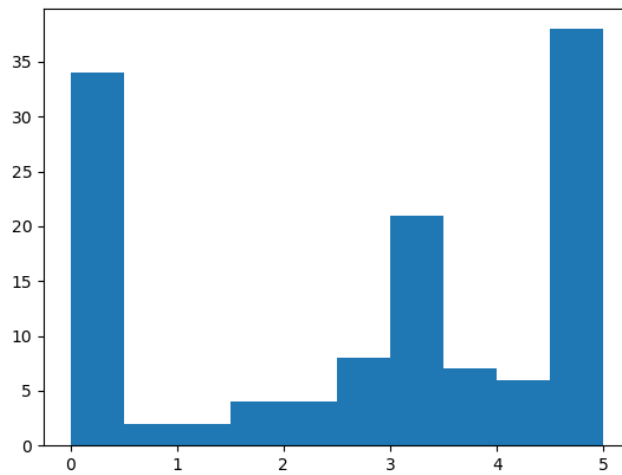
$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mu_2 - \mu_1) g \cos \theta.$$



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.99	1.57	0.70

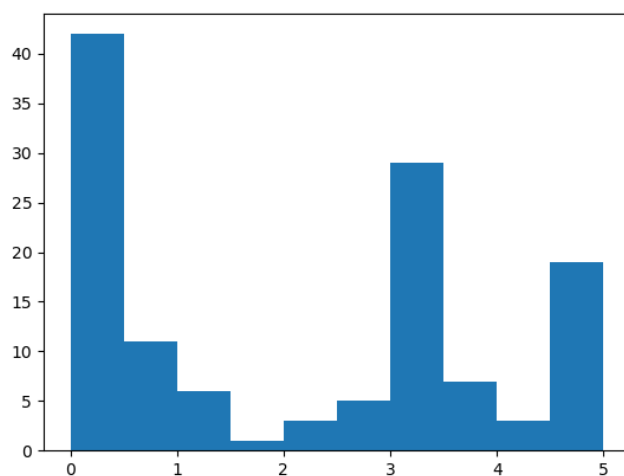
- c) For å sjekke at slike uttrykk er riktige er det ofte nyttig å undersøke grensetilfeller (spesielle valg av parametre) der disse uttrykkene forenkles slik at vi kan se at de stemmer med en enklere situasjon som vi kan analysere.

Finn minst to grensetilfeller der du kan bekrefte at uttrykkene over stemmer.



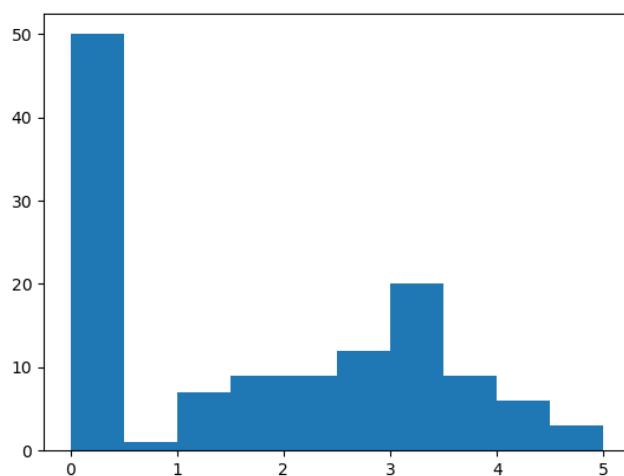
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.66	1.94	0.62

- d) Hvis vi ser på grensetilfellet $\mu_1 = 0$ og $\mu_2 \rightarrow \infty$ ser vi at $T \rightarrow \infty$. Hva er riktig verdi for T i dette tilfellet? Forklar hvorfor formelen ikke gir den riktige verdien.



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
1.96	1.81	0.68

- e) For gitte verdier av θ , m_1 og m_2 , hvilke verdier av μ_1 og μ_2 gjør at begge klossene blir liggende uten å begynne å gli?



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
1.58	1.49	0.65

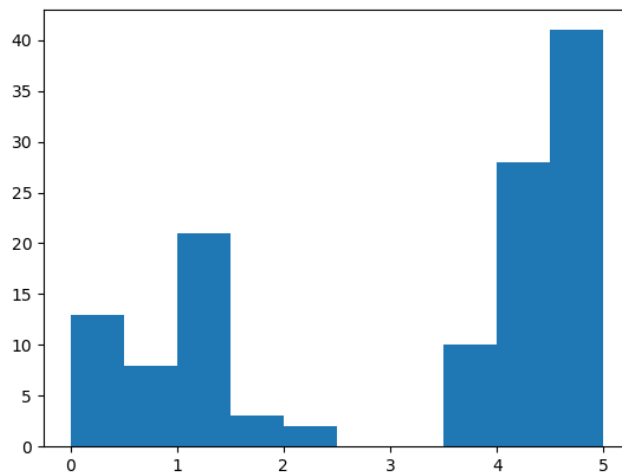
Oppgave 2 Svingninger

Ei fjær som ikke følger Hookes lov har en kraft som er gitt ved

$$F(x) = -kx - cx^2$$

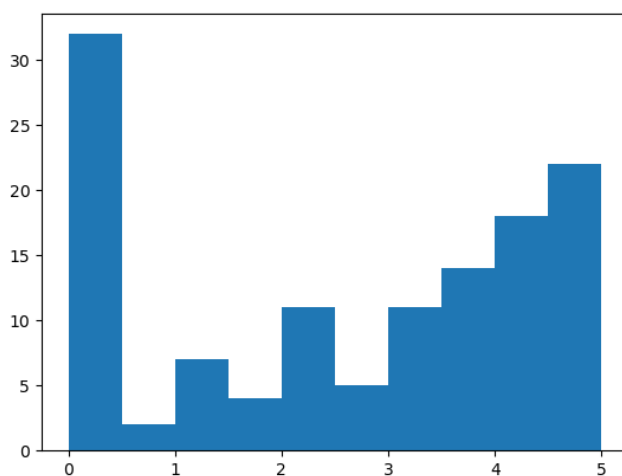
der k og c er konstanter og x er forlengelsen i forhold til likevektslengden ($x < 0$ svarer til at fjæra komprimeres).

a) Finn den potensielle energien til fjæra som funksjon av x .



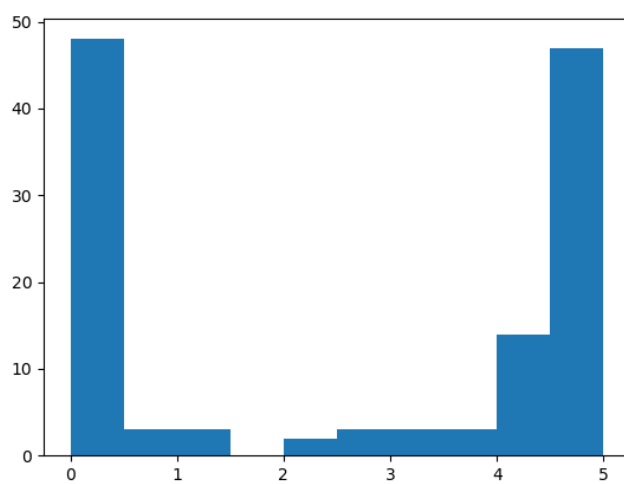
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
3.02	1.86	0.65

- b) Fjæra henges vertikalt ned fra taket, og det festes et lodd med massen m i enden. Hva er forlengelsen x_0 til fjæra når loddet henger i ro?



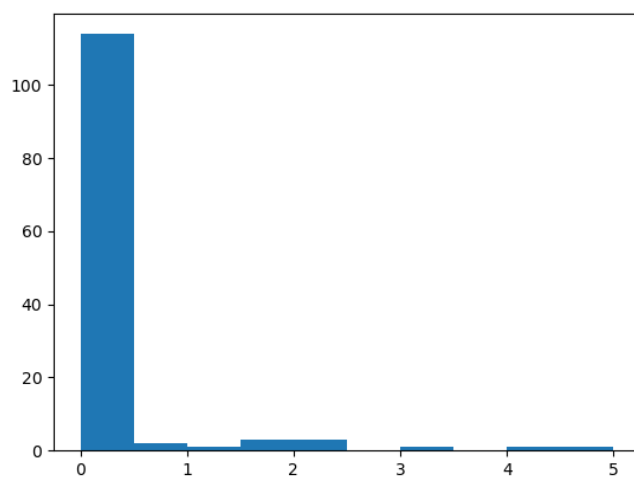
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.45	1.80	0.78

c) Skriv ned differensiallikninga som beskriver bevegelsen til loddet.



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.55	2.22	0.67

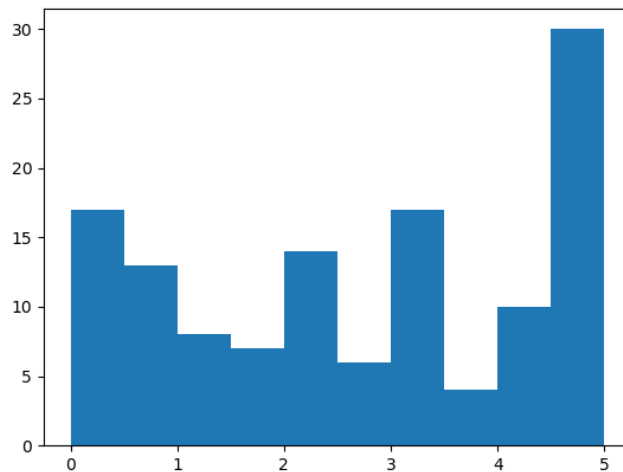
- d) Vi lar $x = x_0 + \xi$, der $\xi \ll x_0$ er et lite utslag fra likevektsposisjonen. Hva er frekvensen til små svingninger av loddet omkring likevektsposisjonen?



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
0.19	0.72	0.34

Oppgave 3 Med og uten friksjon

En ball ruller med hastighet $\vec{v}$ langs en horisontal vei uten å skli og kommer til en oppoverbakke som stiger med konstant helningsvinkel. I hvilket tilfelle kommer ballen lengst opp bakken: hvis bakken har nok friksjon slik at ballen ikke sklir, eller hvis bakken er helt glatt slik at det er ingen friksjon? Begrunn svaret ditt både ved hjelp av energiargumenter og ved hjelp av Newtons andre lov.



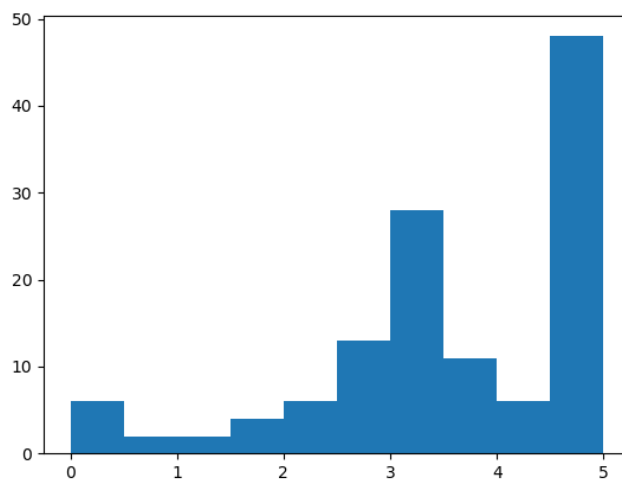
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.52	1.74	0.64

Oppgave 4 Spiralformet vei

En vogn triller ned en spiralformet vei som har radius R . Det er friksjon mellom hjula og bakken med friksjonskoeffisient μ_s . Du kan anta at hjula er tilnærmet masseløse og se bort fra luftmotstand og rullemotstand. Veien heller nedover med en vinkel θ i forhold til horisontalen.

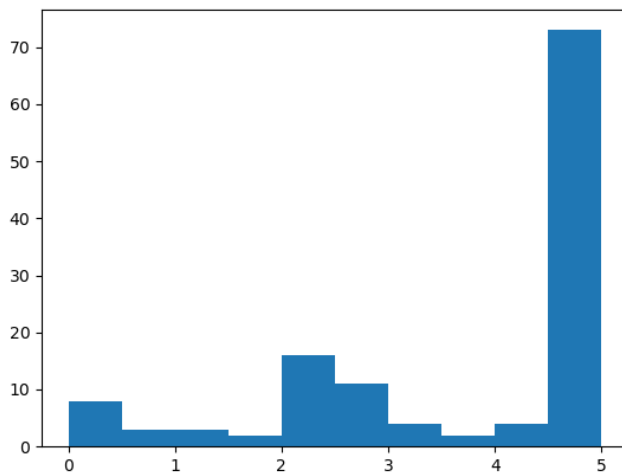


- a) Tegn et frilegemediagram som viser kreftene som virker på vogna. Husk å navngi alle krefter og forklar hva de er.



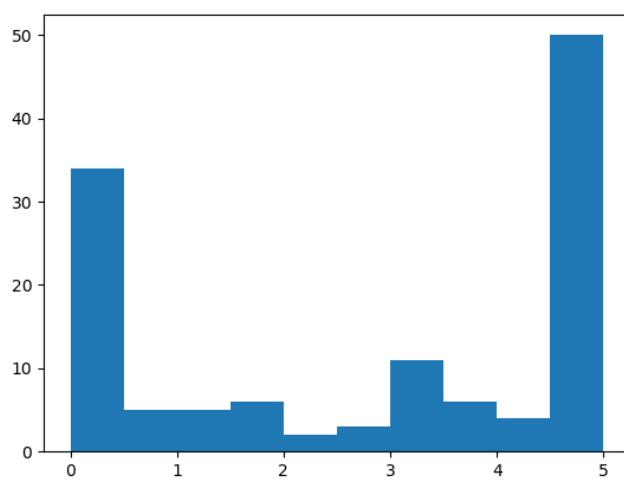
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
3.45	1.41	0.55

- b) I hvilken retning peker akselerasjonen? Her trenger du ikke å gi et analytisk svar i form av et matematisk uttrykk, men forklare kvalitativt retningen på akselerasjonen i forhold til relevante retninger. Bruk gjerne tegninger for å illustrere.



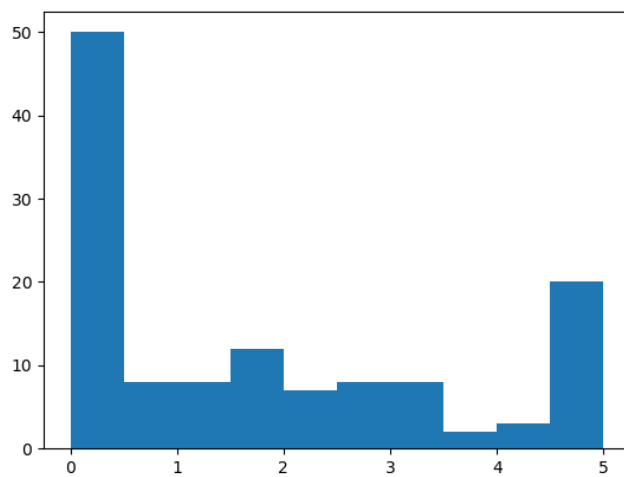
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
3.65	1.66	0.62

c) Hva er uttrykket for farta v som funksjon av høyden h under starthøyden?



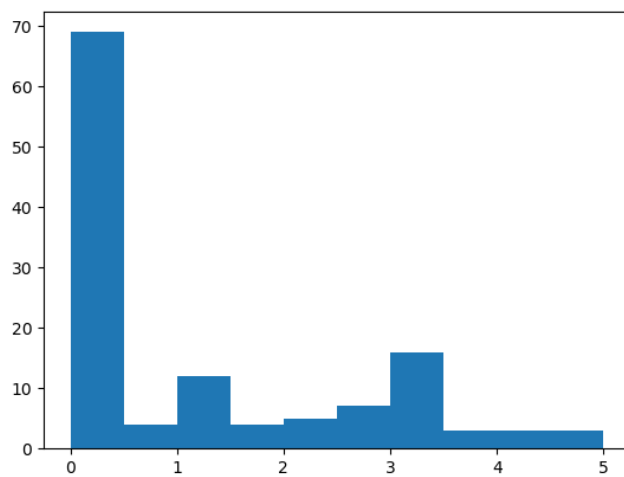
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.72	2.09	0.54

d) Hvor lang tid bruker vogna på å nå denne høyden?



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
1.61	1.77	0.63

e) Hvor langt ruller vogna før den begynner å gli utover?



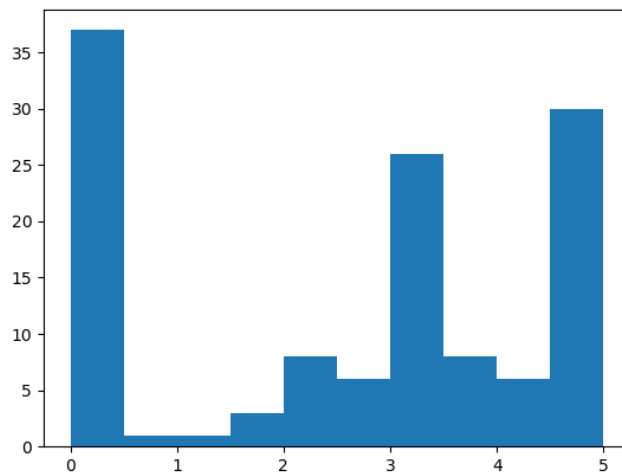
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
1.05	1.40	0.65

Oppgave 5 Beregne kometbane

Du vil simulere banen til en komet med massen m som beveger seg i en bane rundt sola. Du plasserer origo i sola som har massen $M \gg m$ og lar posisjonen til kometen være beskrevet av koordinatene x og y (banen vil alltid ligge i et plan, slik at vi ikke trenger noen z -koordinat).

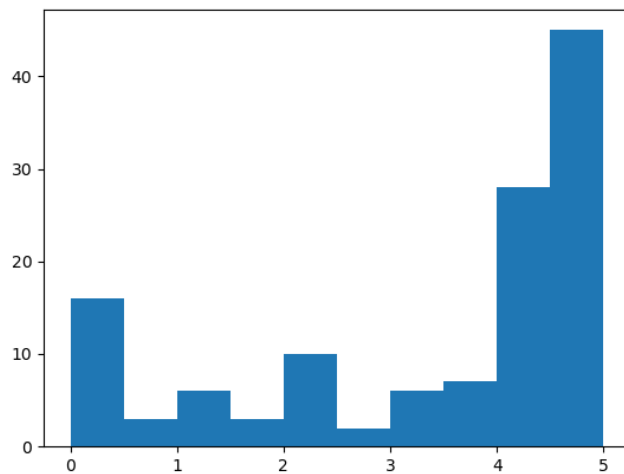
a) Vis at kometens bevegelse er beskrevet av difflikningene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}}x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}}y$$



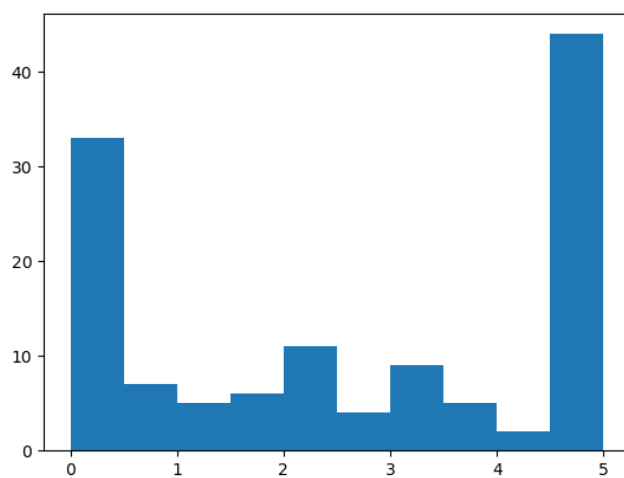
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.48	1.86	0.68

- b) Vi vet at kometer følger ellipsebaner med sola i det ene brennpunktet. I en slik bane, hvilke av disse størrelsene er bevart under bevegelsen: Kinetisk energi, total mekanisk energi og spinn?



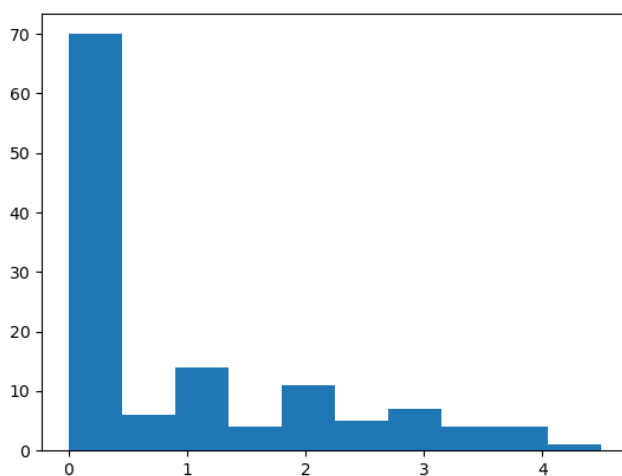
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
3.24	1.73	0.65

c) Gjør tyngdekrafta noe arbeid i noen del av banen? Er isåfall dette arbeidet positivt eller negativt?



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.55	2.06	0.55

- d) Hvis vi vet at kometen i det punkt i banen som er nærmest sola har avstanden r_1 fra sola og farta v_1 , hva er da den største avstanden til sola? Og hva er farta i det punktet?



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
0.90	1.24	0.47

e) Her er vist et program som beregner kometens bane numerisk:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Bruker enheter der GM=1

T = 50.
dt = 0.1
n = int(T/dt)

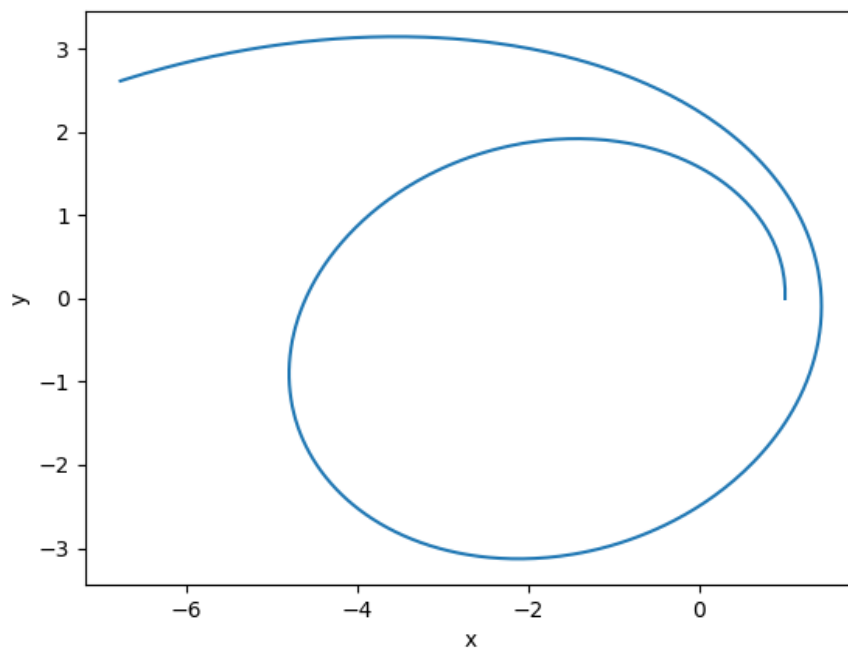
x = np.zeros(n)
y = np.zeros(n)
vx = np.zeros(n)
vy = np.zeros(n)
t = np.zeros(n)

x[0] = 1.
y[0] = 0
vx[0] = 0
vy[0] = 1.2

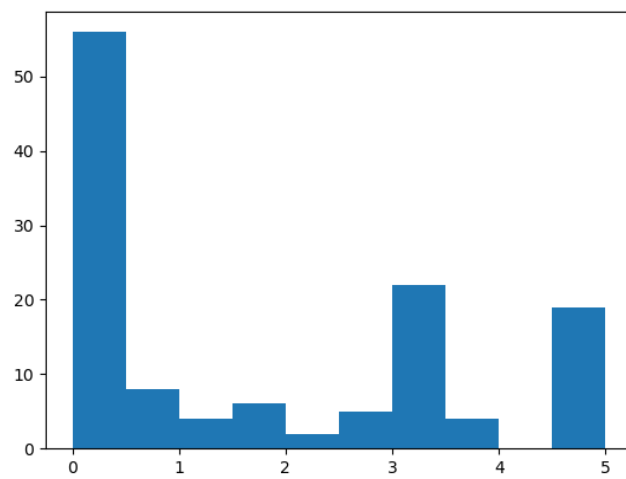
for i in range(n-1):
    r32invers = 1/(x[i]**2 + y[i]**2)**(1.5)
    vx[i+1] = vx[i] - x[i]*r32invers*dt
    vy[i+1] = vy[i] - y[i]*r32invers*dt
    x[i+1] = x[i] + vx[i]*dt
    y[i+1] = y[i] + vy[i]*dt
    t[i+1] = t[i] + dt

plt.plot(x,y)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.savefig('komet.png')
plt.show()
```

Dette gir følgende graf for kometens bane rundt sola:

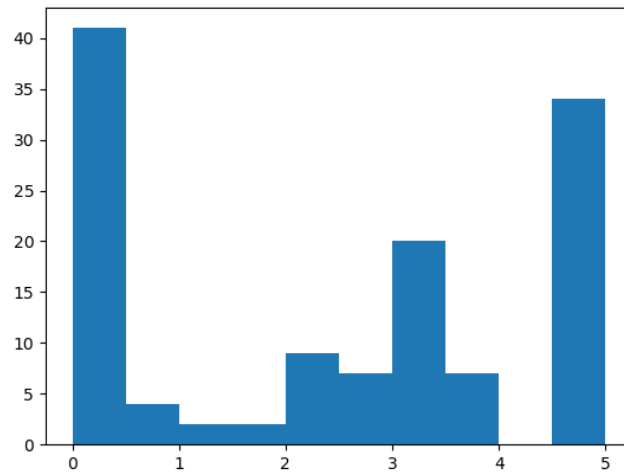


Hvordan stemmer denne banen med det vi forventer? Hva kan være årsakene til at den simulerte banen ikke er helt slik den er i virkeligheten?



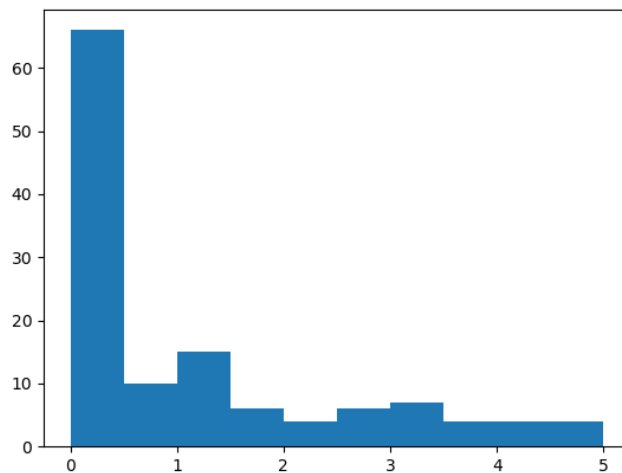
Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
1.64	1.84	0.61

- f) Koden kan endres slik at den gir bedre resultater. Hva slags endringer ville du gjort for å gjøre simuleringa mer nøyaktig?



Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
2.33	1.97	0.58

- g) Du vil undersøke om solvinden kan påvirke kometens bane. Solvinden består av ladde partikler som strømmer radielt ut fra sola. Vi antar for enkelhets skyld at dette gir en radiell kraft på kometen som er uavhengig av farta til kometen. Men vi vil ta hensyn til at tettheten til solvinden må avta med avstanden til sola, fordi partiklene blir fordelt over en større flate. Derfor vil vi anta at krafta fra solvinden avtar omvendt proporsjonalt med avstanden til sola. Hva må du endre i koden for å ta hensyn til denne krafta?

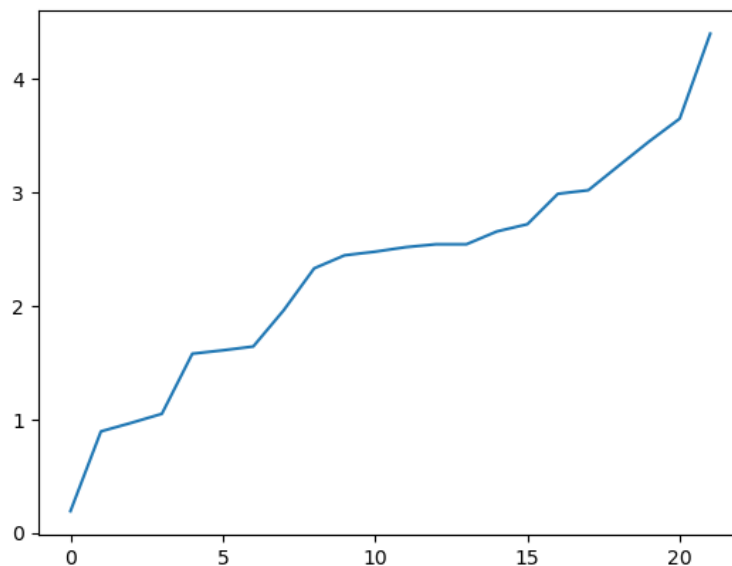


Gjennomsnitt	Standardavvik	Pearson korrelasjon med total
0.97	1.37	0.64

Resultater

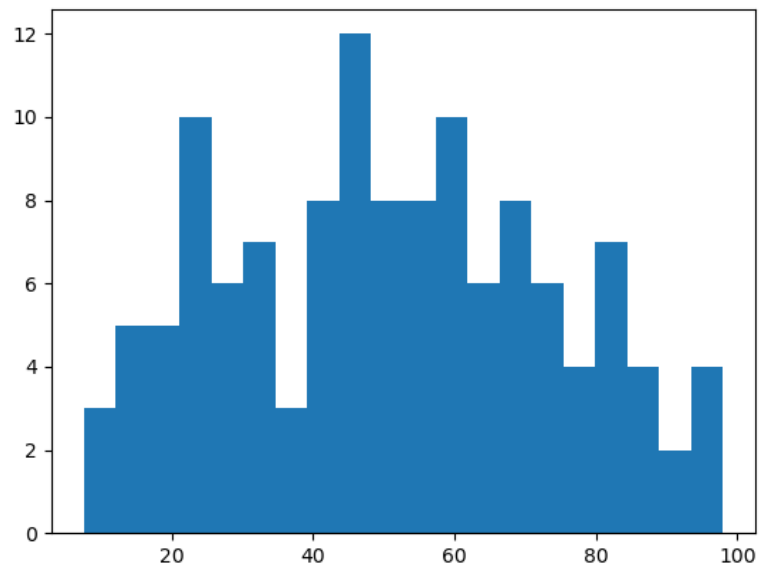
Alle deloppgavene hadde maksimalt 5 poeng. En korrelasjon på over 0,3 mellom poeng på en deloppgave og totalpoeng regnes som en indikasjon på at oppgaven har stemt godt overens med settet som helhet. Vi ser at dette er tilfellet for alle deloppgavene. De som er dårligst korrelert er 1a) for den har veldig mange fått til, og 2d) for den har nesten ingen fått til, uavhengig av om det var gode eller dårlige studenter.

Vi kan også få en indikasjon på om oppgavesettet er balansert ved å se på hvordan gjennomsnitt for hver deloppgave varierer. Vi plotter gjennomsnitt sortert etter stigende verdi, slik at første er vanskeligste og siste letteste:



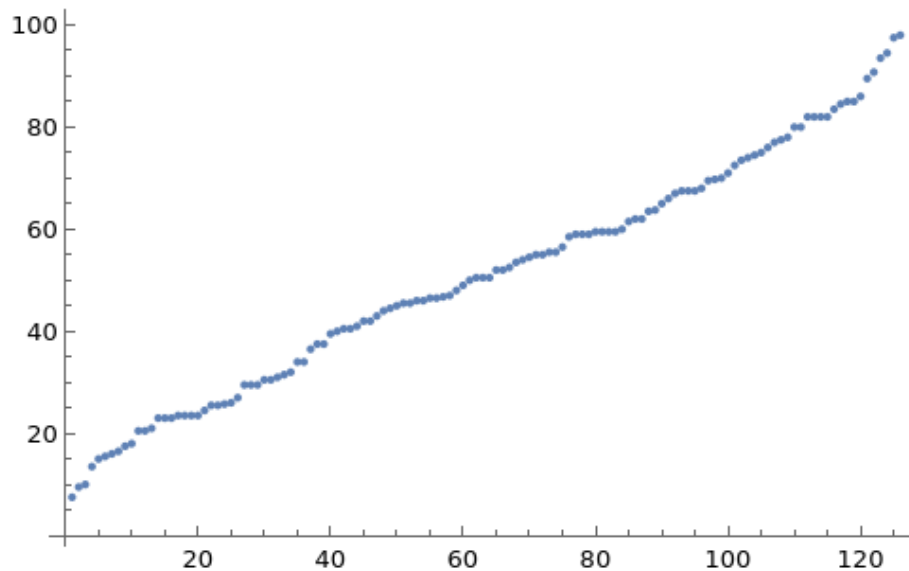
Vi ser at en oppgave (2d) var så vanskelig at nesten ingen fikk den til. Den gir derfor lite informasjon. Vi ser også at det kanskje er litt mange oppgaver der snittet er rundt 2,5 poeng, og et par av disse kunne vært litt lettere slik at kurven fikk en mer lineær form. Jeg tror at det var endel studenter som ikke forstod at 4c og 4d krever ganske enkel regning, og om disse hadde vært forklart på en måte som hjalp studentene på rett spor hadde det vært flere som fikk dem til.

Poengfordelingen totalt ble (max er 110 poeng):

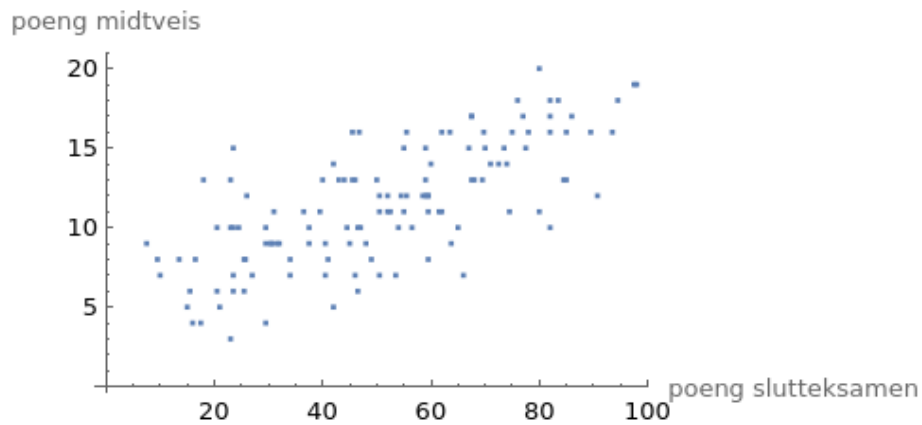


Fordelingen er ganske bred, men med litt mye vekt på lave poengsummer, som også reflekterer at oppgavene har vært vanskelige.

Det samme kan også fremstilles ved å sortere studentene og vise poeng som funksjon av student fra dårligste til beste:

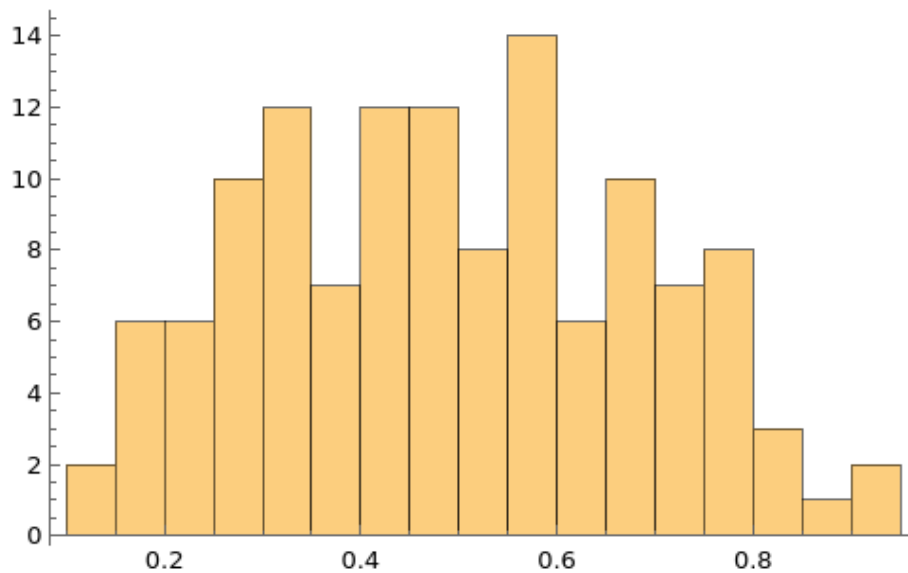


Korrelasjon mellom midtveis og slutteksamen er slik

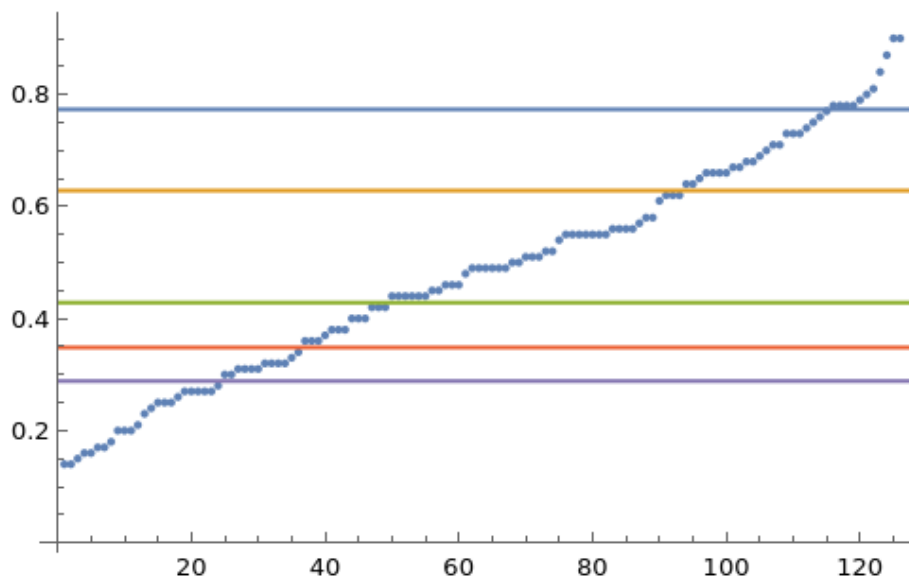


Dette er kanskje en litt mindre tydelig korrelasjon enn tidligere år, uten at jeg har noen forklaring på det.

Vektet sum inkludert midtveiseksamen og normert fordeler seg omtrent på samme måten:

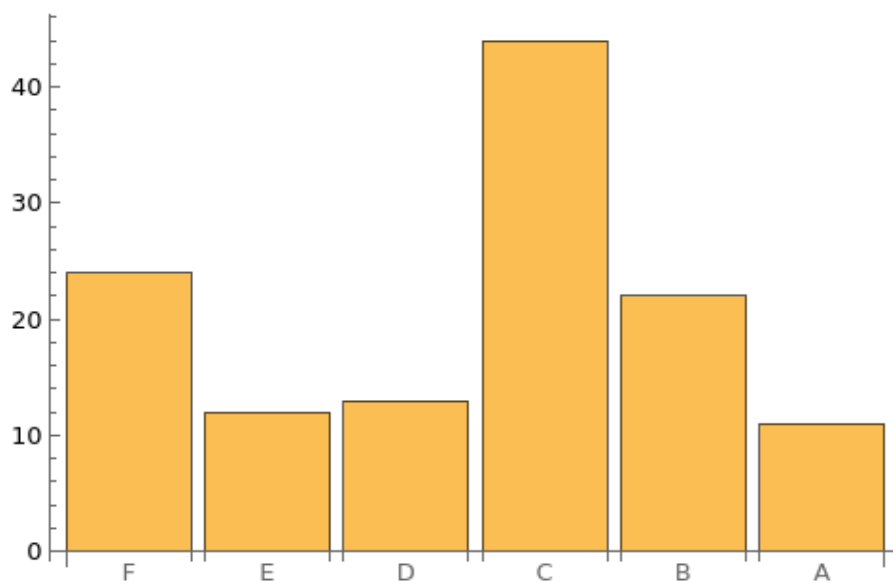


Det samme kan også fremstilles ved å sortere studentene og vise poeng som funksjon av student fra dårligste til beste (linjene viser karaktergrensene):



Vi ser god spredning i poeng, som gjør at vi skiller fint mellom studenene. Kanskje vi kunne ønsket fler poeng totalt, men det ville antagelig ikke gitt så store utslag på karakterene.

Basert på dette valgte vi karaktergrensene $F < 0,29 \leq E < 0,35 \leq D < 0,43 \leq C < 0,63 \leq B < 0,775 \leq A$ og får karakterfordeliga



Det er 24 (19%) F, 12 (9%) E, 13 (10%) D, 44 (34%) C, 22 (15%) B og 11 (9%) A (totalt 126 studenter).