

FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2024

Forventede forkunnskaper

Joakim Bergli

5. august 2024

Vi gir her en kortfattet oversikt over hva vi forventer av forkunnskaper i de ulike temaene vi tar opp. Dette er stoff som bør være godt kjent for dem som har tatt Fysikk 2 på videregående, men det kan fortsatt være nyttig som repetisjon for dem som har behov for det. Stoffet omtalt her vil ikke bli systematisk gjennomgått i undervisningen, men vi kommer til å gå direkte til oppgaver der vi trener på å bruke disse begrepene. Hvis dette stoffet ikke er kjent for deg kan det være lurt å forberede seg litt ekstra ved å lese om dette andre steder (f.eks. lærebøker fra videregående).

Uke 1: Dimensjonsanalyse og Fermiproblemer

Stoffet denne uka krever ikke så mye forkunnskaper, men det er nyttig å huske enhetene til endel størrelser, og noen av sammenhengene mellom dem.

Størrelse	Vanlig symbol	Enhet
Tid	t	s
Posisjon	x	m
Fart	v	m/s
Akselerasjon	a	m/s ²
Masse	m	kg
Kraft	F	N = kg m/s ²
Energi	E	J = Nm = kg m ² /s ²

Uke 2: Bevegelse i én dimensjon

Posisjonen til en partikkel som beveger seg i en dimensjon er beskrevet ved koordinaten $x(t)$ der partikkelen befinner seg ved tida t . Merk at i fysikk er vi generelt ikke så flinke til å skrive argumentet til funksjoner eksplisitt til enhver tid, men ofte lar det være selv om vi mener at størrelsen er en funksjon. Så vi kan ofte skrive “ x er posisjonen til partikkelen ved tida t ”. For å angi posisjonen må vi velge en koordinatakse, med nullpunkt og retning. Dersom vi kjenner posisjonen $x(t)$ som funksjon av tida (f.eks. fordi vi har målt posisjonen ved ulike tider) kan vi definere middelfarta (eller gjennomsnittsfarta) i tidsrommet fra t til $t + \Delta t$ som

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Momentanfarta ved tida t finner vi ved å se på gjennomsnittsfarta i et veldig lite tidsrom (som vi lar gå mot null)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Her kjenner vi igjen definisjonen av den deriverte, som vi skiver på flere ulike måter. I skolen er det vanlig med $x'(t)$, og vi bruker også det mange ganger. Men ofte skriver vi $\frac{dx}{dt}$ for å minne oss om at vi deriverer med hensyn på t (dette blir mer viktig når vi seinere bruker funksjoner av flere variable) og for å minne oss om at det er en grense av forholdet $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ der $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ er forandringen i posisjon. I fysikk har vi også veldig ofte bruk for derivert med hensyn på tid, og derfor bruker vi en egen kompakt notasjon for det og skriver $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Fart er hvor mye posisjonen endrer seg på en gitt tid, og akselerasjon er tilsvarende hvordan farta endrer seg per tid. Dermed definerer vi tilsvarende gjennomsnitts(middel-)akselerasjon som

$$\bar{a} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

og momentanakselerasjon

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{x}.$$

Ofte kjenner vi ikke i utgangspunktet funksjonen $x(t)$ men har isteden en måte å regne ut akselerasjonen på, eller vi har målt akselerasjonen. Da har vi behov for å gå andre veien og finne farta og posisjonen. Siden derivasjon og integrasjon er motsatte operasjoner får vi farta ved å integrere akselerasjonen

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') dt'. \quad (1)$$

Her er $v_0 = v(0)$ farta ved $t = 0$ og $\int_0^t a(t') dt'$ er endring i fart over tidsintervallet fra 0 til t . Her bruker vi t' som symbol for løpende tid for å skille den fra sluttida t . Merk at dette ikke har noe med derivasjon å gjøre. Tilsvarende finner vi posisjonen ved å integrere farta

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + v_0 t + \int_0^t \left[\int_0^{t'} a(t'') dt'' \right] dt' \quad (2)$$

der $x_0 = x(0)$ er posisjonen ved $t = 0$.

Bevegelseslikninger ved konstant akselerasjon

Et vanlig spesialtilfelle er når akselerasjonen er konstant, $a(t) = a$. da kan vi løse integralene og finner.

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a dt' = v_0 + at.$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

Husk på at disse likningene bare gjelder dersom akselerasjonen er konstant. Hvis akselerasjonen varierer må vi gå tilbake til likningene (1) og (2).

Uke 3: Newtons lover. Bevegelse i 2D og 3D

Newtons lover

Newtons tre lover for bevegelse er

- Newtons 1. lov: Dersom et legeme ikke er påvirket av ytre krefter, eller summen av alle krefter er null vil det bevege seg i rettlinjet bevegelse med konstant hastighet (eller ligge i ro dersom det starter i ro).

$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F} = \vec{0} \implies v(t) = v_0 = \text{konstant}.$$

- Newtons 2. lov: Dersom netto ytre kraft ikke er null vil legemet få en akselerasjon, og krafta er proporsjonal med akselerasjonen.

$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Newtons 3. lov: Krefter viker alltid mellom to legemer, og krafta på A fra B er like stor og motsatt rettet av krafta fra B på A.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Slike par av krefter kaller vi kraft-motkraft par. Husk at kraft og motkraft alletid er på forskjellige legemer.

Et referansesystem der disse lovene gjelder kaller vi et treghetssystem (inertialsystem).

Kraftmodeller

I mange situasjoner er det nyttig å kunne beregne ei kraft basert på et legemes posisjon eller bevegelse. Da bruker vi ofte endel modeller for hvor store kreftene er. Her er en oversikt over de vi oftest kommer til å bruke

- Gravitasjon ved jordoverflaten. På et legeme med massen m virker krafta (rettet vertikalt nedover)

$$F_G = mg$$

- Oppdrift (“buoyancy”). Et legeme med volum V nedsenket i ei væske med tetthet ρ_V har en oppdrift (rettet vertikalt oppover)

$$F_B = V\rho_V g$$

- Luft/væskemotstand. For et legeme som beveger seg gjennom gass/væske med fart v er motstanden rettet mot bevegelsen og med en størrelse som avhenger av farta. Ofte skiller vi mellom to mulige lover. For lave hastigheter (ikke turbulent strømming) er

$$F_D = k_v v.$$

For høye hastigheter (turbulent strømming) er

$$F_D = Dv^2.$$

Her er k_v og D konstanter som avhenger av legemets størrelse og form.

- Fjærkraft (Hookes lov). For ei fjær med fjærkonstanten k som er strukket (eller komprimert) med en lengde Δx i forhold til likevektslengden er

$$F_k = k\Delta x.$$

Retningen er slik at den prøver å gå tilbake til likevektslengden.

- Friksjon. Vi skiller mellom to typer, statisk og dynamisk friksjon. Statisk friksjon har vi dersom to flater ikke glir mot hverandre, men den ene av en eller annen grunn prøver å gli i forhold til den andre. Friksjonskrafta kan motstå dette opp til en maksimalverdi som er bestemt av normalkrafta N som virker mellom de to flatene.

$$f_s \leq f_{s,max} = \mu_s N,$$

hvor μ_s er den statiske friksjonskoeffisienten. Retningen er betinget av situasjonen. Hvis de to flatene glir i forhold til hverandre har vi dynamisk friksjon og da er friksjonskrafta

$$f_d = \mu_d N.$$

den dynamiske friksjonskraften virker mot (den relative) bevegelsesretningen. Den dynamiske friksjonskoeffisienten μ_d er mindre enn den statiske, $\mu_d < \mu_s$.

Vi kaller dette kraftmodeller fordi de ofte ikke er eksakte, men tilnærmede sammenhenger som gjelder mer eller mindre nøyaktig innenfor begrensede områder. Luftmotstanden skifter for eksempel ikke brått fra å være proporsjonal med v til v^2 når farta går over en grense, men den endrer seg gradvis fra det ene til det andre. Og om farta nærmer seg lydfarta følger den ingen av dem. Tilsvarende er friksjonen ikke helt proporsjonal med normalkrafta eller uavhengig av kontaktarealet.

Bevegelse i 2D og 3D, vektornotasjon

Bevegelse i 2 og 3 dimensjoner er egentlig akkurat det samme som i 1 dimensjon, bare at vi må holde kontroll på posisjon, fart og akselerasjon i de forskjellige retningene. Det betyr at vi har posisjonene $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$, men tilhørende fartskomponenter $v_x(t)$, $v_y(t)$ og $v_z(t)$ og akselerasjonskomponenter $a_x(t)$, $a_y(t)$ og $a_z(t)$. Ofte er det praktisk å skrive uttrykk på vektorform, og vi bruker gjerne $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ for posisjonen til partikkelen. Noen ganger skriver vi også dette som

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$$

der vi har definert enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ langs de tre koordinataksene. Tilsvarende har vi hastighetsvektoren

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Banefarta er lengden til hastighetsvektoren

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

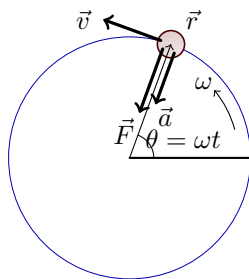
Akselerasjonsvektoren er

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Uke 4: Newtons lover som differensiallikninger. Sirkelbevegelse

Sirkelbevegelse. Sentripetalakselerasjon

Vi ser på et legeme som beveger seg i sirkel med konstant banefart v . Det betyr at strekningen som tilbakelegges per sekund er konstant gjennom bevegelsen. Men fartsvektoren $\vec{v}$ må hele tiden skifte retning slik at den alltid er tangent til sirkelen. Dermed må det være en akselerasjon (og en tilhørende kraft). Denne akselerasjonen kaller vi sentripetalakselerasjon, og krafta sentripetalkraft.



Vi kan finne et uttrykk for akselerasjonen ved å starte med posisjonen som funksjon av tida

$$\vec{r} = [r \cos \omega t, r \sin \omega t].$$

Her er ω vinkelfarta, det vil si hvor fort vinkelen $\theta = \omega t$ øker (i radianer per sekund). Akselerasjonen finner vi ved å derivere to ganger med hensyn på tida

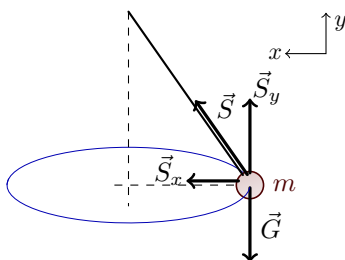
$$\vec{a} = -\omega^2[r \cos \omega t, r \sin \omega t].$$

Vi ser at akselerasjonen er proporsjonal med posisjonsvektoren, men med motsatt fortegn. Akselerasjonen er altså rettet inn mot sentrum i sirkelen. Størrelsen på akselerasjonen er

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}.$$

I den siste overgangen bruker vi sammenhengen mellom vinkelfart og banefart: $v = r\omega$.

Advarsel: Selv om sier slike ting som: “Sentripetalkrafta er den krafta som får et legeme til å følge en sirkelbane” er det viktig å huske at sentripetalkrafta ikke er en egen kraft, i tillegg til de andre kreftene som virker. For eksempel kan vi se på en kjelependel (kule i snor som svinges rundt i et horisontalt plan).



Hvilke krefter virker på kula? Tyngdekrafta $\vec{G}$ og snordraget $\vec{S}$. Aldri skriv eller tegn inn sentripetalkrafta i tillegg! Sentripetalkrafta er den av de kreftene som virker som er rettet inn mot sentrum i sirkelbanen. I dette tilfellet er det horisontalkomponenten av snordraget, $\vec{S}_x$ som er sentripetalkrafta.

Integrasjon ved substitusjon

Vi kommer til å få bruk for å løse noen integraler, og spesielt skifte variable i integraler (substitusjon). Hvis vi har et integral som er på formen

$$\int f(u(x))u'(x)dx$$

kan vi bytte integrasjonsvariabel til u istedenfor x

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$

Om vi bruker notasjonen $u'(x) = \frac{du}{dx}$ kan denne regelen huskes som at vi bare forkorter dx

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du.$$

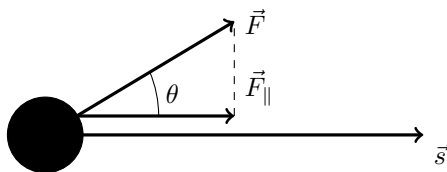
Men vi må huske at vi har skiftet integrasjonsvariabel, og derfor også må bytte grensene i bestemte integraler,

$$\int_a^b f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

Uke 5: Numerisk løsning av difflikninger. Arbeid. Kinetisk og potensiell energi

Arbeid

Hvis vi lar en kraft virke på et legeme, og dette legemet beveger seg sier vi at produktet av den komponenten av krafta som er i samme retning som bevegelsen ganger med strekningen er arbeidet krafta gjør under bevegelsen.

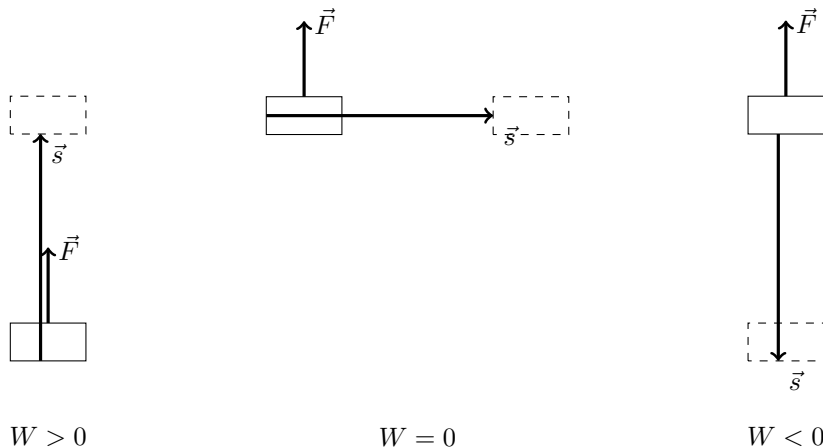


På figuren beveger kula seg en strekning $\vec{s}$ mens den er påvirket av krafta $\vec{F}$. Komponenten til krafta i bevegelsesretninga er $\vec{F}_{\parallel}$, og dermed er arbeidet

$$W = F_{\parallel}s = F \cos \theta s = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Her er $F_{\parallel} = |\vec{F}_{\parallel}| = F \cos \theta$, $F = |\vec{F}|$ og $s = |\vec{s}|$. I siste overgangen har vi brukt at skalarproduktet mellom to vektorer er produktet av lengdene og cosinus til vinkelen mellom dem.

Arbeidet er positivt eller negativt avhengig av om krafta virker med eller mot bevegelsesretninga. Som eksempel kan det være greit å se på ei kasse som vi først løfter opp, bærer bort og så setter ned igjen.



Merknad 1 Arbeidet er positivt når vi løfter kassa opp fordi krafta er i samme retningen som bevegelsen. Arbeidet er negativt når vi setter kassa ned fordi krafta peker motsatt av bevegelsen.

Merknad 2 Her har vi bare sett på arbeidet til krafta $\vec{F}$ som vi løfter kassa med. I tillegg virker selvfølgelig tyngdekrafta. Og når vi skal få kassa til å beveges seg horisontalt må det også være en kraft som forårsaker det. Disse har vi ikke tegnet inn eller regnet med. Husk altså at et arbeid er knyttet til en bestemt kraft, og vi kan finne det totale arbeidet ved å legge sammen arbeidene fra hver kraft.

Merknad 3 Arbeidet er null når vi flytter kassa horisontalt fordi kraft og bevegelse står vinkelrett på hverandre. Dette til tross for at det kan være ganske slitsomt å bære en tung kasse bortover. Begreper i fysikk stemmer ikke alltid perfekt med daglig bruk av de samme ordene!

Kinetisk energi

Den kinetiske energien er det arbeidet som vi har gjort når vi setter et legeme i bevegelse. Den avhenger bare av massen m til legemet og slutfarta v , som vi skal vise nå. Farta ved tida t kaller vi $v(t)$, og krafta som virker kan variere med tida som en eller annen funksjon $F(t)$. Da vet vi at

$$F(t) = ma(t) = m \frac{dv}{dt}$$

I et lite tidsrom fra t til $t + dt$ beveger legemet seg en strekning $ds = vdt$, og krafta gjør dermed et lite arbeid

$$dW = Fds = m \frac{dv}{dt} vdt = mv dv.$$

Når vi summerer bidragene fra alle tidsrommene får vi totalarbeidet (som blir et integral siden det er uendelig mange uendelig små tidsrom)

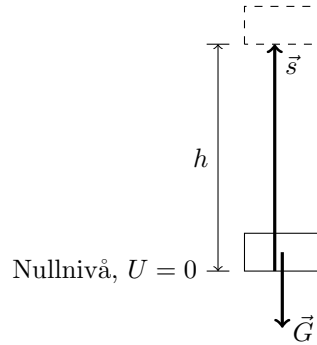
$$W = \int dW = \int_0^v mv' dv' = \frac{1}{2}mv^2.$$

Her har vi antatt at farta i startpunktet er null og brukt v' som variabel for økende fart underveis mens v er slutfarta. Dermed har vi vist at den kinetiske energien til et legeme med massen m og farta v er

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Potensiell energi

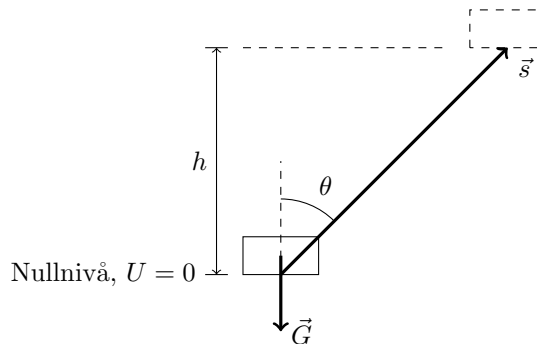
Den gravitasjonelle potensielle energien er minus det arbeidet tyngdekrafta gjør når vi bringer et legeme fra et nullpunkt (som vi kan velge hvor vi legger) og til en gitt posisjon. Eventuelt kan vi si at den potensielle energien er det arbeidet tyngden gjør når legemet går fra den gitte posisjonen og tilbake til nullpunktet. Det enkleste tilfellet er hvis vi løfter en gjenstand rett opp



Den potensielle energien i høyden h over nullnivået er da

$$U = -W = -\vec{G} \cdot \vec{s} = mgh.$$

Vi har ofte nytte av endringen i potensiell energi også når bevegelsen ikke er vertikal. Vi viser at uttrykket for potensiell energi gjelder også i det tilfellet. Vi ser på en bevegelse som går på skrå, med en vinkel θ i forhold til vertikalen.



Da er

$$U = -W = -\vec{G} \cdot \vec{s} = mgs \cos \theta = mgh$$

siden $h = s \cos \theta$. Vi ser at den potensielle energien bare avhenger av høyden, og ikke hvor langt vi beveger oss sideveis. Når vi har vist dette for en skrå bane som her gjelder det for en vilkårlig krum bane også, siden vi kan tenke på den som satt sammen av veldig mange små rette skrå baner.

Hvilket nivå vi velger som nullnivå er helt opp til oss, og vi kan velge det som passer best for oss i en bestemt sammenheng. Det betyr at det ikke gir noen mening å spørre hva er den potensielle energien til et legeme, men bare den potensielle energien i forhold til et bestemt nullnivå. Endringer i potensiell energi er fysisk meningsfulle, og avhenger ikke av nullnivået.

Uke 6: Gravitasjon. Taylorrekker

Newtons gravitasjonslov

Tyngdekrafta mellom to massepunkter med massene m_1 og m_2 er gitt ved Newtons gravitasjonslov

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (3)$$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ er gravitasjonskonstanten (noen ganger brukes γ som symbol for denne). Denne loven er universell og gjelder mellom alle legemer. Fordi gravitasjonskonstanten er så liten merker vi ikke noe til tyngdekrafta mellom ting rundt oss. Bare når bidraget fra mange masser summeres oppblir det en stor kraft til sammen. Derfor trekkes vi mot jorda, som er den eneste tyngdekrafta vi merker i dagliglivet. Fordi jorda er ei kule vil nettokrafta fra alle de forskjellige delene til sammen bli lik den krafta vi regner ut med likning (3) om vi antar at hele jordas masse er samlet i jordas sentrum. Dette er ikke opplagt, og er noe vi kan utlede ved å summere sammen alle bidragene fra ei kule. Dette ender med et integral over hele kula, og dere er ikke klare for det før MAT1110.

Potensiell energi for krefter som varierer med posisjon

Vi har at arbeidet som gjøres av en kraft $\vec{F}$ som virker over en strekning $\vec{s}$ er $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Men hva hvis krafta varierer ettersom legemet beveger seg? Når vi beveger oss opp og ned en liten strekning i tyngdefeltet, slik vi vanligvis gjør for ting som foregår på jorda, kan vi anta at tyngdekrafta er uforandret. Men hvis høydeforskjellene er store må vi ta hensyn til at tyngdekrafta avtar med høyden. Da gjelder definisjonen av arbeid bare for små endringer i posisjon Δr , og vi må summere sammen mange små bidrag $\Delta W = F(r)\Delta r$. I grensa uendelig mange uendelig små bidrag blir det et integral

$$W = \int_{r_0}^{r_1} F(r) dr.$$

Her har vi antatt at krafta hele tida er parallell med bevegelsen. Hvis vi skal regne ut gravitasjonell potensiell energi i det varierende tyngdefeltet fra en punktmasse (eller sfærisk symmetrisk masse) M vil krafta på en annen masse m variere med avstanden r som

$$F(r) = G \frac{Mm}{r^2}.$$

I dette tilfellet er det vanlig å velge nullpunktet der de to massene er langt fra hverandre slik at $r = \infty$. Da er

$$U = \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{r'^2} dr' = -GMm \left[\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r = -G \frac{Mm}{r}.$$

Den potensielle energien går mot null for $r = \infty$ slik vi valgte, og den er negativ for alle endelige r . Dette er fordi tyngdekrafta er tiltrekkende, og dermed gjør et negativt arbeid når legemet bringes til nullnivået. Det stemmer også med det vi kjenner fra før: Potensiell energi er stor høyt oppe (stor r) og mindre lengre ned.

Et annet tilfelle vi kjenner der krafta varierer med posisjon er for ei fjær der krafta er

$$F(x) = -k(x - x_0).$$

Her er k fjærkonstanten og x_0 likevektslengden. Det negative fortenget er der fordi hvis $x > x_0$ prøver fjæra å trekke seg sammen, altså gjøre x mindre. Den potensielle energien blir da (vi velger nullpunktet når $x = x_0$, altså når fjæra ikke er strukket)

$$U = - \int_{x_0}^x F(x') dx' = -k \int_{x_0}^x (x' - x_0) = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2.$$

Uke 7: Svingninger. Andre ordens homogene difflikninger med konstante koeffisienter.

Her er det ingen spesielle forkunnskaper, annet enn det vi har vært gjennom fram til nå.

Uke 8: Numerisk derivasjon og integrasjon

Her trenger dere definisjonen av derivert (Kalkulus 6.1) og integral (Kalkulus 8.1).

Uke 9: Driv og impuls

Driv (bevegelsesmengde)

Eksempel: Kollisjon mellom to biler

Når to objekter kolliderer vil generelt krafta mellom dem være en funksjon av tida, ofte ikke en enkel funksjon. Det betyr at om vi vil finne farta til hver av bilene som funksjon av tida er det ikke et enkelt problem å løse. Om vi kaller farta til bil A $\vec{v}_A$ og bil B $\vec{v}_B$ og hvis $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ er krafta fra bil A på bil B og $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ krafta fra bil B på bil A har vi Newtons 2. lov

$$m_A \vec{a}_A = \vec{F}_{B \rightarrow A}, \quad m_B \vec{a}_B = \vec{F}_{A \rightarrow B}.$$

Den fulle løsningen krever at vi kjenner $\vec{F}_{B \rightarrow A}(t)$ og integrerer opp likningene. Men vi kan finne ut noe om kollisjonen som gjelder generelt, bare basert på Newtons 3. lov. Den sier at vi til enhver tid har

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}.$$

Det betyr at

$$m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B = 0$$

som vi kan integrere opp og få

$$\int_{t_0}^{t_1} (m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B) dt = m_A (\vec{v}'_A - \vec{v}_A) + m_B (\vec{v}'_B - \vec{v}_B) = 0.$$

Her er $v_{A/B} = v_{A/B}(t_0)$ og $v'_{A/B} = v_{A/B}(t_1)$. Dette kan vi også skrive som

$$m_A \vec{v}'_A + m_B \vec{v}'_B = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B.$$

Om vi definerer driv (som også kalles bevegelsesmengde) som $\vec{p} = m\vec{v}$ har vi vist at så lenge det ikke virker ytre krefter er det totale drivet i et system bevart under bevegelsen. Videre har vi også at Newtons andre lov kan formuleres som

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Kollisjoner (støt) i 1D

I 1 dimensjon kan vi droppe vektornotasjon. Hvis to legemer med massene m_A og m_B og fartene v_A og v_B kolliderer uten at det virker ytre krefter, og fartene etter er $v'_{A/B}$ er

$$m_A v'_A + m_B v'_B = m_A v_A + m_B v_B.$$

Her antar vi som kjent massene og fartene før kollisjonen, og vil regne ut fartene etterpå. Da har vi en likning med to ukjente, som ikke gir en entydig løsning. Bevaring av driv er altså ikke nok i seg selv til å bestemme fartene etter kollisjonen. Det er to spesielle tilfelle vi kan løse fullstendig.

Fullstendig uelastisk støt

Dersom to objekter kolliderer og henger sammen etterpå kaller vi det et fullstendig uelastisk støt.

$$v'_A = v'_B = v'$$

Bevaring av driv

$$(m_A + m_B)v' = m_A v_A + m_B v_B$$

gir

$$v' = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}.$$

Hva skjer med kinetisk energi?

$$K_{for} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$K_{etter} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v'^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_A v_A + m_B v_B)^2}{m_A + m_B}.$$

Vi kan regne ut hvor mye energi som tapes

$$\Delta K = K_{for} - K_{etter} = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (v_A - v_B)^2.$$

Vi ser at $\Delta K \geq 0$, så kinetisk energi avtar. Bare hvis $v_A = v_B$ er den kinetiske energien bevart, men da skjer ingen kollisjon.

Fullstendig elastisk støt

Her er både drivet og energien bevart og vi har

$$\begin{aligned}m_A v'_A + m_B v'_B &= m_A v_A + m_B v_B \\ \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B &= \frac{1}{2} m_A v^2_A + \frac{1}{2} m_B v^2_B.\end{aligned}$$

Løser vi de to likningene får vi

$$\begin{aligned}v'_A &= \frac{(m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B}{m_A + m_B} \\ v'_B &= \frac{(m_B - m_A)v_B + 2m_A v_A}{m_A + m_B}\end{aligned}$$

Kollisjoner (støt) i 2D

i 2 dimensjoner får vi bevaring av driv i både x - og y -retningen

$$\begin{aligned}m_A v'_{Ax} + m_B v'_{Bx} &= m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} \\ m_A v'_{Ay} + m_B v'_{By} &= m_A v_{Ay} + m_B v_{By}.\end{aligned}$$

Dette er to likninger med 4 ukjente.

Ved et fullstendig uelastisk støt er $\vec{v}'_A = \vec{v}'_B$ som gir to ekstra likninger

$$\begin{aligned}v'_{Ax} &= v'_{Bx} \\ v'_{Ay} &= v'_{By}.\end{aligned}$$

Nå har vi altså 4 likninger og 4 ukjente som entydig bestemmer løsningen.

I et fullstendig elastisk støt er det en ekstra likning

$$\frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2} m_A v^2_A + \frac{1}{2} m_B v^2_B.$$

Det er nå altså tre likninger og 4 ukjente, og dermed er ikke utfallet entydig bestemt. Flere retninger ut er mulig med bevaring av både driv og energi, og vi må kjenne noen detaljer i støtprosessen for å bestemme hva som skjer .

Uke 10: Numerisk løsning av difflikninger

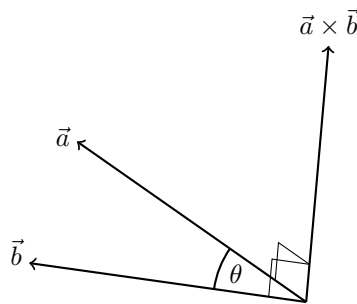
Her er det ingen spesielle forkunnskaper som kreves.

Uke 11: Flerpartikkelsystemer. Energi i rotasjonsbevegelse

Her er det ingen spesielle forkunnskaper som kreves.

Uke 12: Rotasjonsbevegelse

Her får vi bruk for kryssprodukt av vektorer.



Kryssproduktet av to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er en vektor som er vinkelrett på begge de to vektorene og med lengde lik

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,$$

der $a = |\vec{a}|$ og $b = |\vec{b}|$.

Uke 13: Relativitetsteori

Relativitetsteoriens postulater

Relativitetsteorien er basert på to postulater

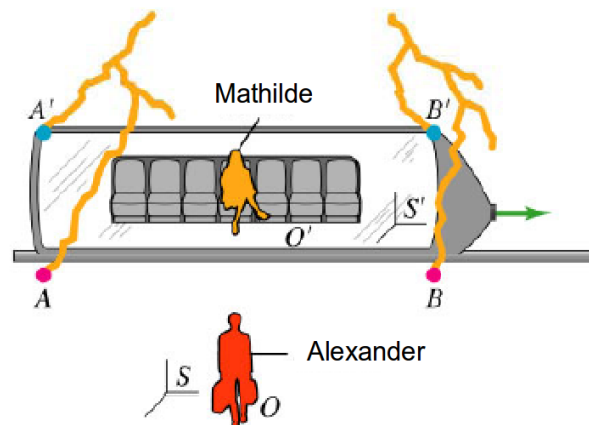
- Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.
- Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer, og er uavhengig av observatørens bevegelse.

Det første er det ikke noe kontroversielt med, det er også det vi tenker i ikke-relativistisk fysikk. Det andre virker i utgangspunktet absurd (men i FYS1120 lærer dere at Maxwells likninger for elektromagnetiske felt stemmer med dette. Det visste Einstein).

Hvis vi skal ha samme lysfart i alle referansesystemer må vi akseptere ganske mange andre ting som ikke stemmer med våre vanlige erfaringer. Vi skal se på noen.

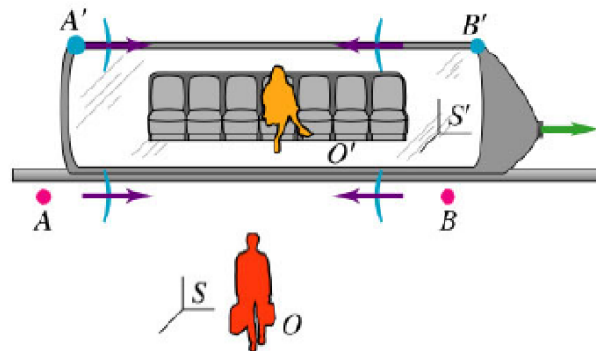
Relativitet av samtidighet

Et tog kjører med konstant fart på en rett strekning. En person sitter akkurat midt i toget, mens en annen står på bakken utenfor. To lyn slår ned, ett i forenden av toget og ett i bakenden. Begge lynene forgreiner seg slik at de setter merker både på bakken og på endene av toget. Dette for at vi i ettertid kan gå og kontrollere hvor nedslagene skjedde, slik at det ikke er noen tvil om posisjonene.



Sett fra observatøren på bakken skjer tre ting samtidig: begge lynene slår ned, og midten av toget, der personen sitter, passerer der han står. Han kan etterpå sjekke at lynene slo ned akkurat like langt på hver side, slik at han stod midt i mellom nedslagspunktene. Det er viktig å huske at det vi snakker om her ikke er tidspunktene han ser disse hendelsene, men tidspunktet han mener de

faktisk skjedde. Siden lyset bruker tid på å bevege seg fra lynnedslagene til ham, vil han se at midten av toget passerer først siden dette er nærmere ham, og så ser han lyset fra lynene. Han mener altså at disse hendelsene skjedde samtidig når han tar hensyn til tida lyset har brukt.

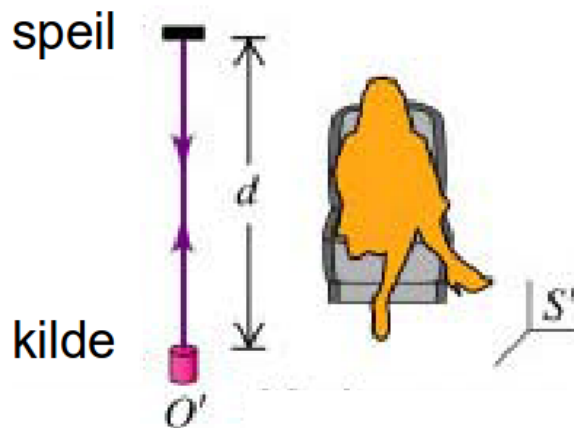


Fortsatt sett fra observatøren på bakken sitt referansesystem vil lyspulsene bevege seg symmetrisk inn mot midtpunktet. Men mens dette skjer flytter toget seg framover, og dermed kommer lyspulsene fra lynet foran på toget til å treffe observatøren i midten først, og den fra bakenden litt etter. Denne rekkefølgen må være den samme for alle observatører, også for den som sitter på midten av toget. Siden hun kan måle at hun sitter akkurat på midten av toget og at lynene faktisk slo ned akkurat på endene konkluderer hun med at lynet foran slo ned før lynet bak.

De to observatørene er altså ikke enige om hva som skjer samtidig.

Tidsdilatasjon og lengdekontraksjon

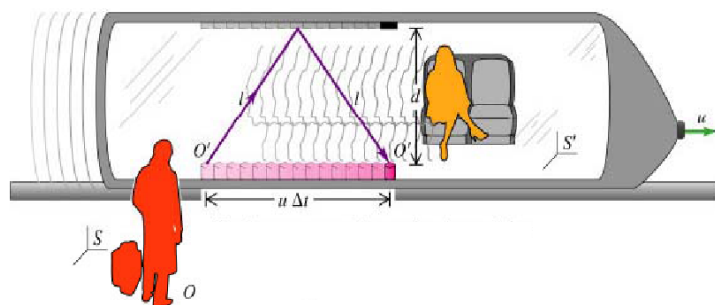
Ikke bare samtidighet, men også lengden på tidsintervaller er forskjellig for forskjellige observatører. En person sitter som før på et tog (system S') med en lyskilde og et speil i avstanden d . En lyspuls sendes fra kilden, reflekteres i speilet og går tilbake til kilden.



Tiden det tar i system S' er

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

En person som står stille utenfor toget (system S) observerer det samme, men siden toget beveger seg må lyset gå på skrå for å komme tilbake til kilden.



Skrålinja har lengden

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Siden lyset går like fort for begge observatører, men strekningen er lengre i S må tida det tar også være lengre. Vi har tida i S er

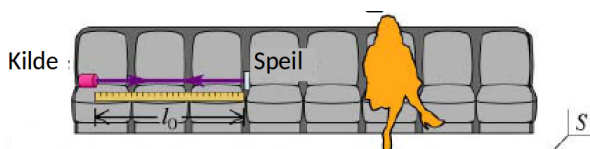
$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Her inngår Δt på høyresiden, og for å få et eksplisitt uttrykk må vi løse for Δt og finner

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0, \quad \gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Her kaller vi $\gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0$ for egentiden, siden det er den tiden som er målt i et referansesystem der klokka er i ro. Vi har altså vist at tiden i system S der klokka beveger seg er lengre enn egentiden ($\gamma > 1$). En annen måte å si det på er at klokker i bevegelse går saktere enn klokker i ro. Dette kalles tidsdilatasjon.

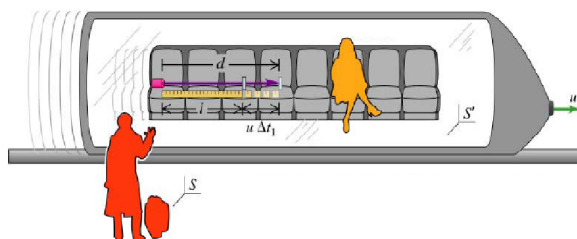
Vi kan gjøre et tilsvarende tankeeksperiment for måling av lengde hvis vi snur kilden og speilet slik at lyset beveger seg parallelt med retningen til toget. I system S' der toget og apparatet er i ro er avstanden mellom kilde og speil $l' = l_0$ som vi kaller hvilelengden.



Tida det tar for lyset å gå fram om tilbake er da

$$\Delta t' = \frac{2l_0}{c}.$$

I system S vil lyset bevege seg en lengre strekning fra kilde til speil, siden speilet beveger seg bortover mens lyset er underveis.



Strekningen lyset beveger seg fra kilde til speil er avstanden l mellom kilde og speil sett i system S pluss strekningen speilet beveger seg mens lyset går fra kilden til speilet

$$d_1 = l + v\Delta t_1$$

der Δt_1 er tida lyset bruker fra kilde til speil. Siden lyset går med lysfarta uansett vet vi også at $d_1 = c\Delta t_1$. Dermed er

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v}.$$

På vei tilbake til kilden får lyset kortere strekning å gå siden kilden beveger seg mot lyset slik at strekningen blir

$$d_2 = l - v\Delta t_2 = c\Delta t_2.$$

Dermed blir

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v}.$$

Den totale tida blir (sjekk regninga selv)

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \gamma^2 \frac{2l}{c}.$$

Fra før vet vi at tidene i de to systemene ikke er like men relatert ved $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Setter vi inn uttrykkene over får vi

$$l = \frac{l_0}{\gamma}.$$

Lengden målt av en som står på bakken er altså mindre enn hvilelengden. Dette kalles lengdekontraksjon.