

Fys1100 H2024

Uke 10, 28/10

Beskjeder

- Eksperiment 2: Vi gjennomfører i morgen for dem som ikke gjorde det forrige uke.

Tema for uka

- Denne ukas stoff er lite dekket i lærebøkene, men fint forklart her: Knut Mørken, Numerical Algorithms and Digital Representation (kompendium i MAT-INF1100)
- Numerisk løsning av difflikninger (Mørken 13.1, 13.2).
- Eulers metode (Mørken 13.3)
- Eulers midpunktmetode (Mørken 13.4)
- Høyere ordens likninger og systemer av koblede likninger (Mørken 13.5)
- Euler-Cromer metoden (AMS 4.2)

Eulers metode

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0$$

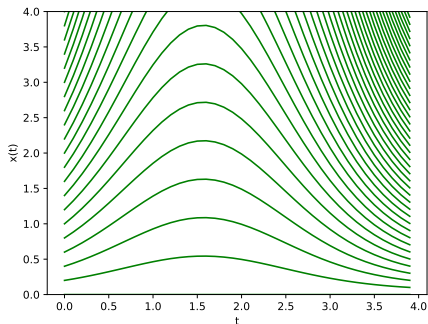
$$\dot{x} \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i)\Delta t.$$

Geometrisk bilde

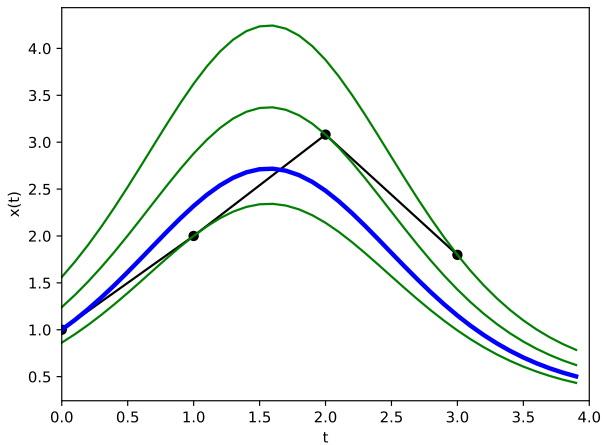
$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0$$

Beskriver en familie av løsninger, en for hver x_0 .



Gjennom ethvert punkt (t, x) går det en entydig bestemt løsning.

Eulers metode følger tanngenten i startpunkt



Feil som funksjon av Δt

Taylors formel med restledd

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(u)\Delta t^2 = x(t) + f(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(u)\Delta t^2$$

med $u \in [t, t + \Delta t]$. Eulers metode med $x_i = x(t)$ og $t_i = t$ tilnærmer $x(t + \Delta t)$ med

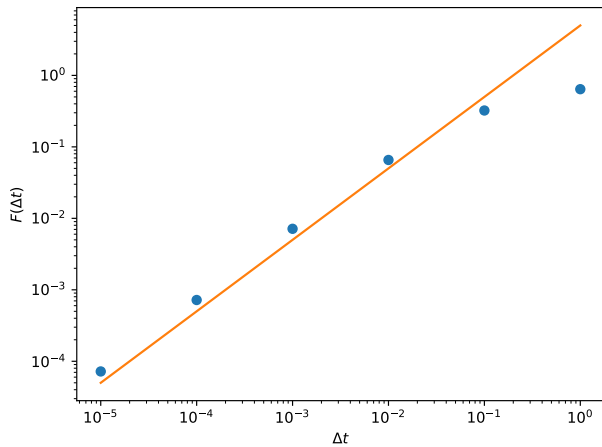
$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i)\Delta t.$$

Feilen i ett tidssteg er da

$$F_1(\Delta t) = x(t + \Delta t) - x_{i+1} = \frac{1}{2}\ddot{x}(u)\Delta t^2.$$

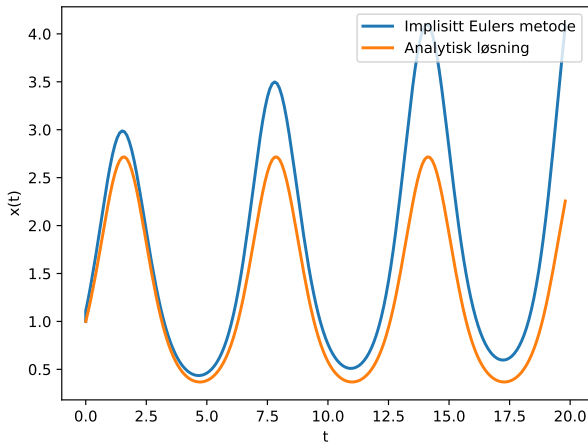
Hvis vi numerisk løser likninga fra starttida $t = 0$ til en sluttid T er antallet steg vi gjør $N = T/\Delta t$

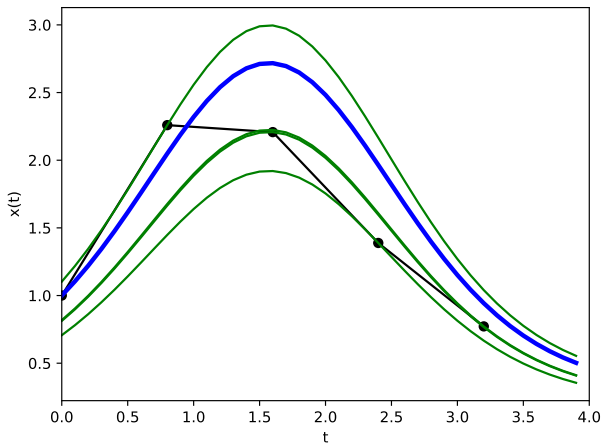
$$F_T(\Delta t) \propto N\Delta t^2 = T\Delta t.$$



Implisitt Eulers metode

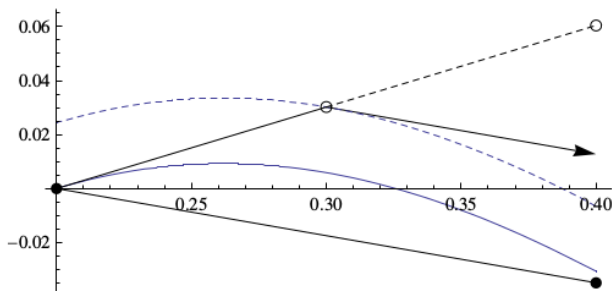
$$x_{i+1} = x_i + f(x_{i+1}, t_{i+1})\Delta t.$$





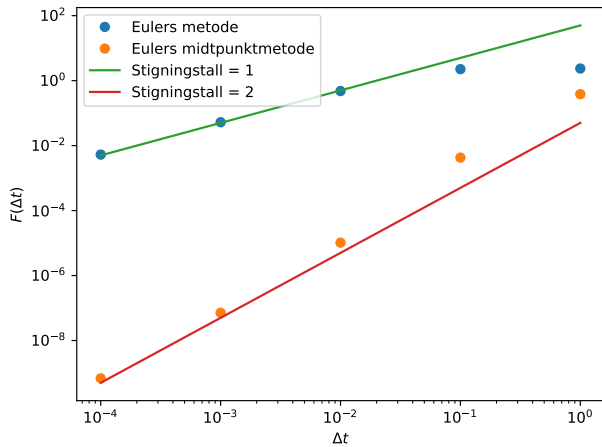
Eulers midtpunktmetode

$$\dot{x} \approx \frac{x(t + \Delta t/2) - x(t - \Delta t/2)}{\Delta t}.$$



$$x_{i+1/2} = x_i + f(x_i, t_i) \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_{i+1} = x_i + f(x_{i+1/2}, t_i + \Delta t/2) \Delta t$$



Høyere ordens difflikninger kan omgjøres til sett av koblede første ordens likninger

Eksempel: Harmonisk oscillator

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

$$\dot{x} = v$$

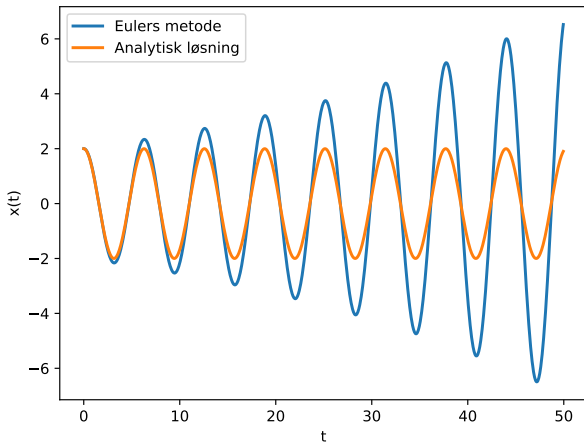
$$\dot{v} = -\omega^2 x.$$

Eulers metode for disse gir uttrykkene

$$v_{i+1} = v_i - \omega^2 x_i \Delta t$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t.$$

Med steglengden $\Delta t = 0.05$



Euler-Cromer metoden

Vi bytter ut

$$v_{i+1} = v_i - \omega^2 x_i \Delta t$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{i+1} \Delta t.$$

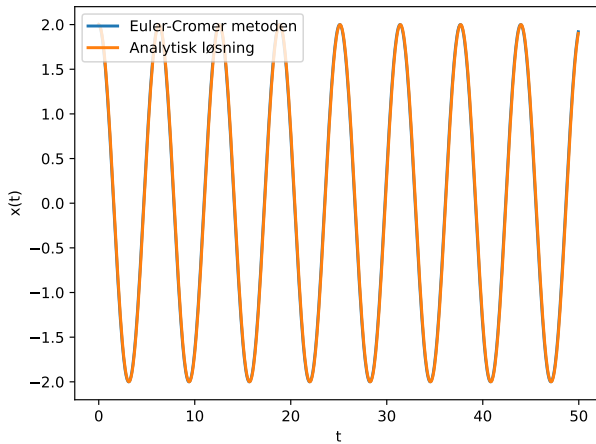
med

$$v_{i+1} = v_i - \omega^2 x_i \Delta t$$

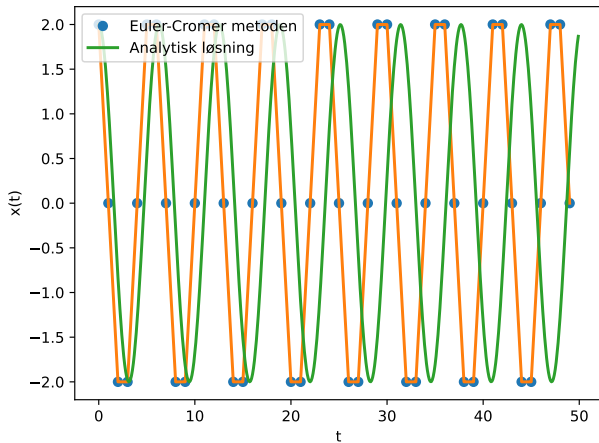
$$x_{i+1} = x_i + v_{i+1} \Delta t.$$

Dette er som å regne ut v med Eulers metode og x med implisitt Eulers metode.

Med steglengden $\Delta t = 0.05$ som over får vi



Med steglengden $\Delta t = 1$ (som er altfor mye!)



Vi kan også undersøke hvor stor feil vi får som funksjon av Δt . Her har vi brukt Eulers metode, Eulers midtpunktmetode og Euler-Cromer metoden.

