

Fys1100 H2024

Uke 13, 22/11

Beskjeder

- Eksamensverksted mandag 2/12 kl 10-12 på StoreFy lesesal. Her kan du spørre om alt du lurer på før eksamen.

Tema for uka

- Relativitetsteoriens postulater (AMS 18.1)
- Relativitet av samtidighet (AMS 18.2)
- Tidsdilatasjon og lengdekontraksjon (AMS 18.3).
- Lorentztransformasjonen (AMS 18.3)
- Romtidsdiagrammer (Forelesning)
- Transformasjon av hastighet (AMS 18.4)
- Relativistisk bevegelsesmengde (Forelesning)
- Relativistisk energi (Forelesning)

Oppfatninger på slutten av 1800-tallet

Alle typer bølger trenger et *medium* å bre seg i

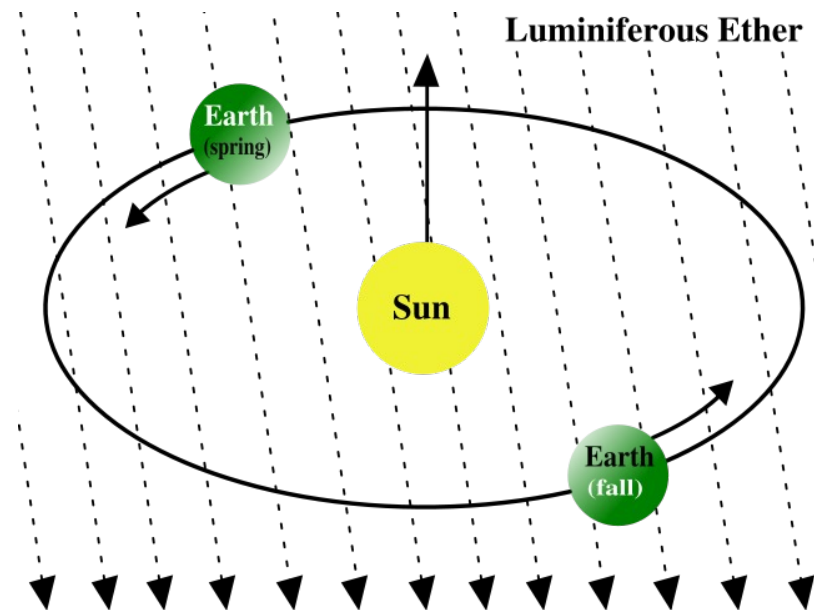
konsekvens: verdensrommet må være fylt av «eter»
«*ether*» slik at lysbølger kan forplante seg

- må være overalt: vi ser stjerner
- planetene går gjennom uten motstand

konsekvens: jorden beveger seg relativt til eteren

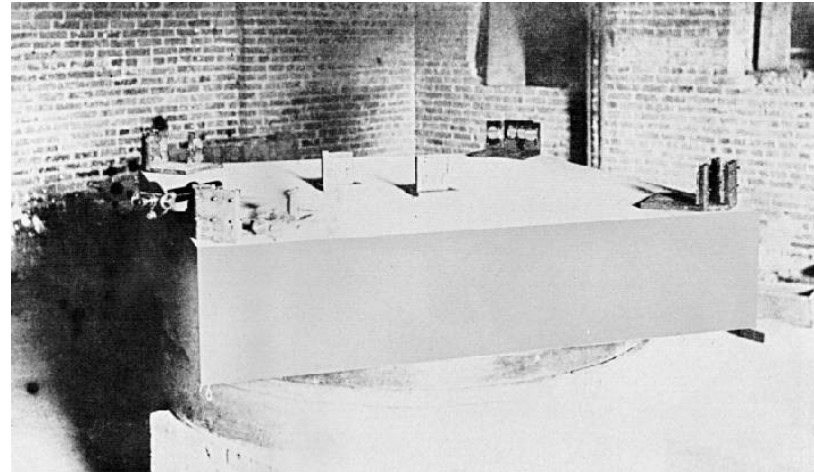
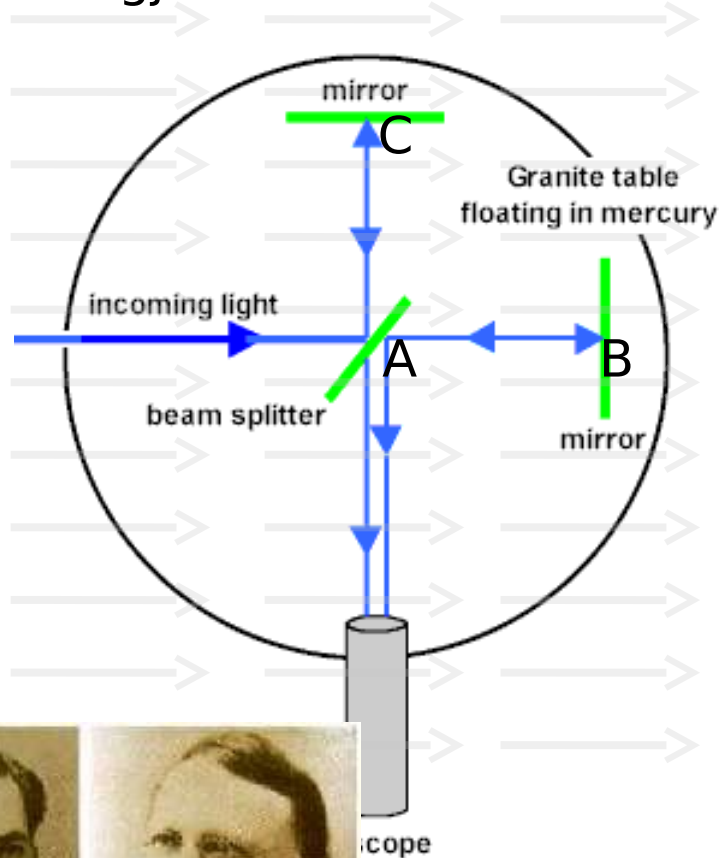


lysets hastighet på jorden er
avhengig av retningen *relativt* til
eteren



Michelson-Morley-eksperimentet (1887)

Hensikt: påvise effekten av jordens bevegelse gjennom eteren



Forventet å se *interferens*



A.A. Michelson
1852 - 1931

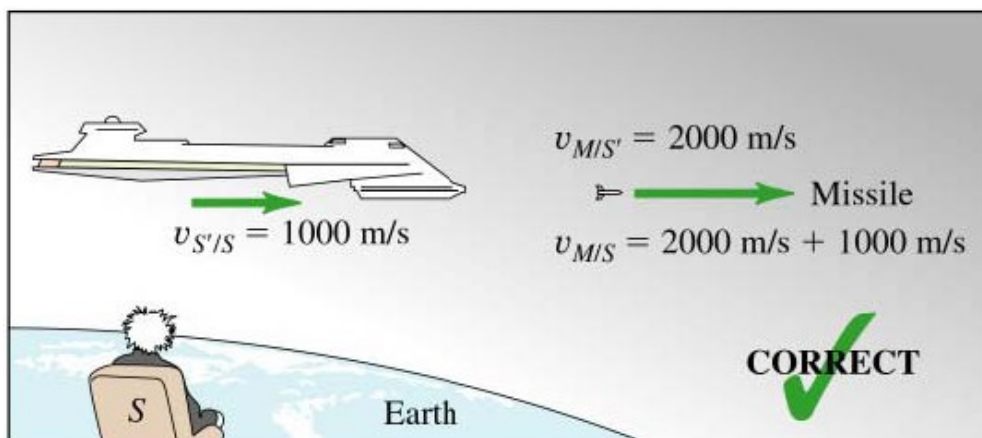
E.W. Morley
1838 - 1923

Fant **ingen** effekt!
Lyshastigheten er den samme uansett hvilken retning den måles!

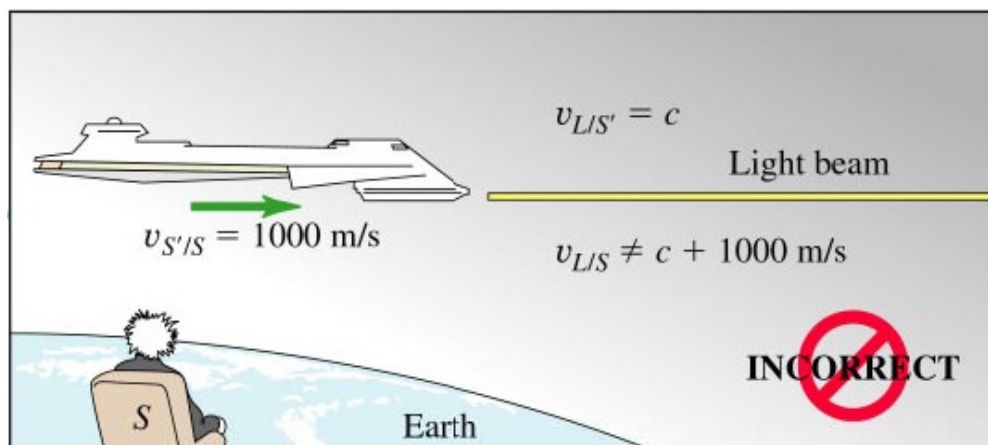
Relativitetsteoriens postualter

1. Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.

2. Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer, og er uavhengig av observatørens bevegelse.

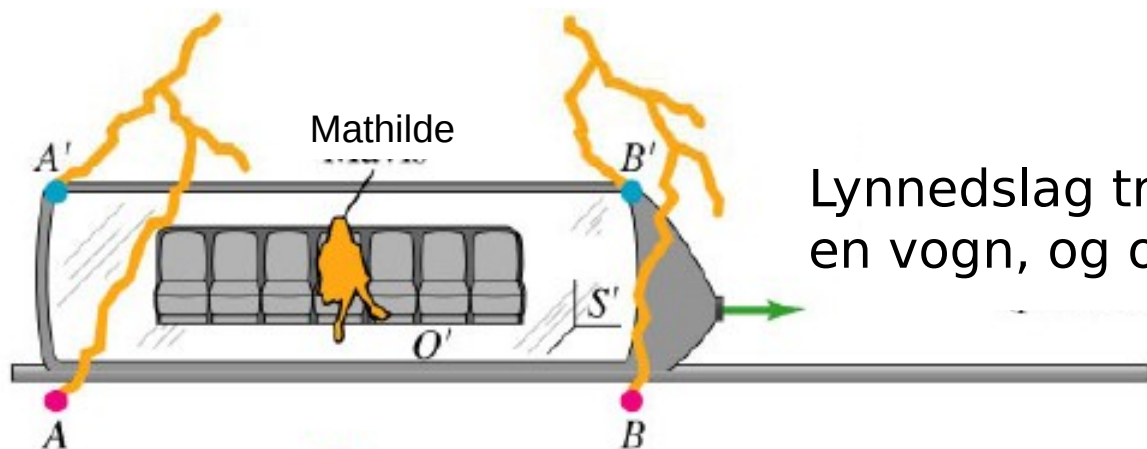


Newtons mekanikk

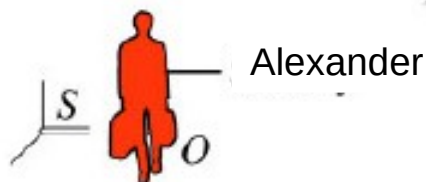


er **ikke lenger gyldig** for å beskrive hvordan lys oppfører seg!

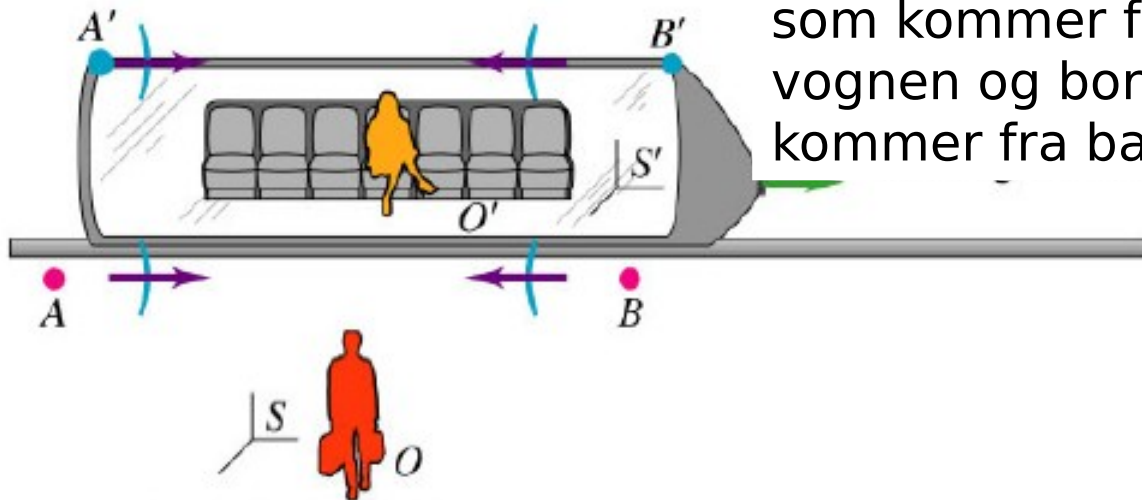
Relativitet av samtidighet

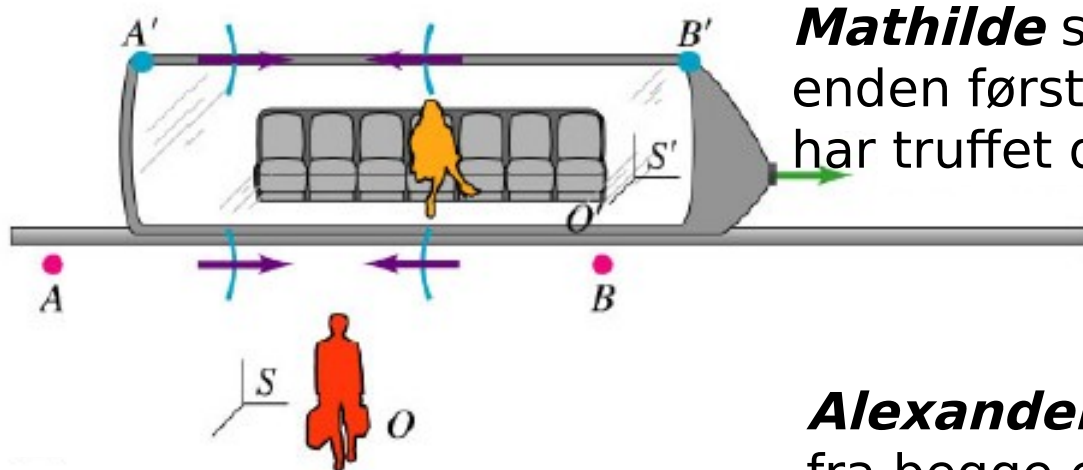


Lynnedslag treffer begge endene av en vogn, og også bakken



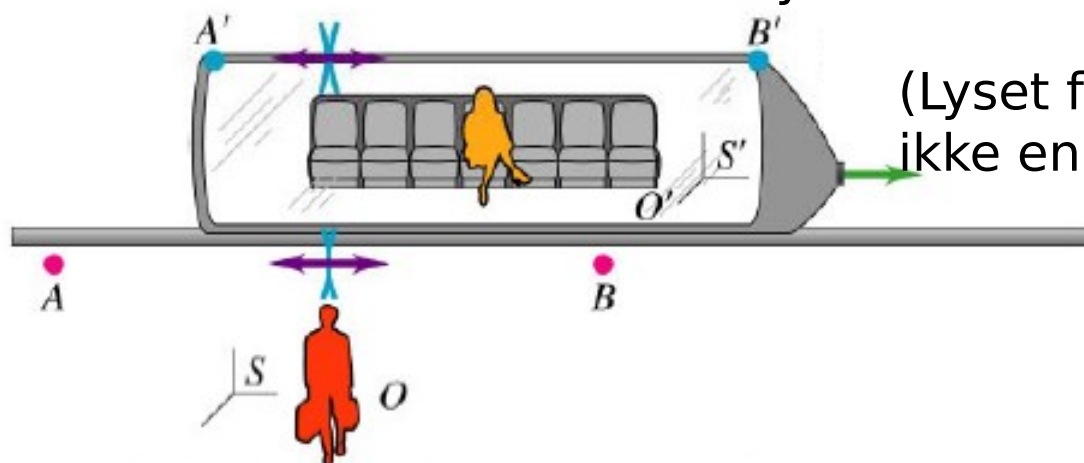
Mathilde beveger seg mot lysbølgen som kommer fra den fremre enden av vognen og bort fra lysbølgen som kommer fra bakre enden.





Mathilde ser lyset fra den fremre enden først; hun konkluderer at lynet har truffet den fremre enden først.

Alexander ser lyset kommer samtidig fra begge endene; han konkluderer at lynet har truffet begge endene samtidig.

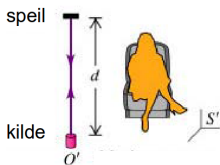


(Lyset fra den bakre enden har ikke ennå kommet til Mathilde.)

To hendelser:

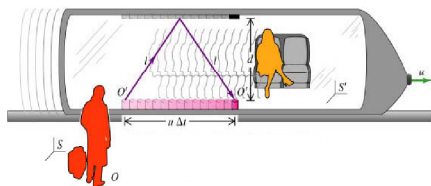
1. lyn treffer fremre enden
 2. lyn treffer bakre enden
- Hendelsene er **samtidige** i system S (Alexander), men **ikke samtidige** i system S' (Mathilde)

Tidsdilatasjon



En person befinner seg i toget (system S') og måler tidsintervallet mellom to hendelser:

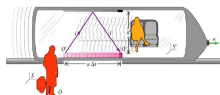
- 1 et lysglimt er sendt ut fra en kilde i O'
- 2 lyset er påvist i en detektor på samme sted etter refleksjon av et speil i avstand d



En annen person står på plattformen (system S). I system S inntreffer de to hendelsene på forskjellige steder. Lyset beveger seg med samme hastighet, men distansen er lengre. Det tar dermed lengre tid i system S

Skrålinja har lengden

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$



Siden lyset går like fort for begge observatører, men strekningen er lengre i S må tida det tar også være lengre. Vi har tida i S er

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Her inngår Δt på høyresiden, og for å få et eksplisitt uttrykk må vi løse for Δt og finner

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$\Delta t' = \Delta t_0$ kalles egentiden, siden det er den tiden som er målt i et referansesystem der klokka er i ro. Siden $\gamma > 1$ er $\Delta t > \Delta t_0$.

Lengdekontraksjon



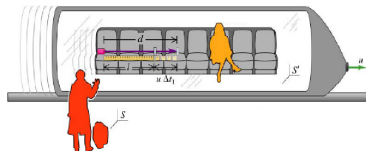
Linjalen er i ro i system S' og har lengden l_0 (hvilelengde). Lyset når speilet og tilbake til kilden i et tidsintervall

$$\Delta t' = \frac{2l_0}{c}.$$

Hvis l er strekningen mellom kilde og speil sett i system S er

der Δt_1 er tida lyset bruker fra kilde til speil og $d_1 = c\Delta t_1$.

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v}.$$



På vei tilbake til kilden får lyset kortere strekning å gå siden kilden beveger seg mot lyset slik at strekningen blir

$$d_2 = l - v\Delta t_2 = c\Delta t_2.$$

Dermed blir

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v}.$$

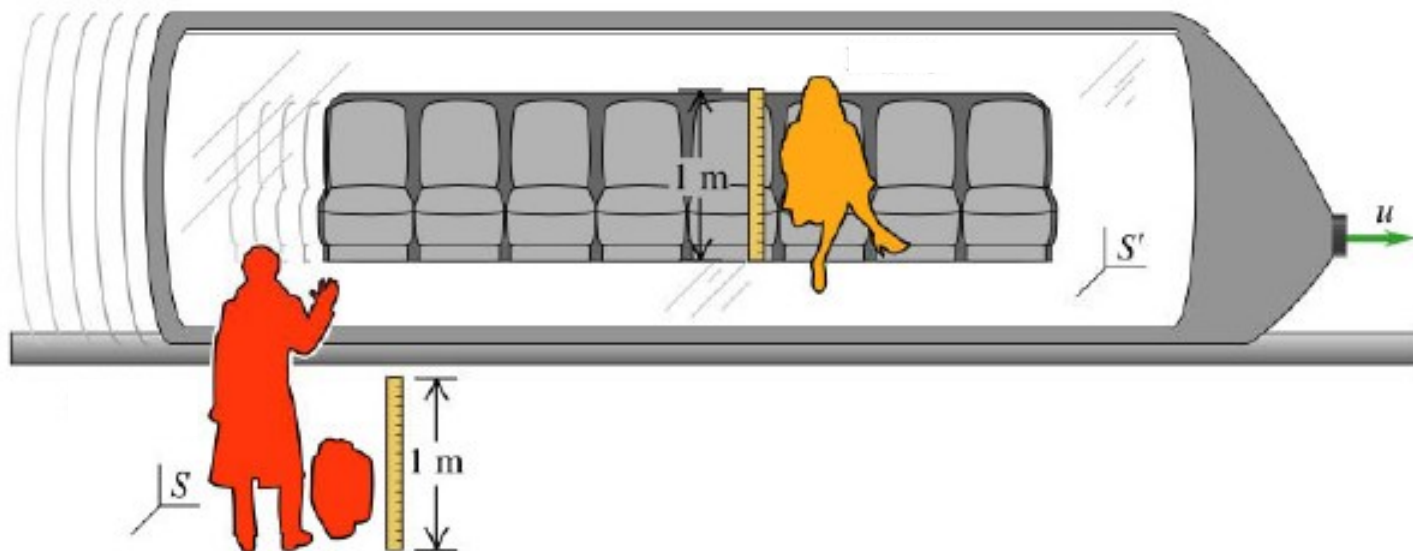
Den totale tida blir

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \gamma^2 \frac{2l}{c}.$$

Fra før vet vi at tidene i de to systemene ikke er like men relatert ved $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Setter vi inn uttrykkene over får vi

$$l = \frac{l_0}{\gamma}.$$

Lengden målt av en som står på bakken er altså mindre enn hvilelengden. Dette kalles lengdekontraksjon.



Det er *ingen* lengdekontraksjon
vinkelrett på bevegelsesretningen

Lorentztransformasjonen

Transformasjon tilbake:
omvendt fortegn for u og bytte S og S'

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$y' = y$$

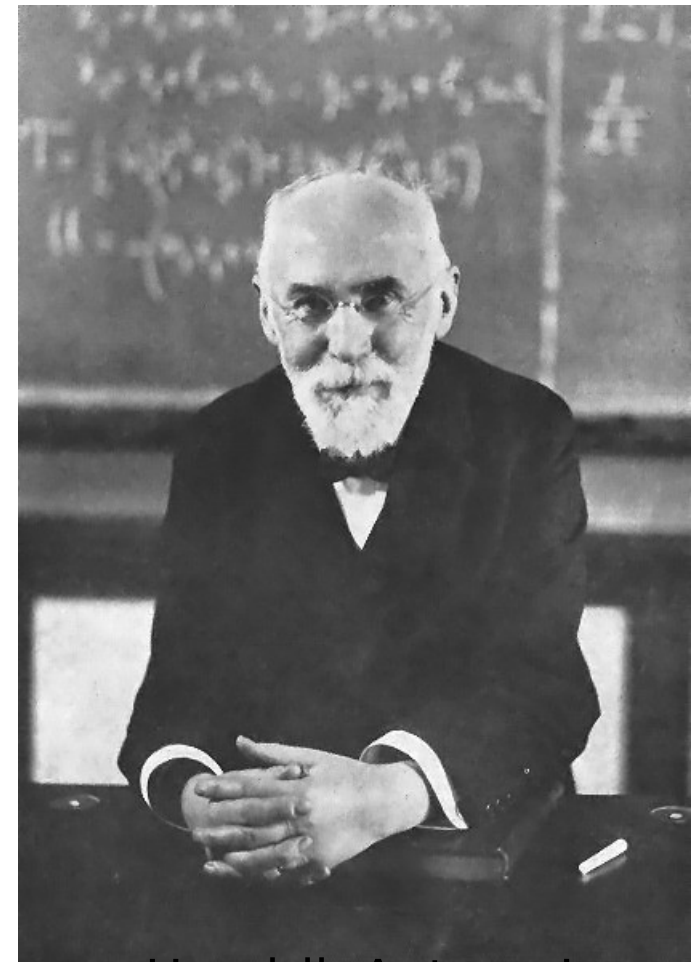
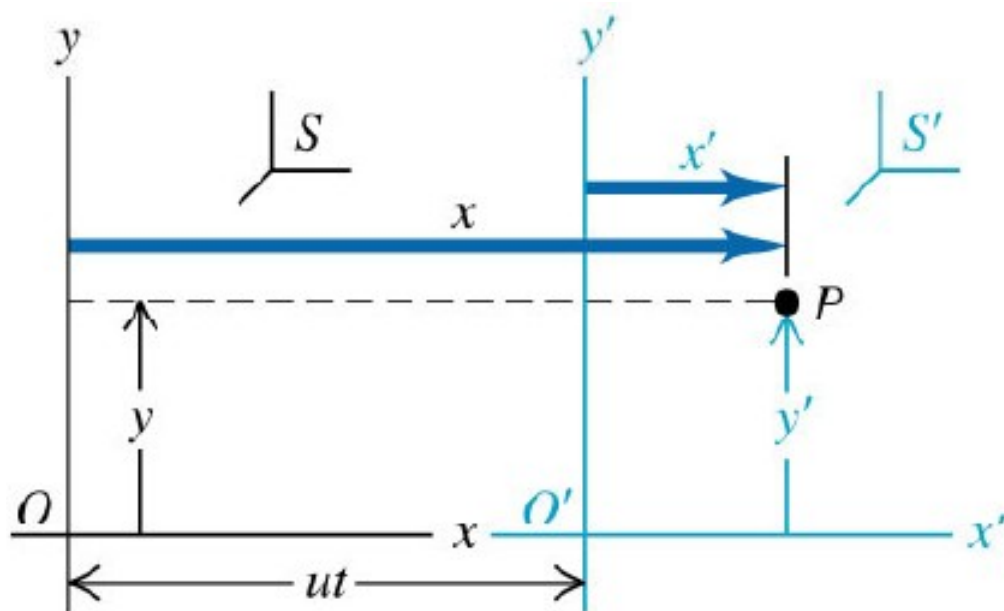
$$y = y'$$

$$z' = z$$

$$z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$



Hendrik Antoon Lorentz
1853 – 1928

Lorenztransformasjoner

Vi har to referansesystemer, S og S' , i relativ bevegelse med fart u langs x -aksen. Origo i de to systemene passerer hverandre ved $t = t' = 0$ og ved det tidspunktet sendes det ut en lyspuls som brer seg utover med lysfarta i alle retninger. Siden lysfarta er den samme i begge systemer må vi ha

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

Siden den relative bevegelsen er i x -retning er $y = y'$ og $z = z'$. Videre ser vi bare på punkter der $y = z = 0$. Vi tipper at

$$x' = \gamma(x - ut), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

Her er γ foreløpig en vilkårlig konstant, vi må bestemme den seinere.

Da er

$$\begin{aligned}x'^2 - c^2 t'^2 &= \gamma^2(x^2 - 2xut + u^2 t^2) - c^2 \gamma^2(t^2 - 2\frac{u}{c^2}tx + \frac{u^2}{c^4}x^2) \\&= \gamma^2(x^2 + u^2 t^2 - c^2 t^2 - \frac{u^2}{c^2}x^2).\end{aligned}$$

For alle punkter som ligger på lyspulsen er $x^2 = c^2 t^2$, og vi ser at da er også $x'^2 = c^2 t'^2$. Det viser at

$$x' = \gamma(x - ut), \quad t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x)$$

gir den riktige transformasjonen mellom koordinatene i de to systemene. Denne kalles Lorentztransformasjonen. For å bestemme γ utleder vi tidsdilatasjonen fra Lorentztransformasjonen og krever at den er lik det uttrykket vi fant over.

Tidsdilatasjon

Vi ser på tida mellom to hendelser

- ① Origo i de to systemene passerer hverandre. Denne hendelsen har koordinatene

$$x_1 = x'_1 = 0, \quad t_1 = t'_1 = 0.$$

- ② Klokka viser en bestemt tid Δt_0 . Siden klokka ligger i ro i S' er dette egentida til tidsintervallet mellom de to hendelsene. Koordinatene er

$$x'_2 = 0, \quad t'_2 = \Delta t_0.$$

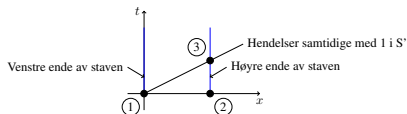
Vi finner tidspunktet for denne hendelsen i S

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2) = \gamma\Delta t_0.$$

Siden begge starter tidsmålinga ved hendelse 1 er

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0$$

Lengdekontraksjon



Hendelser

- ① Posisjonen $x_1 = 0$ til venstre endepunkt ved $t_1 = 0$.
- ② Posisjonen $x_2 = l_0$ til høyre endepunkt ved $t_2 = 0$.
- ③ Der høyre endepunkt av staven er samtidig som venstre endepunkt er i origo i S'

Med Lorentztransformasjonen kan vi finne koordinatene til disse hendelsene i S'

$$x'_1 = 0, \quad t'_1 = 0$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) = \gamma l_0, \quad t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = -\gamma \frac{v}{c^2} l_0.$$

Vi ser at de to hendelsene ikke er samtidige i S' (det kunne vi nok gjettest på forhånd). Dermed er ikke avstanden mellom dem det samme som lengden målt i S' . For å finne lengden må vi sammenlikne samtidige hendelser. Hvilke hendelser er samtidige med hendelse 1 i S' ? De med

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = 0$$

som betyr

$$t = \frac{v}{c^2}x.$$

Koordinatene til hendelse ③ er

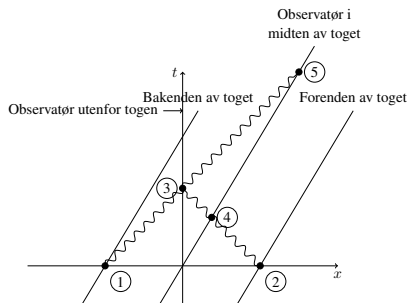
$$x_3 = l_0, \quad t_3 = \frac{v}{c^2} l_0$$

$$x'_3 = \gamma(x_3 - vt_3) = \gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})l_0 = \frac{l_0}{\gamma}, \quad t_3 = 0.$$

Dermed er lengden målt i S'

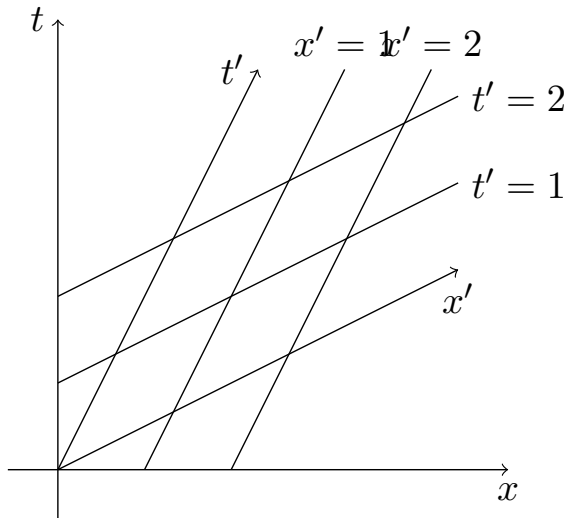
$$l = \frac{l_0}{\gamma}.$$

Romtidsdiagram

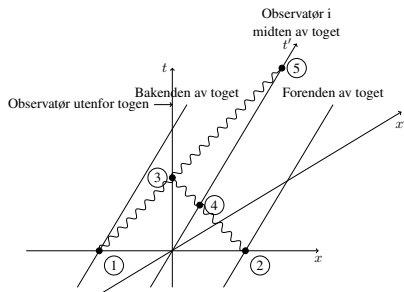


- ① Lynet slår ned i bakenden av toget
- ② Lynet slår ned i framenden av toget
- ③ Lyset fra begge lynene når observatøren utenfor toget
- ④ Lyset fra lynet foran i toget når observatøren midt i toget
- ⑤ Lyset fra lynet bak i toget når observatøren midt i toget

Samtidighet

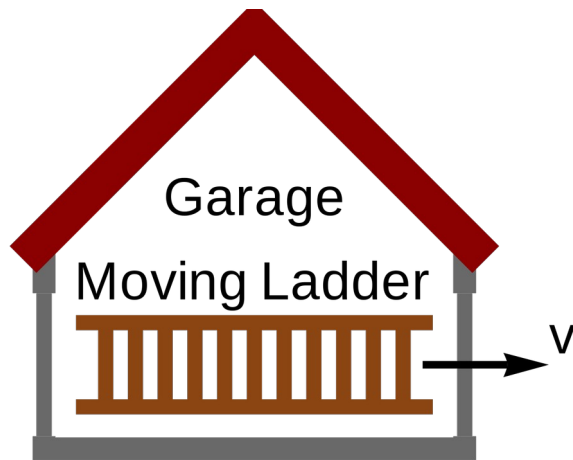
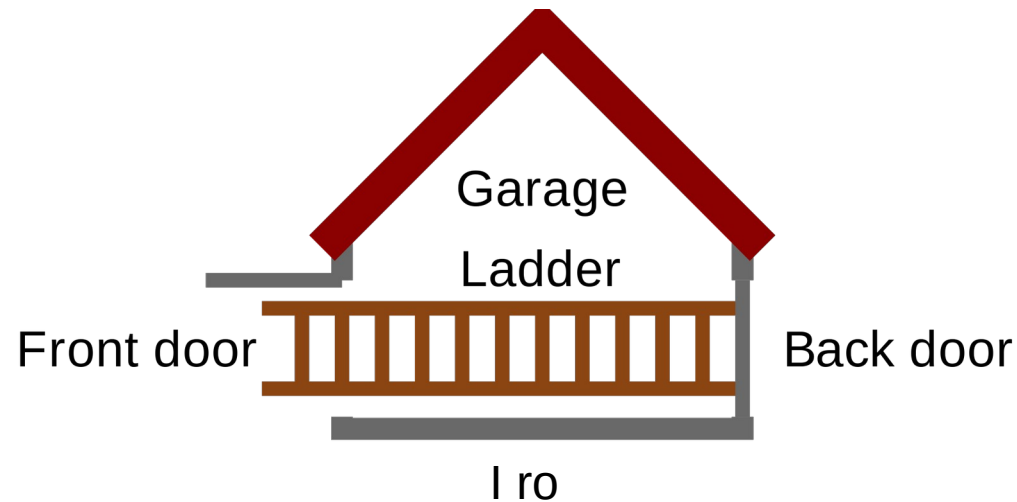


Romtidsdiagram

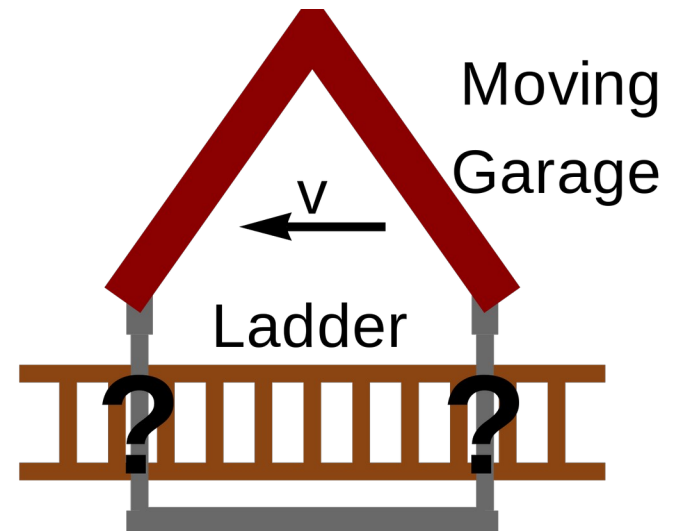


- ① Lynet slår ned i bakenden av toget
- ② Lynet slår ned i framenden av toget
- ③ Lyset fra begge lynene når observatøren utenfor toget
- ④ Lyset fra lynet foran i toget når observatøren midt i toget
- ⑤ Lyset fra lynet bak i toget når observatøren midt i toget

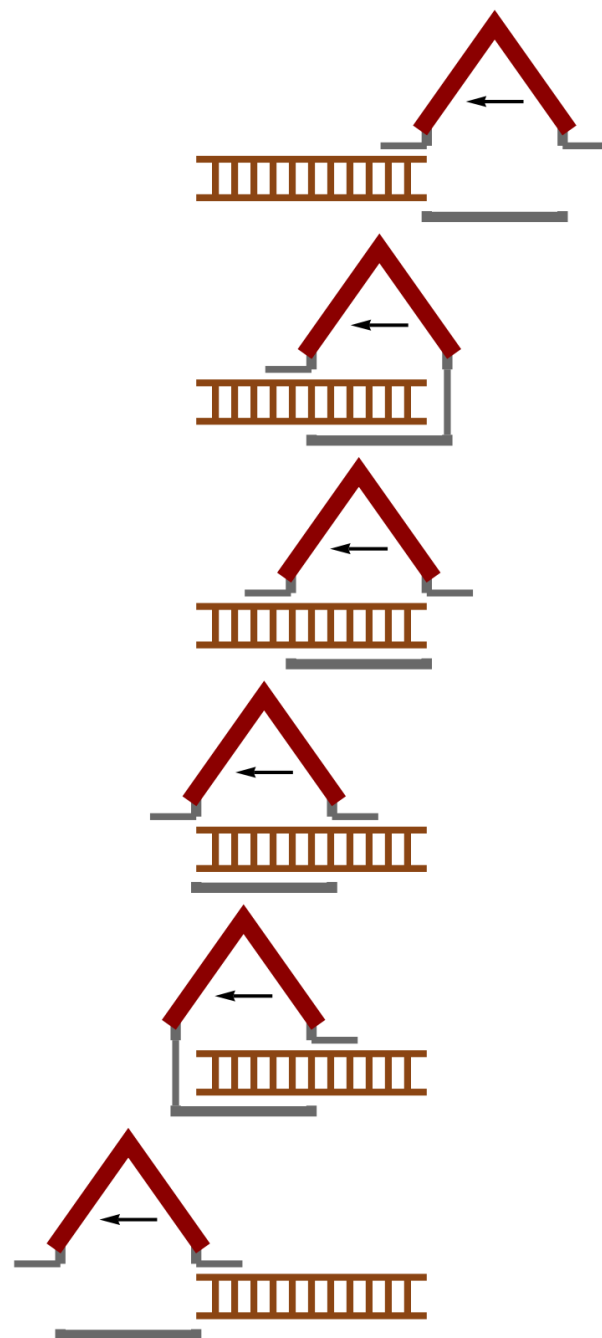
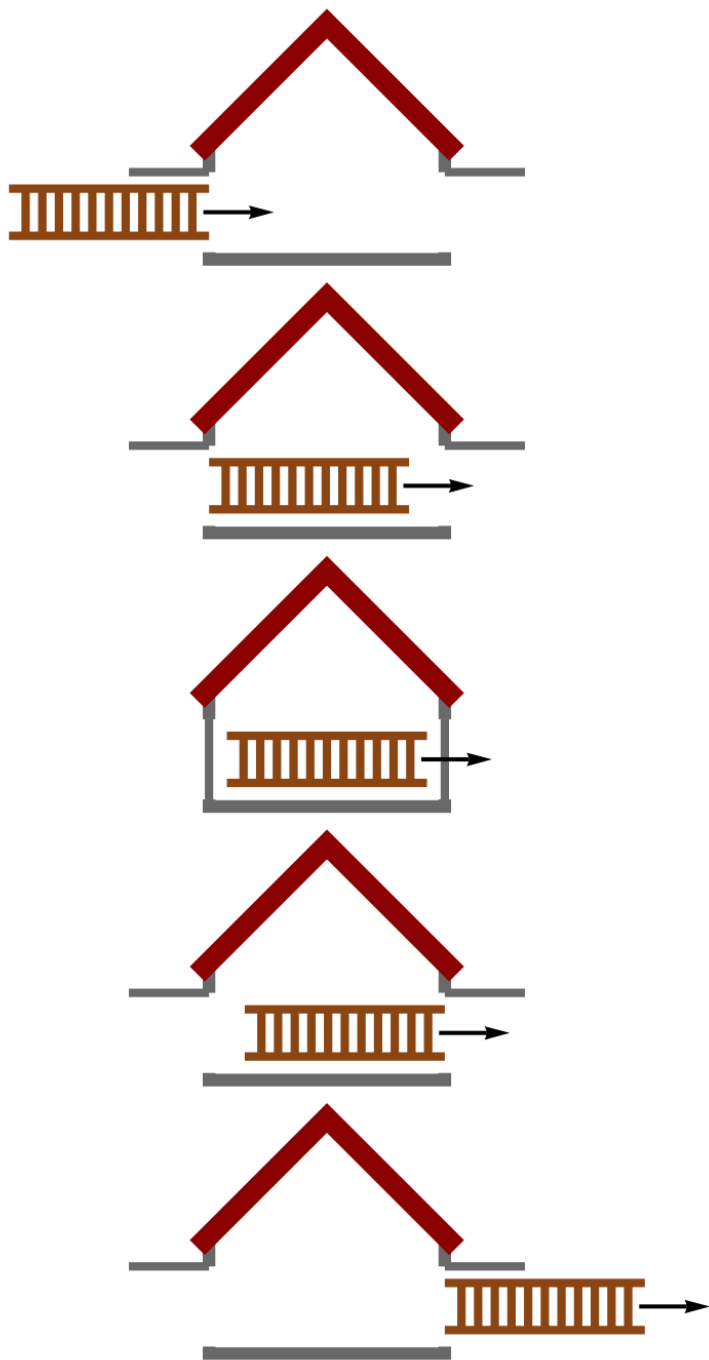
Stige i garasje-paradokset



Stige i bevegelse,
System S



Garasje i bevegelse,
System S'



Stige i garasje-paradokset

Vi ser på fire hendelser

- ① Høyre ende av stigen passerer venstre dør.
- ② Venstre ende av stigen passerer venstre dør.
- ③ Høyre ende av stigen passerer høyre dør.
- ④ Venstre ende av stigen passerer høyre dør.

Vi definerer koordinatsystemene ved at hendelse 1 har koordinater

$$(x_1, t_1) = (x'_1, t'_1) = (0, 0).$$

Hendelse 2:

$$x_2 = 0, \quad t_2 = \frac{l}{u} = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) = -\gamma l = -l_0 = -5 \text{ m.}$$

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = \frac{l_0}{u} = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

Hendelse 3:

$$x_3 = L_0 = 4 \text{ m}, \quad t_3 = \frac{L_0}{u} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

$$x'_3 = \gamma(x_3 - vt_3) = -\gamma(L_0 - v\frac{L_0}{u}) = 0.$$

$$t'_3 = \gamma(t_3 - \frac{v}{c^2}x_3) = \frac{L}{u} = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s} < t'_2.$$

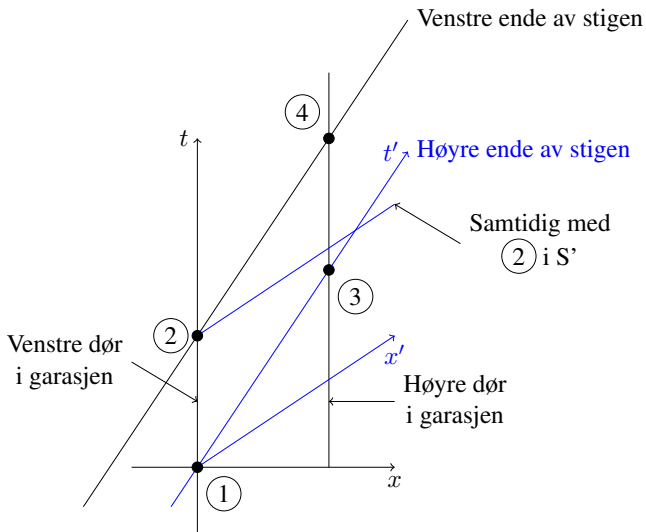
Hendelse 4:

$$x_4 = L_0 = 4 \text{ m}, \quad t_4 = t_2 + \frac{L_0}{u} = \frac{l_0}{\gamma u} + \frac{L_0}{u}.$$

$$x'_4 = \gamma(x_4 - vt_4) = -\gamma(L_0 - v\frac{L_0}{u} + \frac{L_0}{u}) = -l_0.$$

$$t'_4 = \gamma(t_4 - \frac{v}{c^2}x_4) = t'_3 + \frac{l_0}{u}.$$

Det viktigste vi leser ut av dette er at $t'_3 < t'_2$ som stemmer med det vi ressonerte oss fram til over: I S' er det slik at hendelse 3 skjer før hendelse 2.



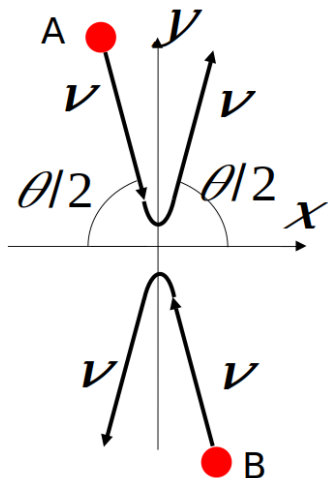
Transformasjon av hastighet

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)$$

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Relativistisk driv



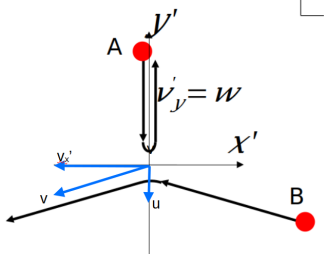
Vi ser på en elastisk kollisjon mellom to partikler som i utgangspunktet har lik masse og motsatte hastigheter.

Vi tipper at driv fortsatt er i samme retning som hastighetsvektoren, dvs at

$$\vec{p} = m_v \vec{v}$$

Vi vil bestemme m_v ved å kreve at driv fortsatt er bevart i kollisjoner

Referansesystem S' følger
partikkel A

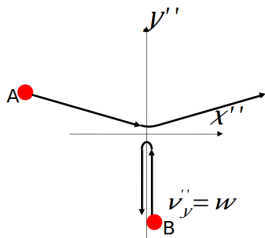


$$\Delta p_A = 2m_w w.$$

$$\Delta p_B = 2m_v u$$

$$m_w w = m_v u.$$

Referansesystem S'' følger
partikkel B ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_x'^2/c^2}}$).



$$t' \quad x' = 0 \quad y' = wt'.$$

$$t'' = \gamma(t' + \frac{v'_x}{c^2}x') = \gamma t' \quad y'' = y'$$

$$u = \frac{y''}{t''} = \frac{w}{\gamma}.$$

$$m_w = \frac{m_v}{\gamma}.$$

For å finne sammenhengen vi ønsker tar vi grensa der $w \rightarrow 0$. Da blir $v'_x \approx v$ og

$$m_0 = m_v \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Dermed er

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Relativistisk energi

Vi regner ut arbeidet som skal til for å akselerere et legeme med massen m til farta v

$$\begin{aligned} W &= \int F ds = \int \frac{dp}{dt} ds = \int v dp = \gamma m v^2 - \int \gamma m v dv \\ &= \gamma m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 \int w^{-1/2} dw = \gamma m c^2 + C. \end{aligned}$$

Integrasjonskonstanten besetemmer vi ut fra at arbeidet er null når farta er null, som gir $C = -mc^2$. Dermed har vi det relativistiske uttrykket for kinetisk energi

$$K = \gamma m c^2 - m c^2.$$

Når farta er null har vi hvileenergien (eller masseenergien)

$$E = m c^2.$$

Når $v \ll c$

Vi kan også sjekke at for lav fart ($v \ll c$) gjelder tilnærmet det vanlige uttrykket for kinetisk energi. Vi Taylorutvikler

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

og får dermed

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) mc^2 - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \dots$$