

FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2024

Forelesning uke 7: Kort repetisjon av Taylorrekker.

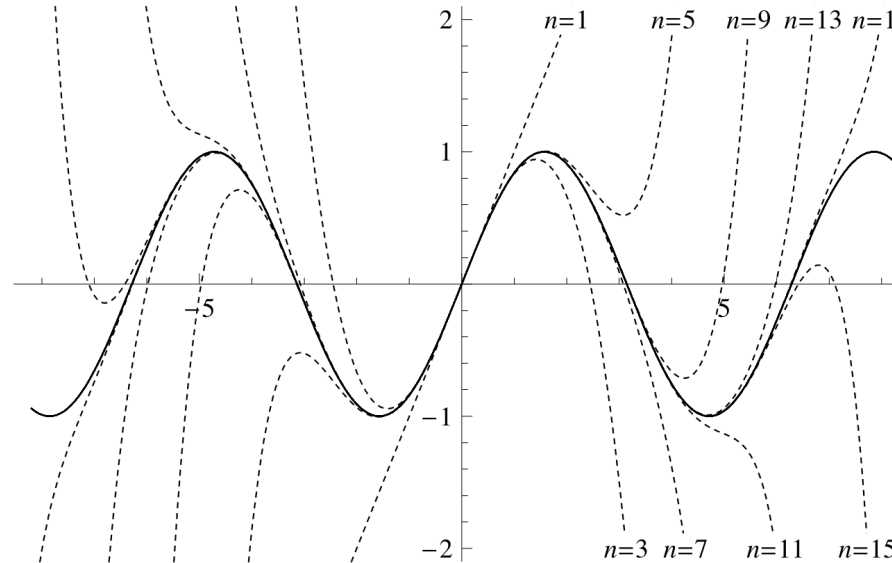
Svingninger, analytisk løsning av 2.ordens diff-ligninger

(Kalkulus 11.1, 11.2, 12.8 (Taylor), 10.5, 10.7 (diff-lign.), AMS 9.3.2, 5.7)

Læringsmål: Bruke **Taylorrekker** (Taylorpolynomer) for tilnærme funksjoner, **svingefenomener**, **analytisk løsning av 2. ordens diff-ligninger**

Beskjeder:

- ✓ **Frist oblig 3 i dag – leveres i Canvas**
- ✓ Eksperiment 1: for de som ikke har fått gjort det, ny mulighet på seminartimen i morgen 😊
- ✓ Midtveiseksamen neste uke: 10. oktober kl. 09:00. Husk å sjekke hvor i Silurveien dere skal møte, møt i god tid!



3Blue1Brown-video
(takktil Tor Ole 😊)

Mandag 30.09.2024

Utdrag fra formelarket 🍷

Taylor-rekke til en funksjon $f(x)$ om funksjonsargumentet $x = a$:

$$T_n(f; a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a) \frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x-a)^2 \frac{d^2f(x=a)}{dx^2} + \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n \frac{d^nf(x=a)}{dx^n}$$

Restledd: $R_n(f; a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1}f(x=\zeta)}{dx^{n+1}}$ hvor $\zeta \in [x, a]$ er ukjent.

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:

$$q(x) \cdot \frac{dx}{dt} = p(t) \Rightarrow \int q(x) dx = \int p(t) dt \Rightarrow Q(x) = P(t) + C, \text{ med } \frac{dQ}{dx} = q(x) \text{ og } \frac{dP}{dt} = p(t)$$

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p \frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Rightarrow \text{Karakteristisk likn. } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \text{ med generelt to røtter } \lambda_1 \text{ og } \lambda_2.$$

Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$: $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$

Differensialligninger (repetisjon)

I en vanlig ligning er den ukjente et tall: $3 - x = 1$

I en differensialligning er den ukjente en funksjon.

Ligningen gir sammenhengen mellom den ukjente funksjonen og (noen av) dens deriverte.

Eget notat på diff-likninger på semestersiden, med eksempler! 😊 Se også:

https://www.matematikk.net/side/Introduksjon_til_differensiallikninger

matematikk.net Forside Fag Matteprat Eksamensoppgaver

Introduksjon til differensiallikninger

Innhold [skjul]

- 1 Innledning
- 2 Ordenen til en diff.ligning
- 3 Førsteordens lineære ligninger
 - 3.1 Homogene og inhomogene førsteordens diff.ligninger
 - 3.2 Integrerende faktor
 - 3.3 Separable differensiallikninger
- 4 Homogene lineære andreordens diff.ligninger med konstante koeffisienter
- 5 Initialverdiproblemer
- 6 Retningsdiagram

Taylorrekker: tilnærming til funksjoner

💡 **Ideen bak:** vi kan *tilnærme* en vanskelig funksjon med en enklere funksjon 👍



Brook Taylor
(1685-1731)



Colin Maclaurin
(1698-1746)

Taylorrekker: formalisme

[ lysbilde med skriblerier på iPad 

Gitt en reell eller kompleks funksjon $f(x)$ som er uendelig mange ganger deriverbar i et område (intervall) rundt funksjonsargumentet $x = a$ hvor a er i intervallet, så er Taylorrekka til funksjonen gitt ved

Eksempel: Taylorrekka til $\sin(x)$ rundt $x = 0$

[ lysbilde med skriblerier på iPad 

2.ordens homogene, lineære differensialligninger med konstante koeffisienter

Se også notat på semestersiden: https://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS1100/h24/diff ligninger_notat_2024.pdf

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p \frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Rightarrow$ Karakteristisk likn. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ med generelt to røtter λ_1 og λ_2 .

Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$: $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$

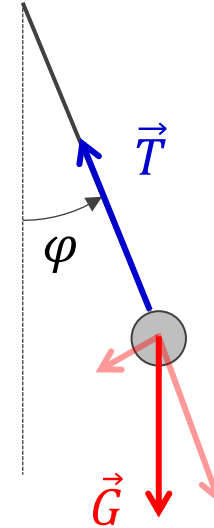
Eksempel: pendelen på Fysisk institutt 🥰

[🖋️ lysbilde med skriblerier på iPad 🖋️]

Radiell retning (N2L):

Tangentiell retning (N2L):

Pendelen beveger seg på en (del av en) sirkelbane:



Eksempel: pendelen på Fysisk institutt 🥰

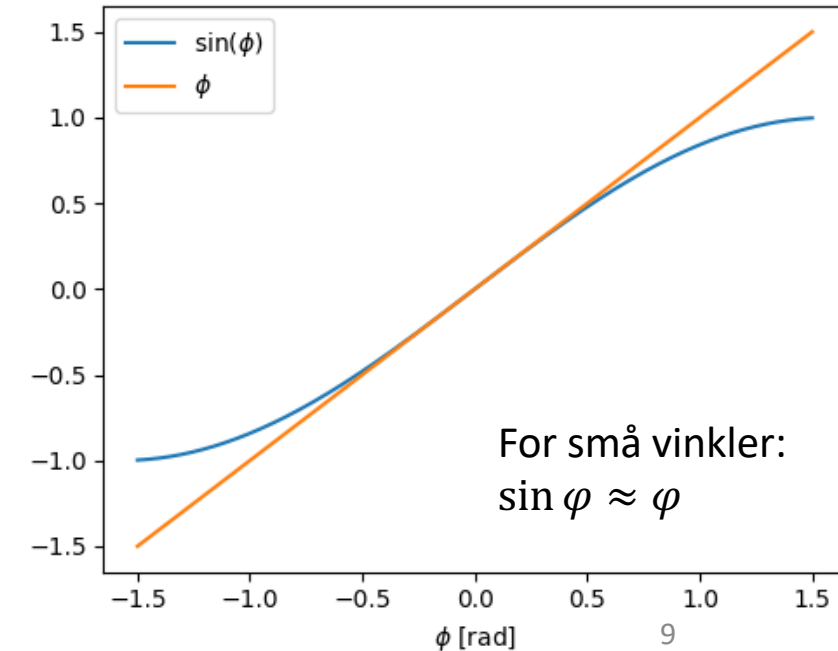
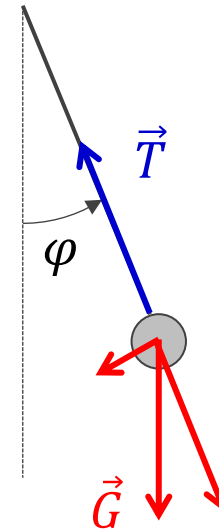
[🖋 lysbilde med skriblerier på iPad 🖋]

Tangentiell akselerasjon:

Differensialligning:

Utvikler $\sin \varphi$ i en Taylorrekke (gjelder for *små* vinkler):

Tilnærming for *små* vinkler:

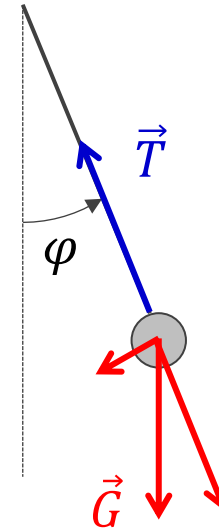


Fellesoppgave: pendelen, analytisk løsning

[🖋 lysbilde med skriblerier på iPad 🖋]

Differensialligning:
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R} \sin \varphi = 0$$

Tilnærming for små vinkler:
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R} \varphi = 0$$



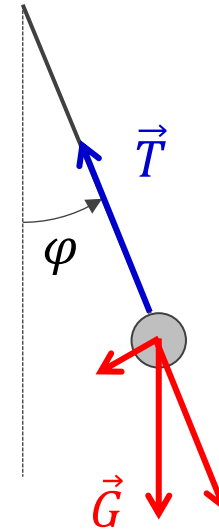
Fellesoppgave : pendelen, analytisk løsning

[🖋 lysbilde med skriblerier på iPad 🖋]

Differensialligning: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R} \sin \varphi = 0$

Tilnærming for små vinkler: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R} \varphi = 0$

Ansatz:



Initialbetingelser:

Eksempel: fjærkraft

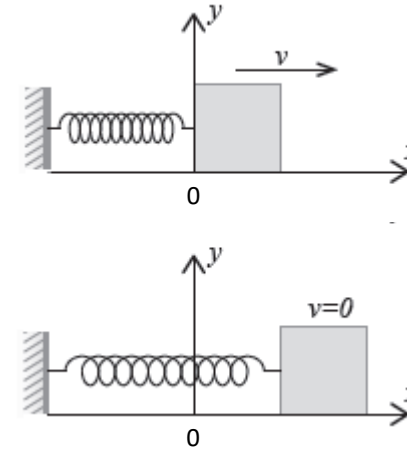
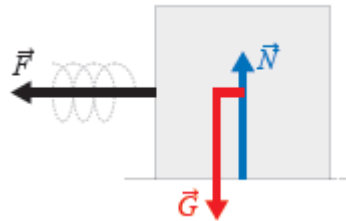
En masse $m = 1$ kg er festet til ei fjær med fjærkonstant $k = 100$ N/m og kan bevege seg på et bord uten friksjon og luftmotstand. Massen beveger seg med $v_0 = 1$ m/s ut fra likevektsposisjonen.

Kontaktkrefter:

- kraft F fra fjæra på massen
- normalkraft N fra bordet på massen

Langtrekkende kraft:

- gravitasjonskraft G



Normalkraft kompenserer gravitasjon: $\vec{N} = -\vec{G}$
 $\Rightarrow$ ingen bevegelse i y -retning.

Kraft F fra fjæra på massen:

Vi definerer $x = 0$ i likevektsposisjon; hvis $x > 0$ trekker kraften i *negativ* x -retning:



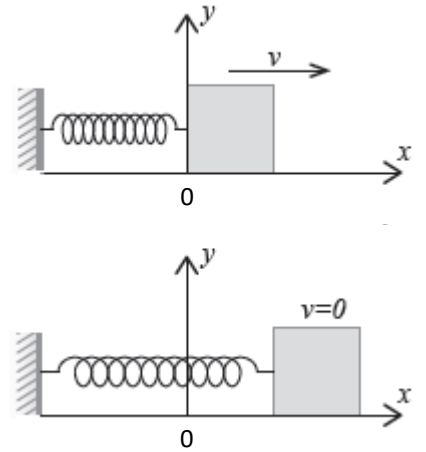
Spørsmål: Fjærkraft

Fellesoppgave: fjærkraft, analytisk løsning

[ lysbilde med skriblerier på iPad 

Løs differensialligningen som beskriver klossens bevegelse:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t).$$



Initialbetingelser:

$$x(t_0) = 0 \text{ m}$$

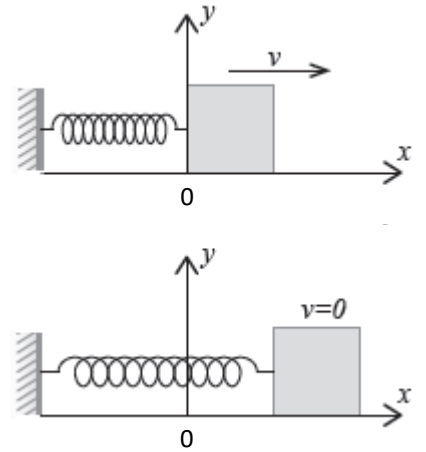
$$v(t_0) = 1 \text{ m/s}$$

Eksempel: fjærkraft, kjedelig **analytisk** løsning

[ lysbilde med skriblerier på iPad ]

N2L:

Vi følger oppskriften fra formelarket:



Initialbetingelser:

$$x(t_0) = 0 \text{ m}$$

$$v(t_0) = 1 \text{ m/s}$$

Svingefrekvens ω_e :

stiv fjær eller liten masse $\Rightarrow$ rask svingning

Amplitude A :

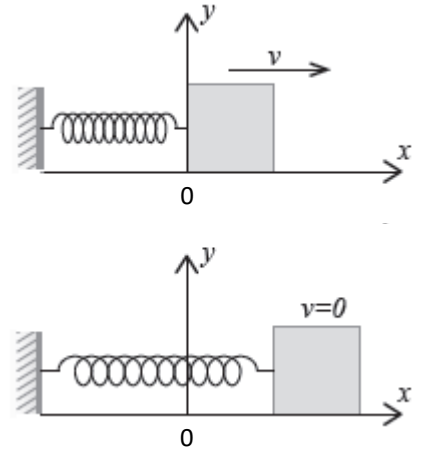
høy initialhastighet $\Rightarrow$ stor amplitude

Fellesoppgave: fjærkraft, festlig **analytisk** løsning 🎉

[🖋 lysbilde med skriblerier på iPad 🖋]

N2L:

Ansatz:



Initialbetingelser:

$$x(t_0) = 0 \text{ m}$$

$$v(t_0) = 1 \text{ m/s}$$

Svingefrekvens ω_e :

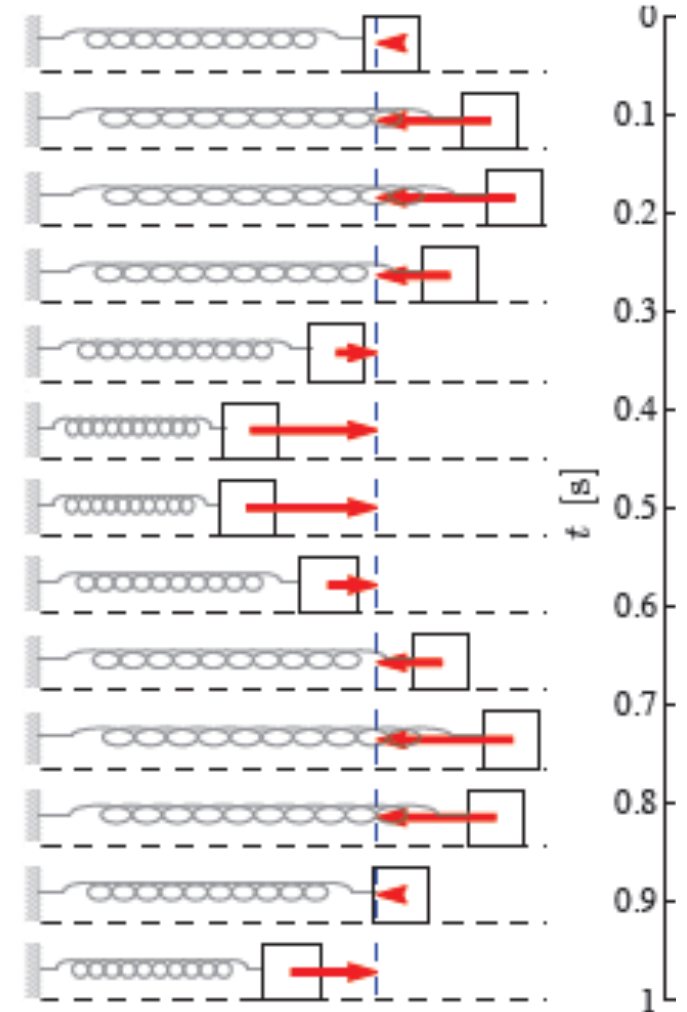
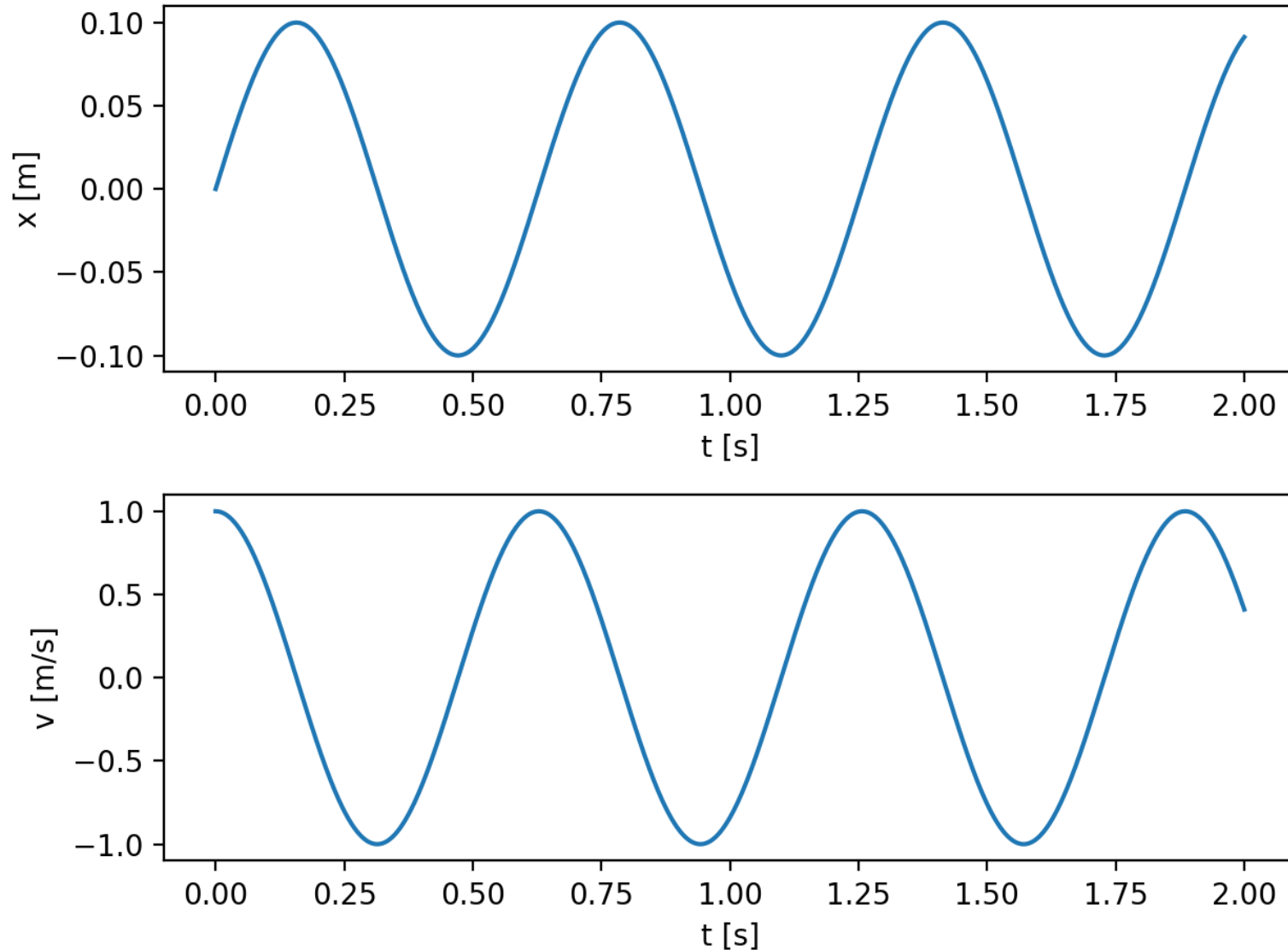
stiv fjær eller liten masse $\Rightarrow$ rask svingning

Amplitude A :

høy initialhastighet $\Rightarrow$ stor amplitude

Eksempel: fjærkraft, svingebevegelse

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$
$$v(t) = v_0 \cos(\omega t)$$



Takk for i dag! 😊