

Forelesningsnotater, FYS1100 uke 13

Relativitetsteori

Joakim Bergli

Relativitetsteorien er basert på to postulater

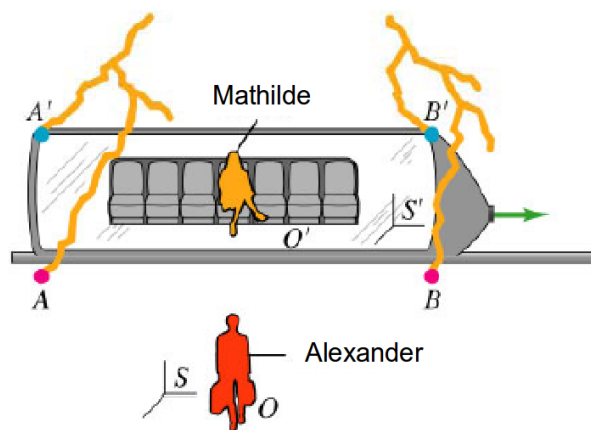
- Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.
- Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer, og er uavhengig av observatørens bevegelse.

Det første er det ikke noe kontroversielt med, det er også det vi tenker i ikke-relativistisk fysikk. Det andre virker i utgangspunktet absurd (men i FYS1120 lærer dere at Maxwells likninger for elektromagnetiske felt stemmer med dette. Det visste Einstein).

Hvis vi skal ha samme lysfart i alle referansesystemer må vi akseptere ganske mange andre ting som ikke stemmer med våre vanlige erfaringer. Vi skal se på noen.

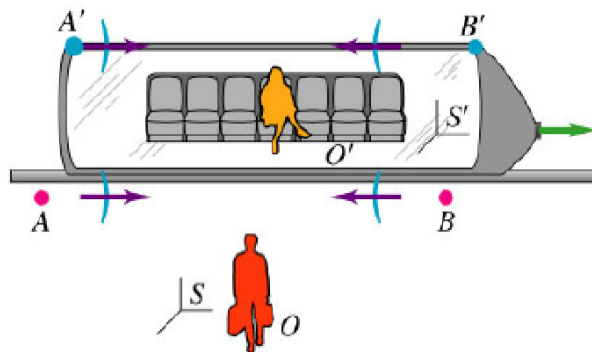
1 Relativitet av samtidighet

Et tog kjører med konstant fart på en rett strekning. En person sitter akkurat midt i toget, mens en annen står på bakken utenfor. To lyn slår ned, ett i forenden av toget og ett i bakenden. Begge lynene forgreiner seg slik at de setter merker både på bakken og på endene av toget. Dette for at vi i ettertid kan gå og kontrollere hvor nedslagene skjedde, slik at det ikke er noen tvil om posisjonene.



Sett fra observatøren på bakken skjer tre ting samtidig: begge lynene slår ned, og midten av toget, der personen sitter, passerer der han står. Han kan etterpå sjekke at lynene slo ned akkurat like langt på hver side, slik at han stod midt i mellom nedslagspunktene. Det er viktig å huske at det vi snakker om her ikke er tidspunktene han ser disse hendelsene, men tidspunktet han mener de faktisk skjedde.

Siden lyset bruker tid på å bevege seg fra lynnedslagene til ham, vil han se at midten av toget passerer først siden dette er nærmere ham, og så ser han lyset fra lynene. Han mener altså at disse hendelsene skjedde samtidig når han tar hensyn til tida lyset har brukt.

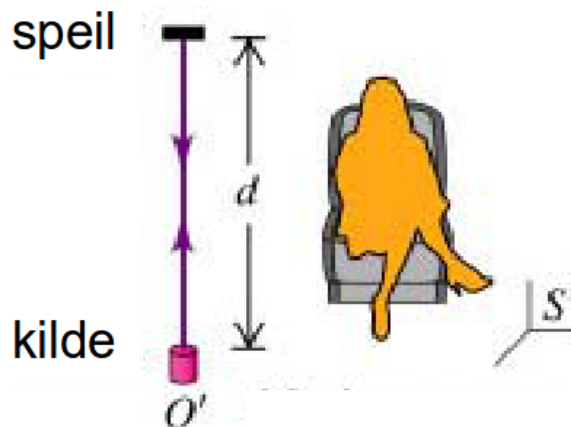


Fortsatt sett fra observatøren på bakken sitt referansesystem vil lypulsene bevege seg symmetrisk inn mot midtpunktet. Men mens dette skjer flytter toget seg framover, og dermed kommer lypulsen fra lynet foran på toget til å treffe observatøren i midten først, og den fra bakenden litt etter. Denne rekkefølgen må være den samme for alle observatører, også for den som sitter på midten av toget. Siden hun kan måle at hun sitter akkurat på midten av toget og at lynene faktisk slo ned akkurat på endene konkluderer hun med at lynet foran slo ned før lynet bak.

De to observatørene er altså ikke enige om hva som skjer samtidig.

2 Tidsdilatasjon og lengdekontraksjon

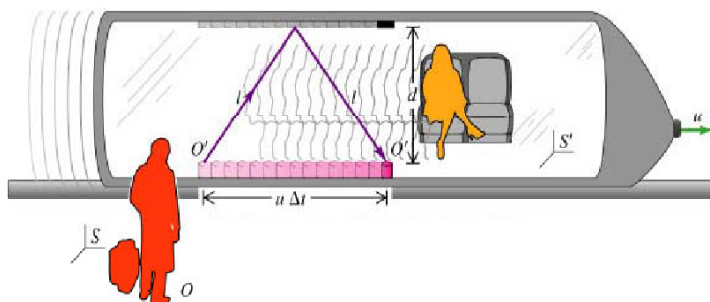
Ikke bare samtidighet, men også lengden på tidsintervaller er forskjellig for forskjellige observatører. En person sitter som før på et tog (system S') med en lyskilde og et speil i avstanden d . En lypuls sendes fra kilden, reflekteres i speilet og går tilbake til kilden.



Tiden det tar i system S' er

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

En person som står stille utenfor toget (system S) observerer det samme, men siden toget beveger seg må lyset gå på skrå for å komme tilbake til kilden.



Skrålinja har lengden

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Siden lyset går like fort for begge observatører, men strekningen er lengre i S må tida det tar også være lengre. Vi har tida i S er

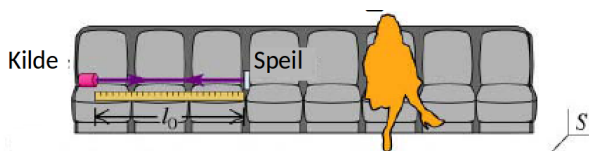
$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Her inngår Δt på høyresiden, og for å få et eksplisitt uttrykk må vi løse for Δt og finner

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0, \quad \gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Her kaller vi $\Delta t' = \Delta t_0$ for egentiden, siden det er den tiden som er målt i et referansesystem der klokka er i ro. Vi har altså vist at tiden i system S der klokka beveger seg er lengre enn egentiden ($\gamma > 1$). En annen måte å si det på er at klokker i bevegelse går saktere enn klokker i ro. Dette kalles tidsdilatasjon.

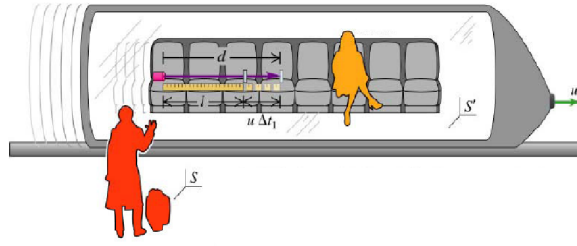
Vi kan gjøre et tilsvarende tankeeksperiment for måling av lengde hvis vi snur kilden og speilet slik at lyset beveger seg parallelt med retningen til toget. I system S' der toget og apparatet er i ro er avstanden mellom kilde og speil $l' = l_0$ som vi kaller hvilelengden.



Tida det tar for lyset å gå fram om tilbake er da

$$\Delta t' = \frac{2l_0}{c}.$$

I system S vil lyset bevege seg en lengre strekning fra kilde til speil, siden speilet beveger seg bortover mens lyset er underveis.



Strekningen lyset beveger seg fra kilde til speil er avstanden l mellom kilde og speil sett i system S pluss strekningen speilet beveger seg mens lyset går fra kilden til speilet

$$d_1 = l + v\Delta t_1$$

der Δt_1 er tida lyset bruker fra kilde til speil. Siden lyset går med lysfarta uansett vet vi også at $d_1 = c\Delta t_1$. Dermed er

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v}.$$

På vei tilbake til kilden får lyset kortere strekning å gå siden kilden beveger seg mot lyset slik at strekningen blir

$$d_2 = l - v\Delta t_2 = c\Delta t_2.$$

Dermed blir

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v}.$$

Den totale tida blir (sjekk regninga selv)

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \gamma^2 \frac{2l}{c}.$$

Fra før vet vi at tidene i de to systemene ikke er like men relatert ved $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Setter vi inn uttrykkene over får vi

$$l = \frac{l_0}{\gamma}.$$

Lengden målt av en som står på bakken er altså mindre enn hvilelengden. Dette kalles lengdekontraksjon.

3 Lorenztransformasjonen

Argumentene over, med lys som reflekteres fram og tilbake av speil i bevegelse virker litt konstruerte, og en kan lure på om det vi kommer fram til gjelder i alle tilfeller. Det er også vanskelig å konstruere tilsvarende argumenter i alle tilfelle, og vi trenger en mer robust generell tilnærming.

Vi har to referansesystemer, S og S' , i relativ bevegelse med fart u langs x -aksen. Origo i de to systemene passerer hverandre ved $t = t' = 0$ og ved det tidspunktet sendes det ut en lyspuls som brer seg utover med lysfarta i alle retninger. Siden lysfarta er den samme i begge systemer må vi ha

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

Siden den relative bevegelsen er i x -retning er $y = y'$ og $z = z'$. Videre ser vi bare på punkter der $y = z = 0$. Vi tipper at

$$x' = \gamma(x - ut), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \quad (1)$$

Her er γ foreløpig en vilkårlig konstant, vi må bestemme den seinere. Da er

$$x'^2 - c^2 t'^2 = \gamma^2(x^2 - 2xut + u^2 t^2) - c^2 \gamma^2\left(t^2 - 2\frac{u}{c^2}tx + \frac{u^2}{c^4}x^2\right) = \gamma^2(x^2 + u^2 t^2 - c^2 t^2 - \frac{u^2}{c^2}x^2).$$

For alle punkter som ligger på lyspulsene er $x^2 = c^2 t^2$, og vi ser at da er også $x'^2 = c^2 t'^2$. Det viser at likning (1) gir den riktige transformasjonen mellom koordinatene i de to systemene. Denne kalles Lorentztransformasjonen. For å bestemme γ utleder vi tidsdilatasjonen fra Lorentztransformasjonen og krever at den er lik det uttrykket vi fant over.

4 Tidsdilatasjon og lengdekontraksjon igjen

Vi kan finne igjen de vanlige uttrykkene for tidsdilatasjon og lengdekontraksjon ved å bruke Lorentztransformasjonen. Se for eksempel på en klokke i ro i origo i system S' . Vi ser på tida mellom to hendelser

1. Origo i de to systemene passerer hverandre. Denne hendelsen har koordinatene

$$x_1 = x'_1 = 0, \quad t_1 = t'_1 = 0.$$

2. Klokka viser en bestemt tid Δt_0 . Siden klokka ligger i ro i S' er dette egentida til tidsintervallet mellom de to hendelsene. Koordinatene er

$$x'_2 = 0, \quad t'_2 = \Delta t_0.$$

Vi finner tidspunktet for denne hendelsen i S

$$t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right) = \gamma\Delta t_0.$$

Siden begge starter tidsmålinga ved hendelse 1 er

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0$$

og vi har dermed vist det vanlige uttrykket for tidsdilatasjon og også funnet riktig verdi for γ .

For å se på lengdekontraksjon er det enda viktigere å huske at Lorentztransformasjonen er en transformasjon mellom koordinater for hendelser, ikke posisjoner. Se på en stav med hvilelengden l_0 som ligger i ro i system S . Vi legger venstre endepunkt i origo og høyre endepunkt i $x = l_0$. Lengden i S er da forskjellen i koordinat mellom de to hendelsene

1. Posisjonen $x_1 = 0$ til venstre endepunkt ved $t_1 = 0$.
2. Posisjonen $x_2 = l_0$ til høyre endepunkt ved $t_2 = 0$.

Dette er hvilelengden l_0 siden staven ligger i ro i S. Med Lorentztransformasjonen kan vi finne koordinatene til disse hendelsene i S'

$$\begin{aligned}x'_1 &= 0, & t'_1 &= 0 \\x'_2 &= \gamma(x_2 - vt_2) = \gamma l_0, & t'_2 &= \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = -\gamma \frac{v}{c^2}l_0.\end{aligned}$$

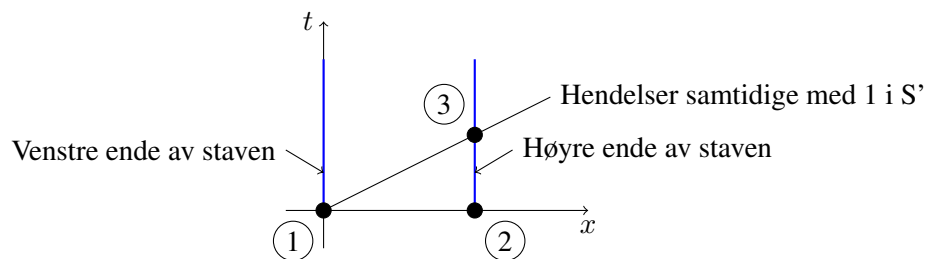
Vi ser at de to hendelsene ikke er samtidige i S' (det kunne vi nok gjettest på forhånd). Dermed er ikke avstanden mellom dem det samme som lengden målt i S'. For å finne lengden må vi sammenlikne samtidige hendelser. Hvilke hendelser er samtidige med hendelse 1 i S'? De med

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = 0$$

som betyr

$$t = \frac{v}{c^2}x.$$

For å få litt oversikt når det er mange hendelser er det nyttig å tegne romtidsdiagrammer



Vi ser at hendelse 3 er den som er der høyre endepunkt av staven er samtidig som venstre endepunkt er i origo i S'. Koordinatene er

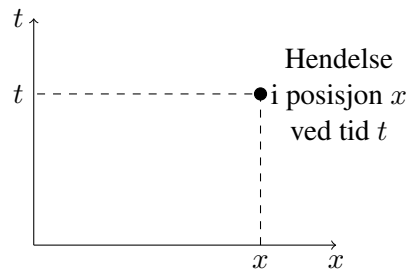
$$\begin{aligned}x_3 &= l_0, & t_3 &= \frac{v}{c^2}l_0 \\x'_3 &= \gamma(x_3 - vt_3) = \gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})l_0 = \frac{l_0}{\gamma}, & t'_3 &= 0.\end{aligned}$$

Dermed er lengden målt i S'

$$l = \frac{l_0}{\gamma}.$$

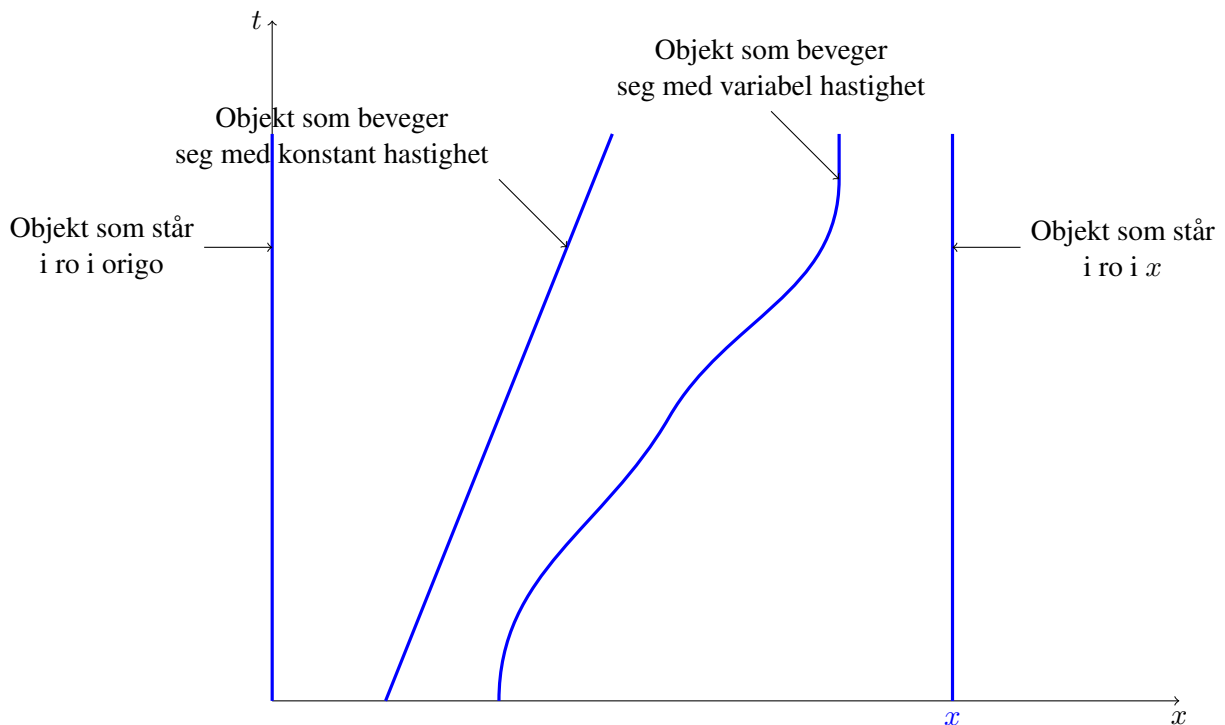
5 Romtidsdiagrammer

For å få et klarere bilde av eksempelet med lyn som slår ned i begge ender av et tog kan vi tegne et romtidsdiagram som viser hendelsesforløpet. I et slikt diagram tegner vi posisjon på den horisontale aksene og tid på den vertikale aksene. Et punkt i et romtidsdiagram representerer en hendelse, dvs noe som skjer på et bestemt sted til en bestemt tid.



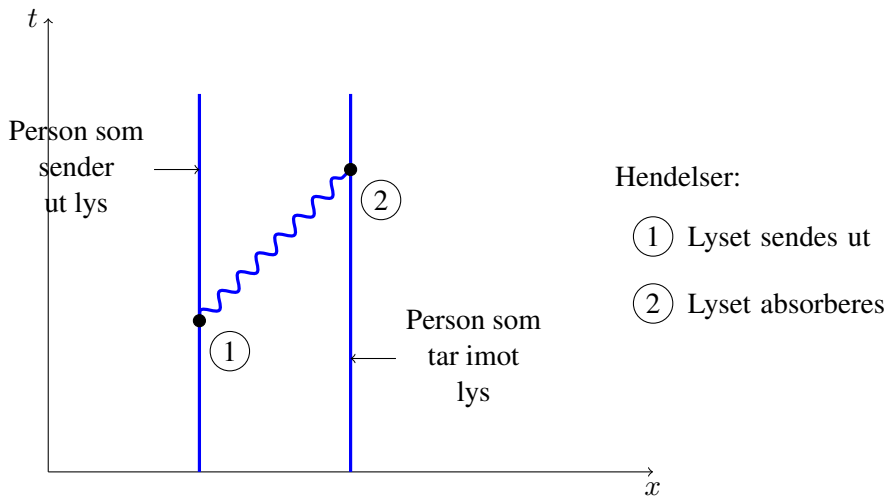
Siden vi er interessert i ting som beeger seg fort, er det vanlig å bruke enheter der lysfarta $c = 1$. Det betyr at vi bruker “lengdeenheter” for tida, der 1 meter tid er den tida lyset bruker på å gå en meter.

Diagrammet viser hendelser, men vi kan se på bevegelsen til et objekt som en samling hendelser, $(x(t), t)$ der $x(t)$ er posisjonen det har ved tida t . Den kurven dette beskriver kaller vi verdenslinja til objektet.



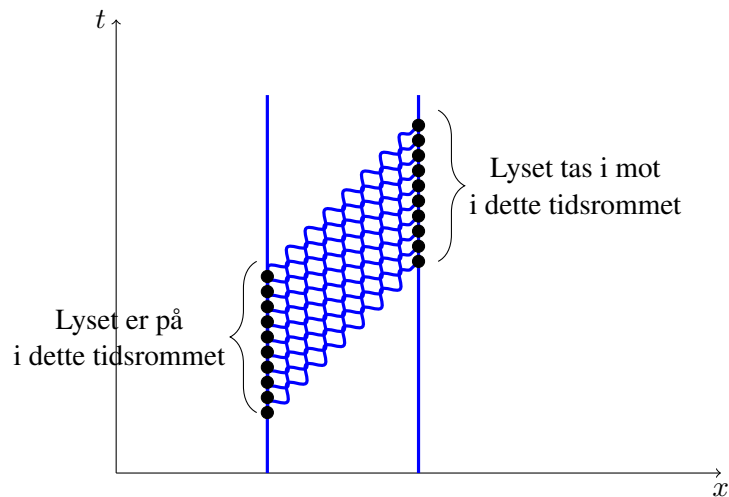
Linjer som går vertikalt rett opp representerer objekter som står stille. Linjer på skrå representerer objekter i bevegelse. Jo mer rett opp, jo saktere beveger den seg, og jo mer på skrå jo større er farta.

Når vi bruker enheter der $c = 1$ betyr det at lysstråler alltid følger linjer med stigningstall ± 1 i romtidsdiagrammer. Vi tegner lysstråler med bølgede linjer. Her er et enkelt eksempel på et romtidsdiagram som viser en persom som sender ut et kort lysblink som seinere tas i mot og absorberes av en annen person. Vi har også markert hendelsene der lyset blir sendt ut og absorbert.

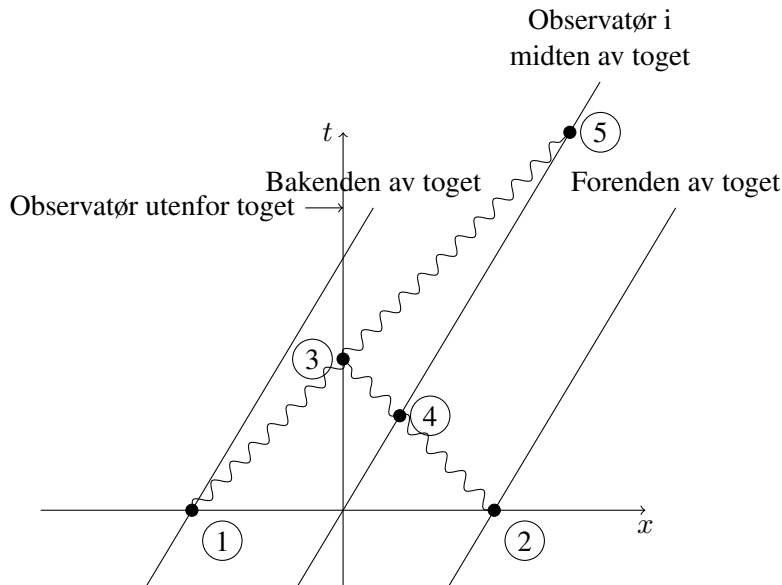


To kommentarer:

1. Lyset går rett utover langs x -aksen, ikke på skrå i rommet. I todimensjonale romtidsdiagrammer er det bare plass til en dimensjon for rom, slik at vi bare kan representere det som skjer langs en rett linje. Det at lysstrålen går på skrå i figuren er fordi den beveger seg framover i tid samtidig som den går utover i rom.
2. Det er litt missvisende å kalle det en lysstråle, for det er bare et veldig kort lysblink som sendes ut ved et bestemt tidspunkt. Et lys som står på en lengre tid kan vi tenke på som en følge av mange lysblink etter hverandre, og kunne se noe slik ut



Vi er nå klare til å tegne et romtidsdiagram som representerer tankeeksperimentet der lynet slår ned i begge endene av et tog, og dette observeres både fra en observatør i ro i forhold til bakken (system S) og en observatør i ro i forhold til toget (system S'). Vi tegner diagrammet i koordinatene til system S.



I figuren har vi merket av fem hendelser

- ① Lynet slår ned i bakenden av toget
- ② Lynet slår ned i framenden av toget
- ③ Lyset fra begge lynene når observatøren utenfor toget
- ④ Lyset fra lynet foran i toget når observatøren midt i toget
- ⑤ Lyset fra lynet bak i toget når observatøren midt i toget

Diagrammet viser hendelser slik de oppfattes av observatøren som står utenfor toget (system S). Det er klart at begge lynene slår ned samtidig (hendelse ① og ②), at begge lysstrålene treffer observatøren i $x = 0$ samtidig (hendelse ③) og at observatøren på toget vil se lyset fra forenden (hendelse ④) før fra bakenden (hendelse ⑤). Men det er ikke så klart hva observatøren på toget vil mene om hvorvidt de to lynene er samtidige eller ikke.

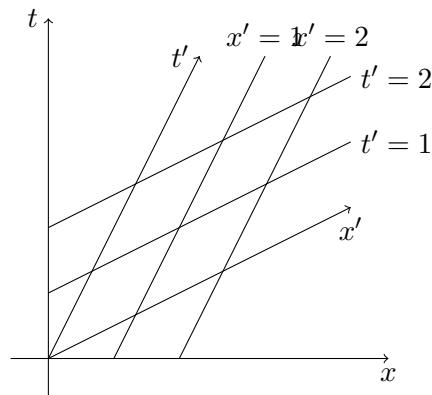
For å se dette må vi se hvor i diagrammet hendelser som er samtidige i system S' ligger. Hvis vi ser på Lorentztransformasjonen er

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x).$$

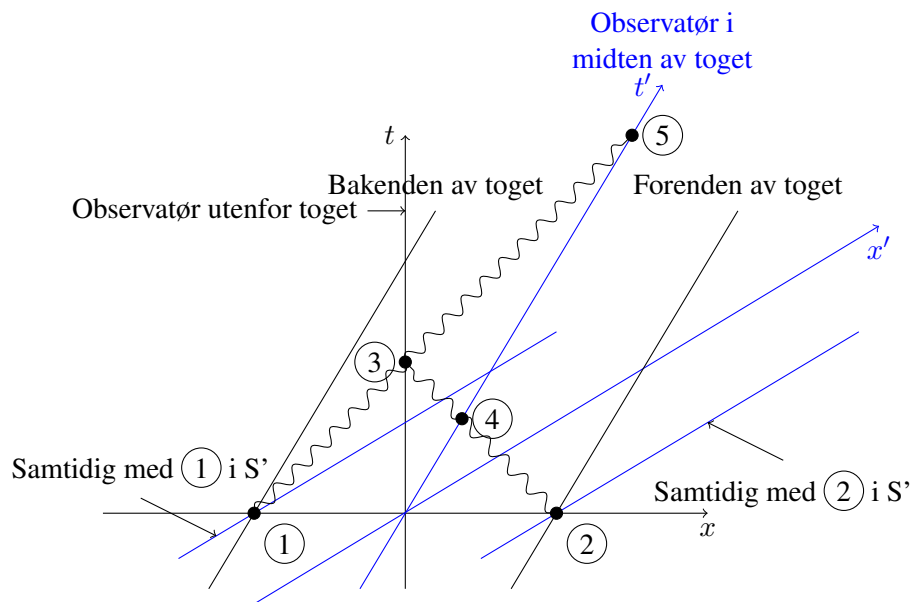
Punkter som er samtidige i S' har samme t' , og dermed ligger de på linjene

$$t = \frac{1}{\gamma}t' + \frac{v}{c^2}x.$$

Tilsvarende kan vi gjøre for punkter med samme x' , og på den måten kan vi legge inn koordinatsystemet for S' i romtidsdiagrammet for S.



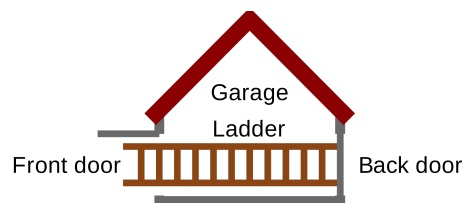
På den måten kan vi tegne inn i diagrammet for toget aksene for system S' som følger toget



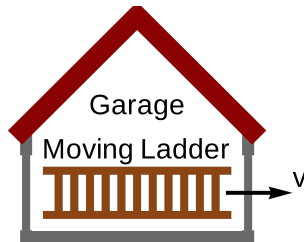
Her kan vi se at hendelse ① skjer ved en positiv t' og hendelse ② ved en negativ t' . Hendelse ② er altså tidligere enn hendelse ① for S' mens de er samtidige for S.

6 Eksempel: Stige i garasje “paradokset”

Du har en garasje med dør i begge ender og en stige som er litt lengre enn garasjen. Her er en tegning der begge står i ro.

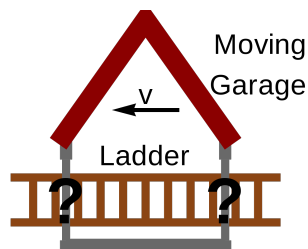


Du mener du kan få hele stigen til å være inni garasjen, ihvertfall en bitteliten stund, hvis du løper fort med den slik at den blir lengdekontrahert. Hvis du da har noen som står klare til å lukke og åpne dørene ettersom det trengs kan vi et øyeblikk ha situasjonen som vist her.

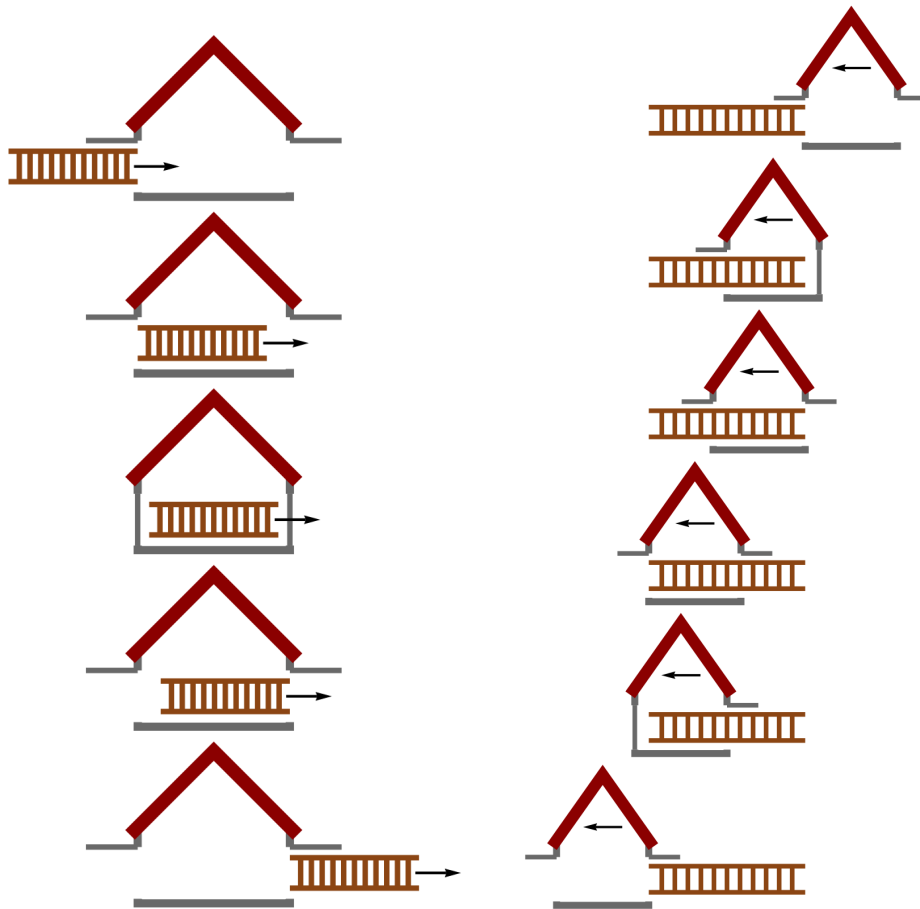


Stigen er jo i rask bevegelse, så døra bak må være netopp lukket og døra foran må åpnes ganske snart for at det ikke skal bli hull i noen av dørene. Men en kort stund bør vi ha hele stigen inni garasjen med begge dørene lukket. Og stigen er ikke i kontakt med noen av dørene noen gang, slik at de ikke blir ødelagt på noen måte.

Dette er i et referansesystem der garasjen står i ro og stigen er i bevegelse med farta v , vi kaller det system S. Men vi bør jo kunne beskrive det samme fra et referansesystem, S' , der stigen er i ro, og følgelig garasjen i bevegelse med fart $-v$. Men her blir det tilsynelatende krise, for nå er stigen like lang som vanlig, men garasjen kontraheres slik at det virker umulig at stigen kan få plass.



Hvordan kan det som skjer beskrives i system S' ? Nøkkelen ligger i relativitet av samtidighet. I system S er begge dørene lukket samtidig, men siden de er på ulike posisjoner i rommet vil hendelser som er samtidige på begge dørene i system S ikke være samtidige i system S' . Her ser vi hele forløpet sett fra begge systemene (S til venstre, S' til høyre)



I S lukkes altså begge dørene samtidig en liten stund mens hele stigen er inne i garasjen. I S' lukkes og åpnes døra til høyre før enden a stigen når dit, men venstre enden av stigen er fortsatt langt utenfor venstre dør. Først etter at venstre enden har pasert inn lukkes venstre dør. Dørene er altså aldri lukket samtidig.

Dette resonnementet virker som en overbevisende forklaring, men ved å bruke Lorentztransformasjonen kan vi vise kvantitativt hva som skjer. For å gjøre det konkret velger vi at hvilelengden til stigen er $l_0 = 5,0$ m, hvilelengden til garasjen er $L_0 = 4,0$ m, og den relative farta mellom stigen og garasjen er $v = 0,8c$. Da blir

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1,67.$$

De kontraherte lengdene til stigen (i S) og garasjen (i S') er da

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = 3,0 \text{ m} \quad L = \frac{L_0}{\gamma} = 2,4 \text{ m}.$$

Vi har altså $l < L_0$ slik at stigen får plass i garasjen i S, men selvfølgelig $l_0 > L$ slik at stigen ikke får plass i S'.

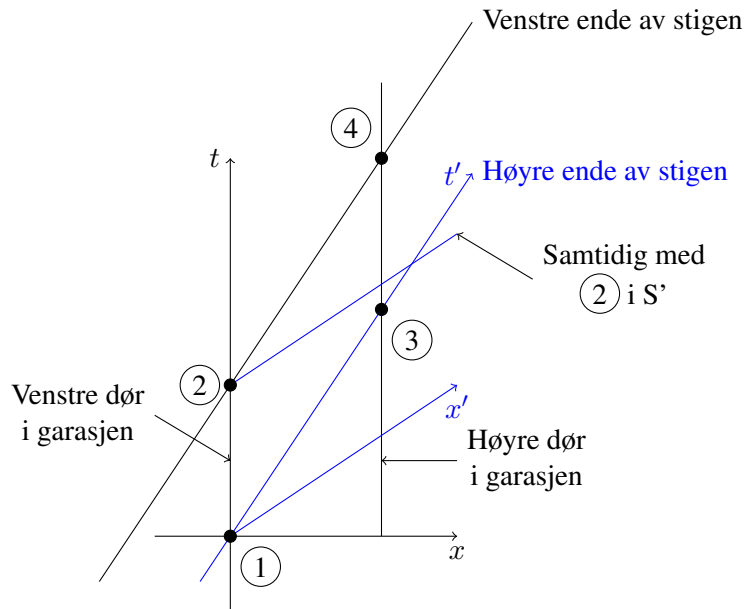
Vi ser på fire hendelser

- ① Høyre ende av stigen passerer venstre dør 

② Venstre ende av stigen passerer venstre dør 

③ Høyre ende av stigen passerer høyre dør 

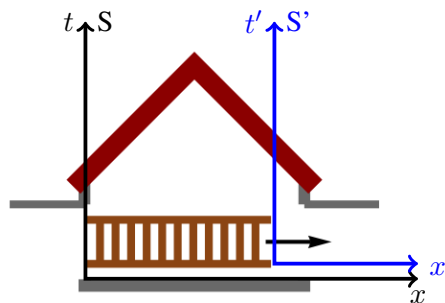
④ Venstre ende av stigen passerer høyre dør 



Vi definerer koordinatsystemene ved at hendelse 1 har koordinater

$$(x_1, t_1) = (x'_1, t'_1) = (0, 0).$$

Det betyr at origo for S ligger i venstre dør på garasjen, og origo for S' ligger i høyre ende av stigen



Vi kan da regne ut koordinatene til de andre hendelsene

Hendelse 2:

$$x_2 = 0, \quad t_2 = \frac{l}{u} = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) = -\gamma l = -l_0 = -5 \text{ m.}$$

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = \frac{l_0}{u} = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

Hendelse 3:

$$x_3 = L_0 = 4 \text{ m,} \quad t_3 = \frac{L_0}{u} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

$$x'_3 = \gamma(x_3 - vt_3) = -\gamma(L_0 - v\frac{L_0}{u}) = 0.$$

$$t'_3 = \gamma(t_3 - \frac{v}{c^2}x_3) = \frac{L}{u} = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s} < t'_2.$$

Hendelse 4:

$$x_4 = L_0 = 4 \text{ m,} \quad t_4 = t_2 + \frac{L_0}{u} = \frac{l_0}{\gamma u} + \frac{L_0}{u}.$$

$$x'_4 = \gamma(x_4 - vt_4) = -\gamma(L_0 - v\frac{L_0}{u} + \frac{L_0}{u}) = -l_0.$$

$$t'_4 = \gamma(t_4 - \frac{v}{c^2}x_4) = t'_3 + \frac{l_0}{u}.$$

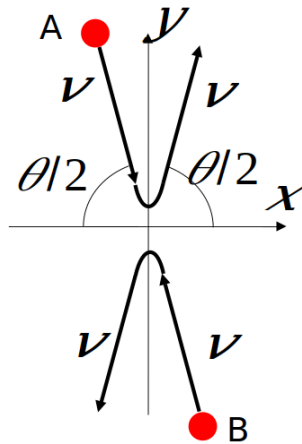
Det viktigste vi leser ut av dette er at $t'_3 < t'_2$ som stemmer med det vi ressonerte oss fram til over: I S' er det slik at hendelse 3 skjer før hendelse 2.

7 Relativistisk driv

For ikke-relativistisk bevegelse har vi uttrykket for driv

$$p = mv$$

Vi skal vise at vi må endre dette uttrykket i relativitetsteori. Vi ser på en elastisk kollisjon mellom to partikler som i utgangspunktet har lik masse og motsatte hastigheter.

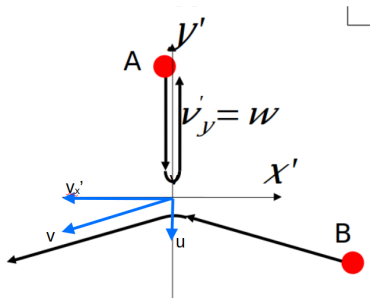


Vi tipper at driv fortsatt er i samme retning som hastighetsvektoren, dvs at

$$\vec{p} = m_v \vec{v}$$

Her har vi kalt proporsjonalitetsfaktoren m_v for å minne oss om at den er en funksjon av farta, og at den bør bli lik massen når $v \ll c$ (m_v kalles ofte relativistisk masse). Vi vil bestemme m_v ved å kreve at driv fortsatt er bevart i kollisjoner

La oss se på kollisjonen i et referansesystem S' der den ene partikkelen beveger seg vertikalt ned, og så opp igjen med fart w . Den andre partikkelen har da en horisontal fart v'_x og en vertikal fart u .



Endringen i driv for den øverste partikkelen er da

$$\Delta p_A = 2m_w w.$$

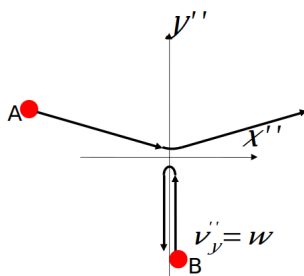
For den nederste partikkelen er driv i x -retning bevart, mens endringen i driv i y -retning er

$$\Delta p_B = 2m_v u$$

der v er farta til partikkel B i system S . Siden totalt driv er bevart er

$$m_w w = m_v u.$$

For å relatere u til w skifter vi til referansesystem S'' som beveger seg mot venstre med farta v'_x i forhold til S'



Partiklene bytter roller, og nå går B rett opp og ned med farta w , mens A beveger seg med fart v . Sammenhengen mellom w og u i system S' er altså åden samme som sammenhengen mellom y -komponentene til farta til A i system S' og S'' . For å finne denne tenker vi på partikkel A fra kollisjonsøyeblikket ($t'=0$). Posisjonen (i rom og tid) til A i S' er da

$$t' \quad x' = 0 \quad y' = wt'.$$

Tilsvarende koordinater i S'' er

$$t'' = \gamma(t' + \frac{v'_x}{c^2}x') = \gamma t' \quad y'' = y'$$

(x'' trenger vi ikke og $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2_x/c^2}}$). Farta i y -retning er da

$$u = \frac{y''}{t''} = \frac{w}{\gamma}.$$

som gir

$$m_w = \frac{m_v}{\gamma}.$$

For å finne sammenhengen vi ønsker tar vi grensa der $w \rightarrow 0$. Da blir $v'_x \approx v$ og

$$m_0 = m_v \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Dermed er

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

8 Relativistisk energi

Vi regner ut arbeidet som skal til for å akselerere et legeme med massen m til farta v . Dette er akkurat det samme som vi gjorde for å finne uttrykket $K = \frac{1}{2}mv^2$ for en ikke-relativistisk bevegelse, bare at vi må bruke det nye relativistiske uttrykket for bevegelsesmengde, $p = \gamma mv$.

$$W = \int F ds = \int \frac{dp}{dt} ds = \int v dp = \gamma mv^2 - \int \gamma m v dv = \gamma mv^2 + \frac{1}{2}mc^2 \int w^{-1/2} dw = \gamma mc^2 + C.$$

Her er gjorde vi først delvis integrasjon og så substitusjonen $w = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ (sjekk regninga selv). Integrasjonskonstanten besettemmer vi ut fra at arbeidet er null når farta er null, som gir $C = -mc^2$. Dermed har vi det relativistiske uttrykket for kinetisk energi

$$K = \gamma mc^2 - mc^2.$$

Vi ser at den kinetiske energien er differansen mellom to ledd, som vi tolker som den totale energien etter og før akselerasjonen. Dvs. at den totale energien er

$$E = \gamma mc^2$$

og at når farta er null har vi hvileenergien (eller masseenergien)

$$E = mc^2.$$

Vi kan også sjekke at for lav fart ($v \ll c$) gjelder tilnærmet det vanlige uttrykket for kinetisk energi. Vi Taylorutvikler

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

og får dermed

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \approx (1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots) mc^2 - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \dots.$$