

# Forelesningsnotater, FYS1100 uke 6

Joakim Bergli

## 1 Taylorpolynomer/Taylorrekker

Hvis vi har en funksjon  $f(x)$  er det ofte nyttig å erstatte den med et polynom som ligner så mye som mulig på funksjonen i nærheten av et bestemt punkt  $x_0$ . Når vi sier at polynomet ligner mener vi at det har samme verdi, derivert, andrerderivert osv som funksjonen. Vi vil altså finne et polynom

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots a_n(x - x_0)^n$$

slik at

$$T_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$T'_n(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$

$$T''_n(x_0) = 2a_2 = f''(x_0)$$

og så videre. Det er ganske lett å se at

$$T_n^{(k)}(x_0) = k!a_k = f^{(k)}(x_0)$$

slik at vi kan finne koeffisientene

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Legg merke til at vi kan regne ut koeffisienten  $a_k$  uten å fjerne noen av de foregående og uten å vite hvor mange vi har tenkt å regne ut (dvs uten å kjenne  $n$ ). Det betyr at om vi har regnet ut  $n$ -te gradspolynomet  $T_n(x)$  og trenger en mer nøyaktig tilnærming, kan vi legge til høyere ordens ledd etter behov. Vi trenger derfor ikke å bestemme oss for  $n$  på forhånd, men skriver

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots \quad (1)$$

I grensa når vi tar med uendelig mange ledd og får ei uendelig rekke vil denne ofte bli en eksakt representasjon av funksjonen  $f(x)$ . Om vi stopper etter et endelig antall ledd blir det bare tilnærmet lik funksjonen i nærheten av  $x_0$ . Man kan finne ut noe om når slike rekker konvergerer (nærmer seg en bestemt verdi når antall ledd økes) og om feilen om i stopper etter  $n$  ledd. Dette vil dere lære om i MAT1100 seinere i semesteret.

## 2 Taylorrekker for noen vanlige funksjoner

### 2.1 $f(x) = e^x, x_0 = 0$

Vi kan regne ut

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(x_0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(x_0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(x_0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & f'''(x_0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(x_0) = 1. \end{array}$$

Dermed er

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

### 2.2 $f(x) = \cos x, x_0 = 0$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(x_0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(x_0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(x_0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(x_0) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos(x) & n \text{ partall} \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin(x) & n \text{ oddetall} \end{cases} & f^{(n)}(x_0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & n \text{ partall} \\ 0 & n \text{ oddetall} \end{cases} \end{array}$$

Dermed er

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

Tilsvarende kan vi finne (sjekk selv!) at

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

### 2.3 $f(x) = \frac{1}{1-x}, x_0 = 0$ (geometrisk rekke)

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{1-x} & f(x_0) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} & f'(x_0) = 1 \\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} & f''(x_0) = 2 \\ f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4} & f'''(x_0) = 3! \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} & f^{(n)}(x_0) = n!. \end{array}$$

Så da har vi at

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (2)$$

Rekka på høyre side kalles ei geometrisk rekke.

### 3 Eksempel: Potensiell energi nær jorda

Vi har to uttrykk for potensiell energi i tyngdefeltet. Nær jorda, når vi kan tenke oss at tyngdekrafta er konstant er den potensielle energien

$$U_1(h) = mgh$$

der  $h$  er høyden over bakkenivå. Hvis vi beveger oss høyt, slik at vi må ta hensyn til at tyngdekrafta avtar med høyden, har vi potensiell energi

$$U_2(r) = -\frac{GMm}{r}$$

der  $M$  er jordmassen og  $r$  avstanden fra jordsenteret. Det siste uttrykket er mer generelt, og burde inneholde det første som et spesialtilfelle. For å sammenlikne dem må vi ta hensyn til at det er ulike nullpunkt, så vi må ha at

$$U_1(h) = U_2(r) - U_2(r_0)$$

der  $r_0$  er jordradien, og dermed  $h = r - r_0$  eller  $r = r_0 + h$ . Vi skriver om

$$U_2(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{r_0 + h} = -\frac{GMm}{r_0} \frac{1}{1 + h/r_0} = -\frac{GMm}{r_0} \frac{1}{1 + a}$$

der vi har definert  $a = h/r_0$ . Vi er interessert i situasjonen der  $h \ll r_0$  slik at  $a \ll 1$ . Legg merke til at vi har skrevet om uttrykket slik at vi har en dimensjonsløs liten parameter  $a$ . Når vi skal rekkeutvikle skal det alltid være i potenser av en dimensjonsløs størrelse. Ellers gir det ikke mening å si at noe er lite, det må alltid være at noe er lite i forhold til noe annet. I dette tilfellet er høyden  $h$  liten i forhold til jordradien  $r_0$ . Taylorrekka er (sjekk dette selv ved å bruke (1) eller (2))

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$$

Vi får da at

$$U_2(r) = -\frac{GMm}{r_0} \left[ 1 - \frac{h}{r_0} + \left( \frac{h}{r_0} \right)^2 + \dots \right] = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMm}{r_0^2} h - \frac{GMm}{r_0^3} h^2 + \dots$$

Om vi definerer potensiell energi relativt til bakkenivå, men fortsatt tar hensyn til at tyngdekrafta varierer med høyden er da den potensielle energien

$$U(h) = U_2(r) - U_2(r_0) = \frac{GMm}{r_0^2} h - \frac{GMm}{r_0^3} h^2 + \dots$$

Hvis vi definerer  $g = \frac{GM}{r_0^2}$  er

$$U(h) = mgh - mgh \frac{h}{r_0} + \dots$$

Vi ser altså at når  $h \ll r_0$  kan vi få tilbake det vanlige uttrykket  $mgh$ , og vi kan også anslå hvor mye feil det blir om vi erstatter det eksakte uttrykket  $U(r)$  med dette (mer om feil i Taylorpolynomer kommer etter hvert i MAT1100).

## 4 Ofte kan vi forenkle regninga ved å kombinere kjente rekker

Hvis vi skal rekkeutvikle  $f(x) = \frac{1}{1-x^7}$  kan vi bruke Taylors formel direkte. Dette er veldig komplisert og ikke praktisk. Jeg regnet ut (med pc) de første deriverte

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1-x^7} \\f'(x) &= \frac{7x^6}{(1-x^7)^2} \\f''(x) &= \frac{98x^{12}}{(1-x^7)^3} + \frac{42x^5}{(1-x^7)^2} \\f'''(x) &= \frac{2058x^{18}}{(1-x^7)^4} + \frac{1764x^{11}}{(1-x^7)^3} + \frac{210x^4}{(1-x^7)^2} \\f^{(4)}(x) &= \frac{57624x^{24}}{(1-x^7)^5} + \frac{74088x^{17}}{(1-x^7)^4} + \frac{22344x^{10}}{(1-x^7)^3} + \frac{840x^3}{(1-x^7)^2}\end{aligned}$$

Men hvis vi setter  $u = x^7$  ser vi at

$$f(x) = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots = 1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \dots$$

Tilsvarende hvis vi har  $f(x) = e^{ax}$  er

$$f(x) = 1 + ax + \frac{x^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \dots$$