

Forelesningsnotater, FYS1100 uke 9

Joakim Bergli

1 Rakettlikningen

Bevaring av driv gir oss en fin måte å beskrive en situasjon der massen til et legeme forandrer seg med tida ved at noe masse kastes ut eller leges til, som for eksempel en rakett.

1.1 Utledning av rakettlikningen

Legemet vi følger har massen $m(t)$ og farta $\vec{v}(t)$. Vi endrer massen med en liten mengde Δm (for en rakett når massen avtar er $\Delta m < 0$). Drivet før dette skjer er

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}.$$

Her skriver vi ikke $m(t)$ og $\vec{v}(t)$ på høyre side selv om det er det vi mener. Det blir lettere å lese likningene på denne måten, men vi må huske at vi mener disse størrelsene ved et bestemt tidspunkt, og at de forandrer seg. Etter at massen er endret er

$$\vec{p}(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - \Delta m \vec{u}$$

der $\vec{u}$ er farta til den massen som sendes ut. Dermed er endringen i driv

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) = m\Delta \vec{v} + \Delta m \vec{v} + \Delta m \Delta \vec{v} - \Delta m \vec{u} \approx m\Delta \vec{v} + \Delta m \vec{v} - \Delta m \vec{u}.$$

Leddet $\Delta m \Delta \vec{v} \approx 0$ siden det er et produkt av to små størrelser. Vi har da når $\Delta t \rightarrow 0$ at summen av eksterne krefter er

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt}.$$

1.2 Eksempel: En rakett

Her er det ingen ytre kraft, $\vec{F}_{ext} = 0$. Vi lar bevegelsen være i en dimensjon, og antar at gassen som sendes ut av raketten har en fast relativ hastighet v_{rel} i forhold til raketten, så $v - u = v_{rel}$ og denne varierer ikke med tida. Da er

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dm}{dt}$$

eller

$$\frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}.$$

Vi integrerer begge sider og får

$$\int_0^t dt' \frac{dv}{dt'} = -v_{rel} \int_0^t dt' \frac{1}{m} \frac{dm}{dt'} = -v_{rel} \int_{m_0}^{m_1} \frac{dm}{m}.$$

Der m_0 er startmassen og m_1 er sluttmassen. Dermed er

$$v(t) = v(0) - v_{rel} \ln \frac{m_1}{m_0}.$$

Husk at $m_1 < m_0$ så $\ln \frac{m_1}{m_0} < 0$ og slutfarta blir større enn startfarta.

1.3 Eksempel: Sand i vogn

Dette er en utvidelse av eksempel 12.7.1 i læreboka. En jernbanevogn beveger seg rett fram mens det lastes sand oppi. Sanda faller ned med en konstant rate $R = \frac{dm}{dt}$ samtidig som den trekkes med en kraft F .

1.3.1 Konstant fart

I eksempelet i boka er det bare funnet hvor stor F må være for at farta skal være konstant. Da er

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} + vR.$$

Konstant fart betyr $\frac{dv}{dt} = 0$, så krafta må være $F = vR$.

1.3.2 Oppbremsing uten ytre kraft

Her ser vi på $F = 0$, og en startfart $v(0) = v_0$.

$$m \frac{dv}{dt} + vR = 0.$$

Her er det viktig å huske at $m = m(t)$ er en funksjon av tida og ikke konstant. Hvis massen i starten er $m(0) = m_0$ er $m = m_0 + Rt$. Likninga er separabel og vi har

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -\frac{R}{m} = -\frac{R}{m_0 + Rt}.$$

Dermed har vi

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = -R \int_0^t \frac{dt'}{m_0 + Rt'}$$

som gir

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\ln \frac{m_0 + Rt}{m_0} = -\ln \left(1 + \frac{Rt}{m_0} \right).$$

Dermed er farta som funksjon av tida

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{Rt}{m_0}}.$$

Når $t \rightarrow \infty$ blir $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$, så vogna stoppes opp fordi drivet er konstant, men massen øker og dermed må fara avta.

1.3.3 Hvordan varierer farta når $F \neq 0$?

Vi kan også finne farta som funksjon av tida hvis krafta ikke er akkurat den som gir konstant fart.

$$F = Rv + m \frac{dv}{dt}, \quad m = m_0 + Rt. \quad (1)$$

Så lenge F er konstant er denne likninga separabel.

Alternativ 1: Løsning ved separasjon

Vi kan skrive om likninga til

$$\frac{R}{F - Rv} \frac{dv}{dt} = \frac{R}{m_0 + Rt}$$

og integrere

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{R dv'}{F - Rv'} &= \int_0^t \frac{R dt'}{m_0 + Rt'} \\ -\ln \frac{Rv - F}{Rv_0 - F} &= \ln \left(1 + \frac{Rt}{m_0} \right) \\ v(t) &= \frac{F}{R} + \frac{v_0 - F/R}{1 + \frac{Rt}{m_0}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Alternativ 2: Løsning ved integrerende faktor

Vi kan skrive om likning (1) som

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m} v = \frac{F}{m}$$

Vi regner ut

$$\int \frac{R}{m_0 + Rt} dt = \ln |m_0 + Rt|$$

Den integrerende faktoren vi må gange med er

$$e^{\int p(t) dt} = m_0 + Rt$$

Det gir

$$(m_0 + Rt) \frac{dv}{dt} + Rv = F$$

som vi ser er lik

$$\frac{d}{dt} [(m_0 + Rt)v] = F.$$

Dermed er

$$(m_0 + Rt)v = \int F dt = Ft + C \quad (3)$$

Hvis initialbetingelsen er $v(0) = v_0$ er $C = m_0 v_0$. Dermed er

$$v(t) = \frac{Ft + m_0 v_0}{Rt + m_0}.$$

Dette er lik det vi fant over i likning (2) (sjekk det!).

For å sjekke om dette virker rimelig kan vi se at det gir riktig enhet (m/s). Vi kan også sjekke at $v(0) = \frac{m_0 v_0}{m_0} = v_0$ som det skal. Vi kan også se hva som skjer etter lang tid. Da vil konstantleddene i teller og nevner være ubetydlige og vi har

$$v(t) \approx \frac{Ft}{Rt} = \frac{F}{R}.$$

Dette er nettopp den farta som vi fant i avsnitt 1.3.1 at er konstant med den gitte krafta.

Vi får altså samme svar med begge metodene, men dersom krafta ikke er konstant, men en gitt funksjon av tida, $F(t)$, vil ikke likninga være separabel, og vi kan ikke bruke den metoden. Med integrerende faktor vil vi kunne finne en løsning så lenge vi klarer å løse integralet i likning (3).

1.4 Eksempel: Vanndråpe i fuktig luft

En vanndråpe har massen $m(t)$ som endrer seg med tida ettersom dråpa vokser. Den faller gjennom fuktig luft inne i en sky der den treffer mange små vanndråper som fester seg til den hvis de blir truffet. Vi antar at disse små dråpene ligger i ro før dråpa treffer dem. Hvordan øker farta som funksjon av tida? Ytre kraft er tyngden $G = mg$ og rakettlikninga gir

$$mg = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}. \quad (4)$$

Hvis tettheten av små vanndråper er slik at det er en gjennomsnittlig massetetthet av vann i lufta på ρ har vi at

$$\frac{dm}{dt} = \rho A v$$

Der $A = 4\pi r^2$ er tverrsnittsarealet og v farta og r radien til den fallende dråpa. Vi kan relatere dette til massen ved at volumet er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ og massen er $m = \rho_v V = \frac{4}{3}\pi \rho_v r^3$ hvis ρ_v er massetettheten til vann. Dermed er

$$r = \left(\frac{4}{3}\pi \rho_v \right)^{-1/3} m^{1/3}$$

og vi får at

$$\frac{dm}{dt} = K m^{2/3} v, \quad K = 4\pi \rho \left(\frac{4}{3}\pi \rho_v \right)^{-2/3}. \quad (5)$$

Går vi tilbake til likning (4) får vi

$$\frac{dv}{dt} = g - K v^2 m^{-1/3}. \quad (6)$$

Likningene (5) og (6) er et sett av koblede difflikninger som må løses sammen fordi m inngår i likninga for v og motsatt. De er ikke-lineære fordi m og v ikke bare inngår lineært. Det er antagelig umulig å løse disse analytisk (si fra hvis noen klarer det!), så vi vil heller løse dem numerisk. Dette er tema neste uke.