

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Løsningsforslag (JB& ACL, 07.11.2022)

Eksamen FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2022

Dato: 28. november 2022, kl 15:00-19:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 7 sider

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator; Rottman: "Matematisk formelsamling"

Formelark finnes bakerst i oppgavesettet.

Husk at alle svar skal begrunnes. Riktig svar uten begrunnelse gir liten uttelling. Alle deloppgaver teller likt.

Oppgave 1 Fermiproblem

Hvor mye energi bruker du på å bøye deg ned og plukke opp en liten gjenstand fra bakken? Anslå størrelsesordenen, og forklar alle antagelser du gjør. Her vurderes først og fremst fornuftige antagelser og resonnement. Det er størrelsesordenen som er viktig her, ikke eksakte tall.

Løsning: For å anslå størrelsesorden kan vi tenke at jeg veier 70 kg, at tyngdepunktet mitt er normalt ca 1 m over bakken, og at det går ned til ca 0,5 m når jeg bøyer meg. Det betyr at jeg trenger en energi $Mgh = 70 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5 \text{ m} = 350 \text{ J}$ for å reise meg opp igjen. Antagelig bruker kroppen noe energi på å bøye seg ned også, selv om den potensielle energien avtar, for vi klarer ikke å omdanne den energien til lagret kjemisk energi. Så kanskje 500 J eller til og med 1 kJ er mer realistisk. Energien som trengs for å løfte den lille gjenstanden fra bakken og opp til høyden til tyngdepunktet er mye mindre enn energien som trengs for å flytte tyngdepunktet i seg selv. Med f.eks. en stein på 100g, blir det kun ca. 1 J ($mgh \approx 0.1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ J}$).

Oppgave 2 Differensiallikning

Finn løsningen til differensiallikninga

$$\ddot{x} + 3\dot{x} - 4x = 0$$

med initialbetingelsene $x(0) = 1$ og $\dot{x}(0) = -4$.

Løsning: Vi tipper en løsning på formen $x = e^{\lambda t}$ og setter inn i likninga. Da får vi den karakteristiske likninga

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

med de to røttene $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 1$. Den generelle løsninga er da på formen

$$x = Ae^{-4t} + Be^t$$

Vi bruker initialbetingelsene

$$\begin{aligned}x(0) &= A + B = 1 \\ \dot{x}(0) &= -4A + B = -4\end{aligned}$$

og finner $A = 1$ og $B = 0$. Dermed er løsningen $x(t) = e^{-4t}$.

Oppgave 3 Rekkeutvikling av relativistisk energi

Det relativistiske uttrykket for energien til en partikkel med masse m som beveger seg med farta v er gitt ved

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

- a) Finn Taylorpolynomet av grad 4 i v til dette uttrykket (hvor verdien a som v skal rekkeutvikles om er $a = 0$).

Løsning:

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}$$

- b) Forklar betydningen av de to laveste ordens leddene i dette polynomet.

Løsning: Det første leddet, mc^2 , representerer energien som partikkelen har i form av å ha masse, dette leddet er uavhengig av farta. Det andre leddet, $\frac{1}{2}mv^2$ er den ikke-relativistiske kinetiske energien. Dette er en god tilnærming til den kinetiske energien når $v \ll c$. Når v nærmer seg c vil det siste leddet bli sammenliknbart med det andre, og det ikke-relativistiske uttrykket for kinetisk energi blir unøyaktig.

Oppgave 4 Et romskip

Romskipet ditt er bygget som et stort roterende hjul for å simulere tyngdekraften. Radius på hjulet er $R = 50$ m.



- a) Hvor mange omdreininger per minutt kreves det for å simulere tyngdekraften på jorden, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$?
- b) Hva er forskjellen i akselerasjon mellom føttene dine og hodet ditt hvis du er 2.0 m høy?

Løsning:

- a) Sentripetalakselerasjonen skal være like stor som tyngdeakselerasjonen:

$$a = R\omega^2 = g \Rightarrow \omega = \sqrt{g/R} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R}} = 14.2 \text{ s} \quad (1)$$

En omdreining tar 14.2s. Rotasjonshastigheten er $\frac{60 \text{ s}}{14.2 \text{ s}} = 4.23$ omdreininger/min.

- b) Føttene beveger seg på en sirkelbane med $R_F = 50 \text{ m}$. Hodet beveger seg på en sirkelbane med $R_H = 48 \text{ m}$. Akselerasjonen på føttene:

$$a_F = R_F\omega^2 = R_F \frac{g}{R_F} = g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

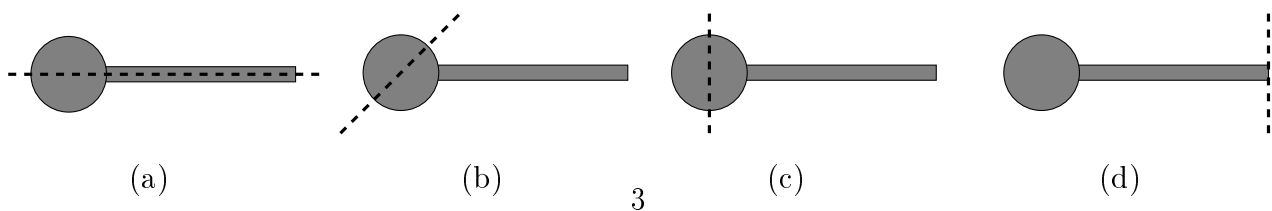
Akselerasjon på hodet:

$$a_H = R_H\omega^2 = R_H \frac{g}{R_F} = \frac{48}{50}g = 9.42 \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

Differansen er da $a_F - a_H = 0.39 \text{ m/s}^2$.

Oppgave 5 Treghetsmoment

Et legeme er laget av en homogen stav og ei homogen kule med samme masse. Kula har en radius som er mye mindre enn lengden av staven. Rangér treghetsmomentene I_a til I_d for rotasjon om de stiplede linjene fra det største til det minste. Forklar resonnementet ditt og begrunn rekkefølgen.



Løsning: Fra definisjonen av treghetsmoment: $I = \int_M \rho^2 dm$, hvor ρ er avstanden fra rotasjonsaksen, har vi

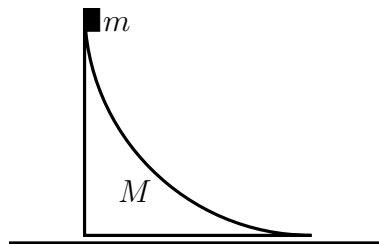
(d): har massen fordelt i størst gjennomsnittlig avstand fra rotasjonsaksen, dvs. *størst* treghetsmoment.

(c): her har staven omtrent samme treghetsmoment som i (d), men kula bidrar mye mindre fordi rotasjonsaksen går igjennom dens massesenter, *nest størst*.

(b): Kula som (c), men staven mindre siden den ligger nærmere rotasjonsaksen. Dette treghetsmomentet er *nest minst*.

(a): Minste midlere avstand fra rotasjonsaksen for både kula og staven, dvs. *minst* treghetsmoment.

Oppgave 6 En kloss sklir på en bane



Figuren viser en liten kloss med massen m som glir friksjonsfritt nedover en bane som har form som en kvartsirkel. Banen er ikke festet til underlaget, men kan gli friksjonsfritt. Vi ser bort fra luftmotstand. Massen til banen er M . Hvor stor fart får klossen når den kommer til bunnen av banen? Den opprinnelige høyden til klossen over underlaget er h .

Løsning: Idet klossen kommer til bunnen av banen vil den bevege seg mot høyre, mens banen beveger seg mot venstre. Bevaring av mekanisk energi (vi kaller farta til klossen v , farta til banen V og starthøyden $h = 0,80$ m):

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

Ser på system kloss+bane, her er det kun indre krefter i horisontal retning. Bevegelsesmengden må være bevart og lik 0, og dermed er $mv + MV = 0$, eller $V = -vm/M$. Vi kan sette dette inn i uttrykket over, og får

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + m/M}}.$$

Oppgave 7 Kraftmåling på en kloss

En kloss trekkes i en rett linje bortover et ujevnt underlag. Vi har en kraftmåler som måler krafta som brukes til å trekke klossen med som funksjon av tida, denne krafta er i samme retning som bevegelsen. Samtidig måles posisjonen til klossen ved de samme tidspunktene. Resultatene fra eksperimentet er lagret i ei fil med tre kolonner. Starten av fila er vist under.

t	F	x
0	0.3	0
0.1	0.4	0.04
0.2	0.6	0.12
0.3	0.5	0.15

Du kan anta at de tre kolonnene er lest inn i et program og ligger i variabler som heter 't', 'F' og 'x' (hver av disse er da ei liste med elementer). Du vil beregne hvor stort arbeid krafta har gjort under bevegelsen ved numerisk integrasjon.

- a) Velg en numerisk integrasjonsmetode og forklar hvordan den virker og hvordan den skal anvendes på dataene fra fila.

Løsning:

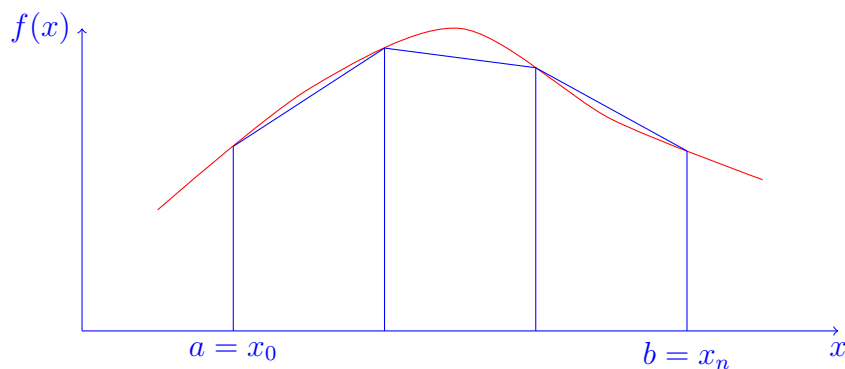
Arbeidet er

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx.$$

Vi velger trapesmetoden for numerisk integrasjon, den består i at man deler integrasjonsintervallet i mange små deler og tilnærmer integralet

$$\int_a^b f(x) dx$$

med arealet av innskrevne trapeser i hver del.



Hver trapes har arealet $\frac{1}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_i))\Delta x_i$ der $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (merk at vi her bruker ujevne intervaller på x -aksen siden datapunktene våre ikke er i jevn avstand). Dermed er integralet

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \frac{1}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_i))\Delta x_i.$$

I vårt tilfelle er funksjonen $f(x)$ den målte krafta, slik at vi for $f(x_i)$ må bruke F_i (element nummer i i lista 'F').

- b) Skriv en kodesnutt som utfører den numeriske integrasjonen med den metoden du valgte. Det er ikke nødvendig å skrive et fullstendig program, bare den delen som gjør integrasjonen med utgangspunkt i variablene definert over.

Løsning:

```
# Program som leser målte verdier for t,F og x og beregner arbeidet med trapesmetoden. Eksamen FYS1100, høst 2022

# Den første delen leser inn data fra fil. Dette var ikke en nødvendig del av eksamen
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fil = open("kloss.dat")

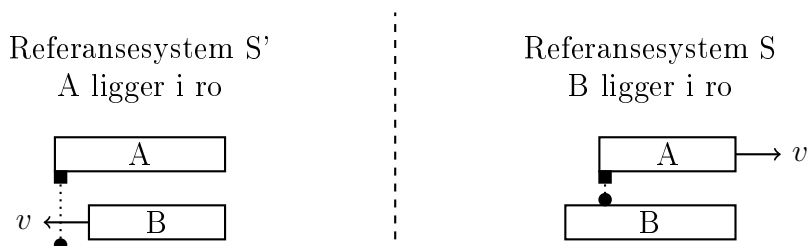
t = []
F = []
x = []
l = fil.readline().split()
l = fil.readline().split()
while l!=[]:
    t.append(float(l[0]))
    F.append(float(l[1]))
    x.append(float(l[2]))
    l = fil.readline().split()
fil.close()

# Her går vi gjennom datapunktene og beregner arbeidet. Dette er alt som kreves i besvarelsen
W = 0
for i in range(len(x)-1):
    dx = x[i+1]-x[i]
    W = W + (F[i+1]+F[i])*dx/2.
    print(W,x[i],x[i+1])

# Printer ut svaret.
print(f"Arbeidet er {W} J")
```

Oppgave 8 Et romskip skyter på et annet

To identiske romskip, A og B, med lengden L passerer hverandre med relativ fart v . Sett fra referansesystem S' der A ligger i ro vil det idet den høyre (fremste) enden av A passerer den høyre (bakerste) enden til B fyres av en kanon i den venstre (bakerste) enden til A rettet vinkelrett på bevegelsesretningen. Siden B er lengdekontrahert vil prosjektilet ikke treffe B. Sett fra referansesystem S der B er i ro vil imidlertid romskip A være lengdekontrahert slik at prosjektilet treffer et stykke inn på romskip B. Avstanden mellom romskipene er liten, slik at vi kan se bort fra tida prosjektilet bruker mellom A og B.



Kommer prosjektilet til å treffe B eller ikke? Forklar hva som er feil med resonnementene over.

Løsning: I system S' (der A er i ro) er de to hendelsene at høyre endene av romskipene er på samme sted og at kanonen avfyres samtidig. Siden de ikke er på samme sted vil de ikke være samtidig i system S . For at beskrivelsen i S skal stemme med den i S' må kanonen fyres av tidligere, før venstre enden til A når fram til venste enden av B, og kanonkula bommer også sett fra system S . Vi kan sjekke at dette er tilfellet ved å bruke Lorentztransformasjonen. Vi velger $t = 0$ til å være tidspunktet da høyre endene av romskipene passerer hverandre, og legger origo i begge systemer til høyre endepunktene. Da har hendelsen at høyre endepunktene passerer koordinatene $(t, x) = (t', x') = (0, 0)$. I S' har hendelsen at kanonen avfyres koordinatene $(t', x') = (0, -L)$. I S har da denne hendelsen koordinater

$$x = \gamma(x' + vt') = -\gamma L \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') = -\gamma \frac{vL}{c^2}.$$

Som vi forventet er $t < 0$ slik at i referansesystem S avfyres kanonen før høyre ender passerer hverandre. Vi ser også at $x < -L$ som betyr at den venste enden til romskip A ikke har nådd fram til den venstre enden av B ennå, og dermed bommer kanonkula.