

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Løsningsforslag (ACL & JB, 07.11.2022)

PRØVEEKSAMEN: Eksamen FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2022

Dato: ??? (4 timer)

Oppgavesettet er på: 8 sider

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator; Rottman: "Matematisk formelsamling"

Husk at alle svar skal begrunnes. Riktige svar uten begrunnelse gir ikke poeng!

Oppgave 1 Fermiproblem

Hvor mange gresstrå er det på en fotballbane? Anslå størrelsesordenen, og forklar alle antagelser du gjør. Her vurderes primært fornuftige antagelser og resonnement. Det er størrelsesordenen som er viktig her, ikke eksakte tall.

Løsning: Vi kan anta ca. 5 gresstrå per cm^2 , $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$. Størrelsen på en fotballbane er ca. $100 \text{ m} \times 70 \text{ m}$. Da får vi:

$$5 \cdot 7 \cdot 10^3 \text{ m}^2 / 10^{-4} \text{ m}^2 = 35 \cdot 10^7,$$

så ca 350 millioner gresstrå.

Oppgave 2

Finn løsningen til differensiallikninga

$$\dot{x} = -x^2$$

med initialbetingelsen $x(0) = 1$.

Løsning: Vi separerer variablene og integrerer

$$\int_1^x \frac{dx'}{x'^2} = - \int_0^t dt'$$

$$1 - \frac{1}{x} = -t$$

$$x = \frac{1}{1+t}$$

Oppgave 3

Finn Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen

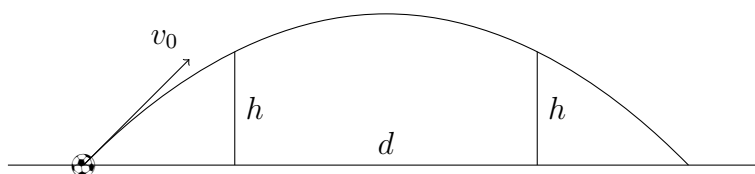
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

om punktet $a = 1$.

Løsning:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x^2} & f(1) &= \frac{1}{2} \\ \frac{df(x)}{dx} &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & \frac{df(1)}{dx} &= 0 \\ \frac{d^2f(x)}{dx^2} &= \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} & \frac{d^2f(1)}{dx^2} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

Oppgave 4



En fotballspiller sparker ballen med farta v_0 i en vinkel på 45° (slik at den får maksimal rekkevidde). Hun ønsker å sparke den slik at den akkurat passerer over hodet til to motspillere, som står i en avstand d fra hverandre, med høyden h (se figur). Vi ser bort fra luftmotstand.

a) Vis at avstanden mellom de to motspillerne er på formen

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - cgh}.$$

Finn verdien til c i denne formelen.

Løsning: Uten luftmotstand er det ingen krefter som virker i x -retning, så $v_x(t) = v_{0x}$. Posisjonen i x -retning er da gitt ved

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_{0x}t$$

med $x_0 = 0$ og hvor $v_{0x} = v_0 \cos \theta$. I y -retning har vi kun gravitasjon, så vi får en konstant akselerasjon $a_y = -g$ med positiv y -retning oppover. Dermed

$$v_y(t) = v_{0y} - gt,$$

og

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

med $y_0 = 0\text{m}$ og $v_{0y} = v_0 \sin \theta$. Så må vi finne de to tidene: t_1 hvor ballen akkurat passerer over hodet til den første motspilleren, og t_2 hvor ballen akkurat passerer over hodet på den andre, dvs. $y(t_1) = y(t_2) = h$. Vi løser 2.grads-polynomet

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + h = 0,$$

og får

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gh}}{g}.$$

Vi har to løsninger, $t_1 = \frac{v_{0y} - \sqrt{v_{0y}^2 - 2gh}}{g}$ og $t_2 = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 - 2gh}}{g}$. Vi ser på tidsintervallet $\Delta t = t_2 - t_1$ for å finne hvor langt i x -retning ballen har flyttet seg i løpet av denne tiden, som da er avstanden d mellom motspillerne:

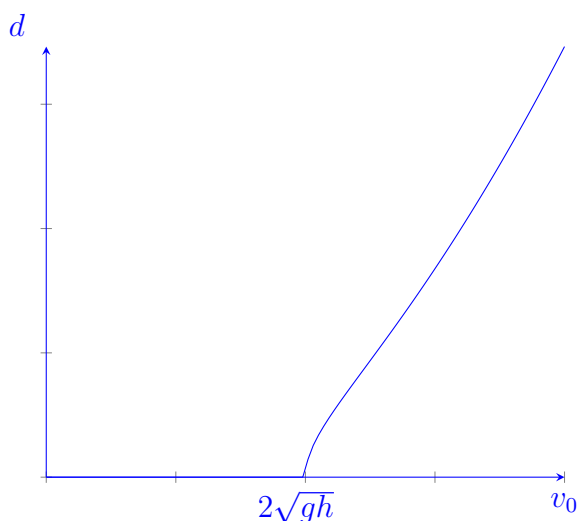
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_{0y}^2 - 2gh}}{g}.$$

Ballen beveger seg horisontalt med farta v_{0x} i denne tida, som gir strekninga (med $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$):

$$d = v_{0x}\Delta t = \frac{(\sqrt{2}/2) \cdot v_0 \cdot 2\sqrt{v_0^2(\sqrt{2}/2)^2 - 2gh}}{g} = \frac{v_0\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v_0^2 - 4gh}}{g} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 4gh}.$$

Så vi ser at faktoren $c = 4$.

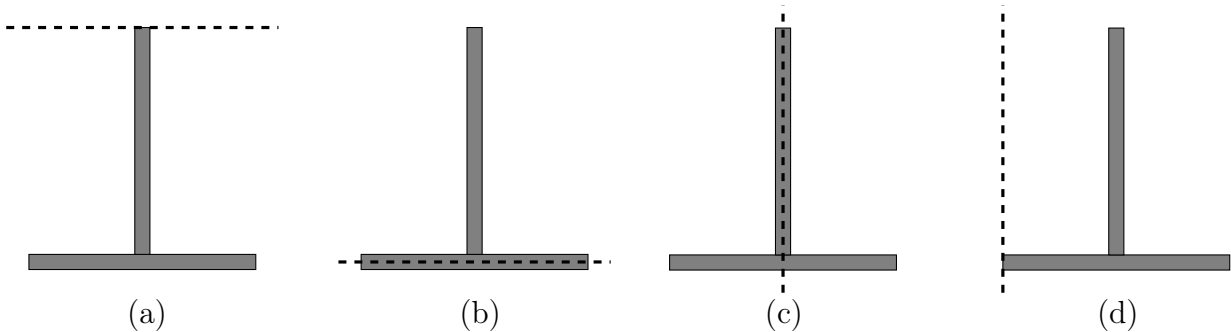
- b) Skisser en graf som viser d som en funksjon av v_0 . Beskriv grafen og diskuter de fysiske betingelsene for at grafen (og dermed uttrykket for d) skal være gyldig. **Løsning:**



Vi ser at grafen ikke er definert for $v_0 < 2\sqrt{gh}$. Dette er den minste farta ballen må sparkes med for å komme over høyden h i det hele tatt. For $v_0 > 2\sqrt{gh}$ stiger grafen, som betyr at de to motspillerne kan stå lengre og lengre fra hverandre ettersom ballen sparkes hardere.

Oppgave 5

Fire T-er er laget av to identiske staver med samme masse og lengde. Rangér treghetsmomentene I_a til I_d for rotasjon om den stiplede linjen fra det største til det minste. Forklar resonnementet ditt og begrunn rekkefølgen.



Løsning: Fra definisjonen av treghetsmoment: $I = \int_M \rho^2 dm$, hvor ρ er avstanden fra rotasjonsaksen, har vi

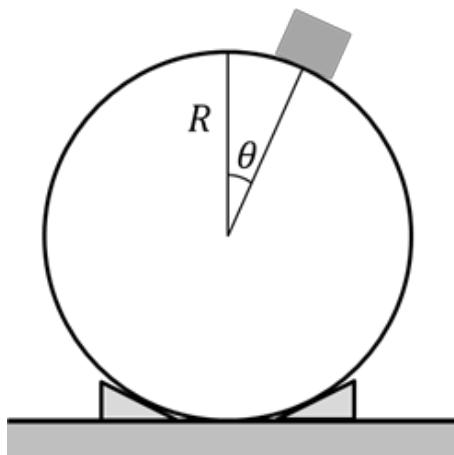
(a): har massen fordelt i størst gjennomsnittlig avstand fra rotasjonsaksen, dvs. *størst* treghetsmoment

(d): ikke så stor gjennomsnittlig avstand som i (a), *nest størst*

(b): en av stavene ligger langs rotasjonsaksen og bidrar derfor ikke til treghetsmomentet. Dette treghetsmomentet er *nest minst* siden massebitene i den andre staven har større gjennomsnittlig avstand fra rotasjonsaksen enn (c)

(c): *minst* fordi en av stavene igjen er langs rotasjonsaksen, og midlere avstand for massen i den gjenværende staven er mindre enn i (b)

Oppgave 6

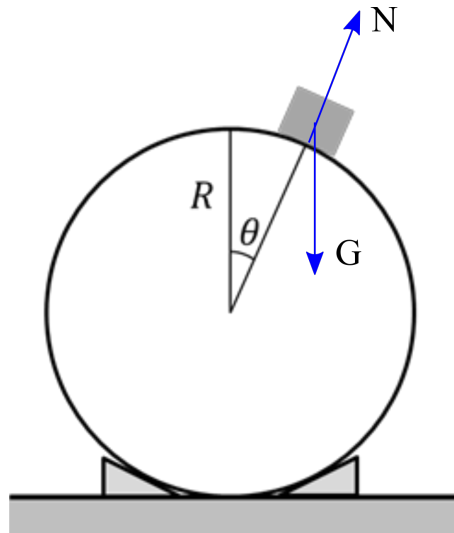


En liten blokk befinner seg på toppen av en stor kule. Kulen er festet til gulvet og beveger seg

ikke. Det er ingen friksjon mellom blokken og overflaten av kula, og heller ingen luftmotstand. Blokken får en liten puff og begynner å skli fra det høyeste punktet på kula til den ene siden.

- a) Tegn et frilegeme-diagram for blokken og navngi kreftene når den har beveget seg en vinkel θ fra toppen.

Løsning:



G er tyngdekrafta og N er normalkrafta fra kula på klossen.

- b) Finn farten til blokken som en funksjon av vinkelen θ .

Løsning: Når vinkelen er θ er høyden over sentrum $R \cos \theta$ hvis radien i kula er R . Blokken har da mistet en potensiell energi $mgR(1 - \cos \theta)$ og denne har gått over i kinetisk energi. Vi har da

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos \theta)$$

som gir

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}.$$

- c) Finn vinkelen når blokken mister kontakt med overflaten av kula.

Løsning: Blokken mister kontakten med overflaten til kula når normalkrafta er null. Vi ser på kreftene normalt til kuleflata. Det er to krefter, normalkrafta N og normalkomponenten til tyngden $G \cos \theta$. Siden blokken følger kuleflata må den ha en sentripetalakselerasjon v^2/R som svarer til summen av kreftene i radiell retning:

$$mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{R}.$$

Når $N = 0$ betyr det

$$\cos \theta = \frac{v^2}{gR} = 2(1 - \cos \theta)$$

som gir

$$\cos \theta = \frac{2}{3}.$$

Dermed er $\theta = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ$.

d) Vis at vinkelen θ som funksjon av tida tilfredsstiller differensiallikninga

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta \quad (1)$$

Løsning: Blokka beveger seg på en sirkelbane, med fart tangentielt til banen gitt ved

$$v_t = \omega R,$$

og akselerasjon

$$a_t = \alpha R$$

hvor α er vinkelakselerasjonen, $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Fra Newtons 2. lov har vi også at den tangentielle akselerasjonen er gitt ved

$$a_t = g \sin \theta.$$

Setter disse lik hverandre og får

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} R = g \sin \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{R} \sin \theta.$$

e) Skriv et program som beregner $\theta(t)$ ved å numerisk integrere likning (1). Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, men det er nok å skrive initialverdier og selve integrasjonsløkka. La programmet stoppe når blokken forlater kuleflata. Forklar metoden du bruker og alle antagelser du gjør.

Løsning:

```
# Beregner posisjonen til en kloss som glir langs ei kuleflate og finner det punktet der klossen forlater flata.

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Fysiske parametre
g = 9.81
R = 1.
m = 1.

# Parametre for simuleringen
```

```

dt = 0.001
tMax = 20
theta0 = 0.
# Gir klossen en liten startfart
dTheta0 = 0.01

#Variable for aa lagre resultater
n = int(tMax/dt)
t = np.zeros(n)
theta = np.zeros(n)
dTheta = np.zeros(n)
N = np.zeros(n)

t[0] = 0
theta[0] = theta0
dTheta[0] = dTheta0
N[0] = 1.

i=0
# Itererer saa lenge normalkrafta er positiv (eller vi har naadd tMax)
while N[i]>0 and i<n-1:
    # Vinkelakselerasjonen
    ddTheta = g/R*np.sin(theta[i])
    t[i+1] = t[i] + dt
    # Vinkelfart og vinkel med Euler-Cromer
    dTheta[i+1] = dTheta[i] + ddTheta*dt
    theta[i+1] = theta[i] + dTheta[i+1]*dt
    # Regner ut normalkrafta
    N[i+1] = m*g*np.cos(theta[i+1]) - m*dTheta[i+1]**2*R
    i = i+1

print(f"Vinkelen er {180./np.pi*theta[i]} grader. cos(theta) = {np.cos(theta[i])}.")

```

- f) Nå erstatter vi blokken med ei lita kule. Nå antar vi også at det er friksjon mellom overflaten på den store og den lille kula, og den lille kula triller uten å skli nedover den store kula. Vil nå vinkelen der den mister kontakten med overflaten til kula være større, lik eller mindre enn den du fant for klossen?

Løsning: Med ei kule som triller istedenfor en blokk som glir vil noe av den potensielle energien gå til rotasjonskinetisk energi. Det betyr at farta i en gitt høyde er mindre, og dermed er normalkrafta

$$N = mg \cos \theta - m \frac{v^2}{R}$$

større enn for blokken. Det betyr at den ikke er null for kula når den er null for blokken, og derfor mister den kontakten ved en større vinkel.

Oppgave 7

En student står på en stol med armene utstrakt og en vekt i hver hånd. Stolen roterer uten friksjon. Når hun drar inn armene blir treghetsmomentet mindre og vinkelhastigheten hennes øker på grunn av spinnbevaring. Hva skjer hvis hun slipper vektene istedenfor å dra inn armene? Vil vinkelhastigheten øke, minke eller forbli det samme?

Løsning: Dette spørsmålet har mange fine fysikk-aspekter! Vi ser på de to tilfellene hver for seg: Tilfelle 1: Hvis vi betrakter student pluss vekter som ett system, så virker det ingen ytre kraftmoment som kan endre spinnnet på dette systemet, så spinnnet er bevart. Når hun drar inn armene, reduseres treghetsmomentet til vektene (hun bruker en kraft på vektene som reduserer deres avstand fra rotasjonsaksen). Dermed må vinkelhastigheten for systemet student-pluss-vekker øke for å bevare totalspinnet. Tilfelle 2: Nå går vi fra en situasjon hvor vi har et lukket system av student pluss vekter, til et de-koblet system når hun slipper vektene. Før vektene slippes, har vekter og student samme vinkelhastighet. I det vektene slippes, vil vektene fare avgårde med en hastighet tangentielt til sirkelbanen de var på, med størrelse $v = \omega R$ hvor R er radien i sirkelen. Vektene får nå et spinn $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, hvor normalkomponenten til $\vec{r}$ relativt til hastigheten $\vec{v}$ ikke endres – spinnnet er bevart for vektene. Hva med studenten? Så sant hun fortsatt holder armene utstrakt forandres ikke treghetsmomentet hennes (armene hennes er i samme avstand fra rotasjonsaksen). Igjen er det ikke noe ytre kraftmoment som kan endre spinnnet hennes, og vinkelhastigheten hennes forblir den samme. Så spinnnet er fortsatt bevart, men nå for system student og system vekter hver for seg.

Oppgave 8

Saturn har omtrent samme tyngdeakselerasjon på overflaten som Jorden. Vil da en satellitt ved Saturns overflate også ha samme unnsliplingsfart som en satellitt ved Jordens overflate? Unnsliplingsfarta er den farta du må kaste noe oppover fra overflaten for at den aldri skal komme ned igjen (den når uendelig avstand fra planeten).

Løsning: Vi finner unnsliplingsfarta ved å bruke bevaring av mekanisk energi, og vi definerer at potensiell energi er null får satellitten (med masse m) er uendelig langt borte (da har den også null kinetisk energi):

$$\frac{1}{2}mv_u^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0 + 0,$$

hvor M er massen til planeten og R er radien til planeten. Dette gir

$$v_u = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}.$$

Siden tyngdeakselerasjonen er den samme,

$$g_{\text{Jord}} = \gamma \frac{M_{\text{Jord}}}{R_{\text{Jord}}^2} \approx \gamma \frac{M_{\text{Saturn}}}{R_{\text{Saturn}}^2} = g_{\text{Saturn}},$$

får vi (kaller $g_{\text{Jord}} = g_{\text{Saturn}} = g$)

$$v_u = \sqrt{2gR_{\text{Saturn}}},$$

og siden $R_{\text{Saturn}} > R_{\text{Jord}}$ så er unnsliplingsfarta større på Saturn enn på Jorda.