

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag ACL & JB.

(Siste oppdatering 30.mai, skrivefeil i oppgave 4c), her er det selvfølgelig differensialligningen oppgitt i oppgave 4b) som menes.)

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2023

Dato: Tirsdag 30. mai 2023, kl. 09:00-13:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 4 sider (formelark bakerst på side 5).

Tillatte hjelpemidler:

Rottmann: "Matematisk formelsamling".

Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Husk at alle svar må begrunnes!

Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 Baron von Münchhausen

I en av fortellingene om Baron von Münchhausen løfter den berømte baronen seg selv og hesten sin ut av ei myr ved å dra i sitt eget hår, se illustrasjon. Er dette mulig å gjøre? Hvorfor eller hvorfor ikke? Bruk det du har lært om Newtons lover og indre og ytre krefter i argumentasjonen din.



Løsning: Dette er ikke mulig, uansett hvor sterk Baron von Münchhausen måtte være. Det oppstår kun *indre* krefter i system Baron von Münchhausen pluss hest, og vi vet fra Newtons 2. lov at vi må ha en netto *ytre* kraft for å kunne akselerere et system.

Oppgave 2 Fermiproblem: Flytte Mount Fuji



Hvor mange lastebil-lass trengs for å flytte Mount Fuji? Forklar hvordan du tenker og beskriv hvilke antagelser du gjør for å beregne antallet lastebil-lass.

(Bilde av Suicasmø, fra [Wikipedia](#)).

Løsning: Vi estimerer Mount Fuji som en kjegle siden fjellet er omtrent konisk, og vi ser fra bildet at omkretsen til Mount Fuji må være stor (diameter på baseflaten mye større enn høyden på fjellet). Vi kan gjette på at høyden h er ca 4000 m, og med diameter d omtrent 10 ganger så mye, ca 40 km, og dermed radius $r = 20$ km. Vi ser bort fra at Fuji også har et krater som ikke er fylt med stein. Vi bruker formelen for kjeglevolum for en sirkulær kjegle fra Rottmann side 34 og får:

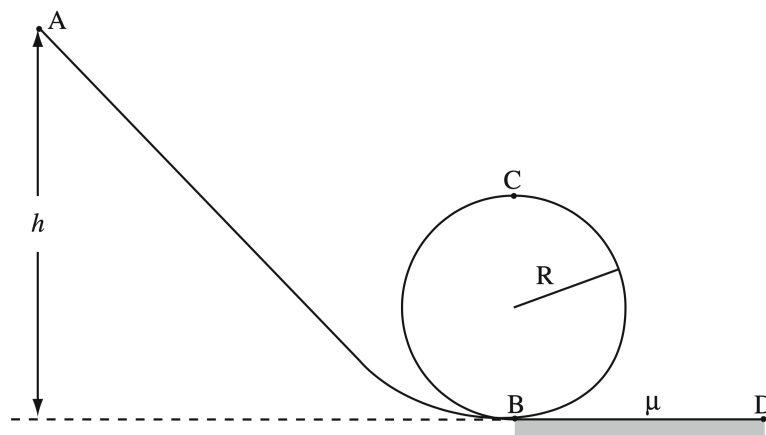
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = 1.68 \cdot 10^{12}\text{m}^3 \approx 2 \cdot 10^{12}\text{m}^3.$$

En vanlig lastebil tar ca. 10 kubikkmeter som er 10 m^3 , så da trenger vi

$$2 \cdot 10^{12}\text{m}^3 / (10\text{m}^3/\text{lastebil}) = 2 \cdot 10^{11} \text{ lastebil-lass}.$$

Oppgave 3 En kloss i en loop

En liten kloss glir ned langs en rampe og deretter gjennom en loop med radius R , se figur. Etter loopen stanser klossen i punkt D på et horisontalt bord med en ru overflate. Klossen starter i ro ved punkt A i høyde h over bordet. Friksjonen på rampen og i loopen er neglisjerbar, og vi ser hele tiden bort fra luftmotstand. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom klossen og bordet er μ_d . Denne oppgaven er så å si identisk med ukeoppgave G6.3 uke 6.



- (a) Finn farten v_B til klossen ved punkt B før den går rundt loopen.

Løsning: Uten friksjon og luftmotstand virker bare gravitasjon og mekanisk energi er derfor bevart:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

- (b) Finn farten v_C ved punkt C.

Løsning: Mekanisk energi er fortsatt bevart med samme argumentasjon som i forrige deloppgave:

$$U_A + K_A = U_C + K_C$$
$$mgh + 0 = 2mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h - 2R)}$$

(c) Hva er betingelsen for farten v_C slik at klossen holder kontakt med loopen?

Løsning: I punkt C virker gravitasjon og normalkraften fra banen på klossen. Begge er rettet nedover. Kreftene er årsak til sentripetalakselerasjonen som holder sirkelen på banen. Vi bruker Newtons andre lov:

$$-mg - N = -m\frac{v_C^2}{R}$$

Betingelsen for at blokken holder kontakt er at $N > 0$

$$N = m\frac{v_C^2}{R} - mg > 0 \Rightarrow v_C > \sqrt{Rg}$$

(d) Hvor høyt over bordet må klossen slippes for å gå rundt loopen?

Løsning: Vi bruker resultatet fra b)- og c)-oppgavene, og kvadrerer på begge sider av ulikhetstegnet:

$$2g(h - 2R) > Rg \Rightarrow h > \frac{5}{2}R$$

(e) Hvor langt sklir klossen på bordet før den stanser?

Løsning: Friksjonskraften er den eneste kraften som gjør arbeid på klossen (normalkraft og tyngdekraft virker ikke i bevegelsesretningen). Siden den dynamiske friksjonskraften er konstant med størrelse $\mu_d N$ får vi:

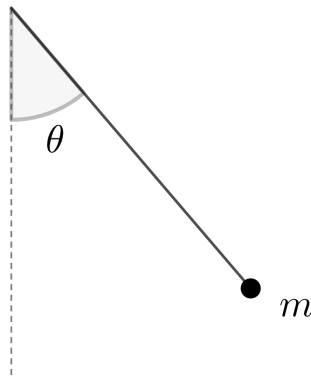
$$W_{BD} = - \int_{x_B}^{x_D} \mu_d N dx = -\mu_d mg(x_D - x_B) = -\mu_d mgs$$

hvor vi har brukt $x_D - x_B = s$. Arbeid-energi-teoremet gir $W_{BD} = K(x_D) - K(x_B)$ og vi setter inn:

$$-\mu_d mgs = 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\frac{1}{2}m2gh$$

Da får vi at $s = \frac{h}{\mu}$.

Oppgave 4 Pendel med luftmotstand



Figuren viser en pendel rett før den slippes. Vinkelen θ_0 er mellom vertikalen og snora i det den slippes, og θ er vinkelen som funksjon av tiden. Vi antar at snora er masseløs og stram, og snora har lengde R . Akselerasjonen til pendelen i tangentiell retning a_T er gitt ved

$$a_T = -g \sin \theta \quad (1)$$

dersom vi ser bort fra luftmotstand. Vi kan bruke buelengden $b = R\theta$ for å angi strekningen som pendelen beveger seg, og vi kan da uttrykke den tangentielle akselerasjonen som

$$a_T = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha,$$

hvor α er vinkelakselerasjonen. Vi skal nå ta hensyn til luftmotstand, og vi skal bruke en luftmotstandskraft $\vec{F}_D$ som er gitt ved

$$\vec{F}_D = -D\vec{v}$$

der D er en konstant som beskriver størrelsen på motstanden, og $\vec{v}$ er pendelens hastighet.

Denne oppgaven er svært lik seminaroppgave S7.3 uke 7.

- (a) Uttrykk luftmotstandskraften som en funksjon av vinkelfart ved å bruke buelengden, og finn et uttrykk for den tangentielle akselerasjonen i ligning (1) med luftmotstand inkludert.

Løsning: Dersom vi deriverer buelengden $b = R\theta$ med hensyn på tid, får vi at størrelsen til hastigheten v i tangentiell retning er $v = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$. Luftmotstandskraften blir derfor

$$\vec{F}_D = -DR \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_T$$

Ved å bruke N2L får vi da

$$ma_T = -mg \sin(\theta) - DR \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow a_T = -g \sin(\theta) - \frac{DR}{m} \frac{d\theta}{dt}$$

- (b) Vis at vinkelen $\theta(t)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0. \quad (2)$$

Løsning: Fra deloppgave a) har vi at den tangentielle akselerasjonen kan skrives som $R \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Vi kan derfor sette

$$R \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin(\theta) - \frac{DR}{m} \frac{d\theta}{dt}$$

Differensiallikningen for vinkelen er derfor

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0$$

- (c) Dersom vi vil løse denne differensialligningen analytisk, hvorfor er det da hensiktsmessig å Taylorutvikle $\sin(\theta)$ rundt 0 for denne differensialligningen? Bruk Taylorutviklingen til første orden til å skrive om differensialligningen fra c)¹ slik at den er lineær i θ og dens deriverte.

Løsning: Pendelen har et stabilt likevektspunkt i $\theta = 0$, som betyr at den vil oscillere rundt $\theta = 0$ hvis den slippes fra relativt liten vinkel.

$$\sin(\theta) \approx \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}(\theta - 0) + \dots = \theta + \dots$$

Differensiallikningen blir da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{R} \theta = 0$$

- (d) Løs differensialligningen analytisk med tilnærmingen fra forrige deloppgave med de gitte initialbetingelsene.

Løsning: (Ligner seminaroppgave S7.3 uke 7). Ligningen er en homogen, annenordens differensialligning på formen $\frac{d^2\theta}{dt^2} + p \frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0$. For å løse den, begynner vi med å finne det karakteristiske polynomet (se også formelark og “ABC”-formelen i Rottmann):

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} \lambda + \frac{g}{R} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \frac{g}{R}}$$

Nå er det flere muligheter. Som i seminaroppgaven bruker vi hjelpestørrelsene

$$\alpha = \frac{D}{2m}, \beta = \sqrt{g/R}, \text{ og } \gamma = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

¹Skrivefeil, skal være b)-oppgaven selvfølgelig.

Vi ser nå på de tre mulighetene:

1. Dersom $\frac{D^2}{4m^2} > \frac{g}{R}$, dvs. $\alpha^2 > \beta^2$. Da får vi to reelle røtter, og løsningen blir på formen

$$\theta(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Med initialbetingelsene $\theta(0) = \theta_0$ og $\frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0$ (vinkelfarten er null i starten), får vi

$$C_1 + C_2 = \theta_0$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

og får konstantene

$$C_2 = \frac{\theta_0}{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \text{ og } C_1 = \theta_0 \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right).$$

2. Dersom $\frac{D^2}{4m^2} = \frac{g}{R}$, får vi kun én reell rot, og dermed løsning på formen

$$\theta(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

Vi bruker igjen initialbetingelsene ($\theta(0) = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0$) og får:

$$C_1 = \theta_0$$

$$\lambda C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\lambda C_1 = -\lambda \theta_0.$$

3. Tilslutt, dersom $\frac{D^2}{4m^2} < \frac{g}{R}$, får vi to komplekse røtter: $\lambda_1 = -\alpha + i\gamma$ og $\lambda_2 = -\alpha - i\gamma$. (Dette er situasjonen vi hadde i seminaroppgaven, med oppgitte tall for konstantene). Vi får en løsning på formen

$$\theta(t) = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t).$$

Ved å bruke initialbetingelsene igjen får vi

$$\theta(0) = \theta_0 = C_1$$

$$C_2 = \frac{\alpha \theta_0}{\gamma}.$$

- (e) Skissér en kode som beregner vinkelfart $\omega(t)$ og vinkel $\theta(t)$ ved å numerisk integrere ligning (2). Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, det er nok å skrive opp initialbetingelsene og selve integrasjonsløkka. Begrunn ditt valg av numerisk metode.

Løsning: Her kan vi bruke at vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{D}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{R} \sin(\theta)$ fra ligning (2). Så bruker vi Euler-Cromer-metoden for å beregne vinkelfart og vinkel. Vi velger her Euler-Cromer fordi den gir en mer stabil løsning over mange tidssteg (tar av og til “for lite” og av og til “for mye”, i middel mer riktig for mange tidssteg enn Forward Euler som får en større systematisk feil).

```

theta[0] = theta_0
omega[0] = 0

for i in range (N-1):
    alpha = -g*np.sin(theta[i])/R - D*omega[i]/m
    omega[i+1] = omega[i] + alpha*dt
    theta[i+1] = theta[i] + omega[i+1]*dt

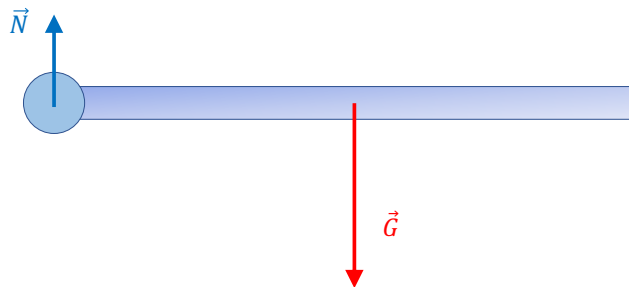
```

Oppgave 5 En stang roterer

En lang, tynn stav med masse m og lengde L er festet i et hengsel ved den ene enden, og kan rotere uten friksjon i hengselet, og vi ser også bort fra luftmotstand. Staven holdes først i den andre enden slik at den er i en horisontal posisjon. Når denne enden av staven slippes, vil staven rotere om hengselet. Tregghetsmomentet til en tynn stav som roterer om ett av endepunktene er gitt ved $I = \frac{1}{3}mL^2$.

- (a) Tegn et frilegemediagram for staven når den er i en horisontal posisjon og nettopp har blitt sluppet i den frie enden. Husk å navngi alle krefter.

Løsning:



Her er $\vec{G}$ tyngdekraften på staven, og $\vec{N}$ er normalkraften fra hengselet på staven. Størrelsen på tyngdekraften må være større enn for normalkraften, siden massesenteret til stanga vil bevege seg nedover.

- (b) Finn alle kraftmomentene som virker på staven om rotasjonsaksen gjennom hengselet rett etter at staven slippes.

Løsning: Siden normalkraften angriper punktet der rotasjonsaksen går igjennom, er kraftmomentet fra normalkraften null (kraftarmen er null). Kraftmoment fra gravitasjonskraften er

$$\tau_G = |\vec{r}_G \times \vec{G}| = \frac{1}{2}mgL \sin 90^\circ = \frac{1}{2}mgL.$$

- (c) Bestem størrelsen på normalkraften i hengselet rett etter at staven slippes.

Løsning: Vi bruker Newtons 2. lov i vertikal retning:

$$N - mg = ma.$$

Rett etter at staven slippes har den fortsatt ikke rukket å komme i bevegelse, så den har foreløpig ingen sentripetalakselerasjon (som ville pekt inn mot hengselet). Men den tangentielle akselerasjonen til massesenteret (som vil bevege seg på en sirkelbane) er ikke null, men gitt ved $a_{cm} = r_{cm}\alpha$ hvor r_{cm} er avstanden fra hengselet til massesenteret, og α er vinkelakselerasjonen til staven (dette finner vi ved å derivere $v_{cm} = \omega r_{cm}$ mhp. tid). I tillegg må vi bruke Newtons 2.lov for rotasjoner: $\tau_{net} = I\alpha$. Kraftmomentet til tyngdekraften om rotasjonsaksen i hengselet fant vi i forrige oppgave, og vi får

$$\alpha = \frac{\tau_G}{I} = \frac{\frac{1}{2}mgL}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g}{2L}.$$

Dette setter vi nå inn i $a_{cm} = r_{cm}\alpha$ og finner størrelsen til akselerasjonen i vertikal retning:

$$a_{cm} = \frac{L}{2} \frac{3g}{2L} = \frac{3}{4}g.$$

Vi velger positiv retning oppover (implisitt fra positiv normalkraft). Siden staven faller nedover vil a_{cm} være i negativ retning. Dermed får vi ved innsetting i N2L i vertikal retning, rett etter at staven slippes:

$$N - mg = ma = ma_{cm} = -\frac{3}{4}mg \Rightarrow N = mg - \frac{3}{4}mg = \frac{1}{4}mg.$$

- (d) Er mekanisk energi bevart i denne situasjonen? Er bevegelsesmengde bevart? Er spinn bevart? Husk å begrunne svaret ditt.

Løsning: Mekanisk energi er bevart, siden det ikke er noen ikke-konservative krefter som gjør et arbeid på staven. Bevegelsesmengde er ikke bevart, siden det virker en ytre kraft på staven (tyngdekraft), som øker bevegelsesmengden. Spinn er heller ikke bevart, siden det virker et netto kraftmoment fra tyngdekraften på staven om rotasjonsaksen i hengselet, og den får en vinkelakselerasjon forskjellig fra null, og spinnet øker.

- (e) Bestem vinkelfarten til staven i det den har rotert fra horisontal til vertikal posisjon.

Løsning: Siden staven ikke er påvirket av luftmotstand eller friksjon er mekanisk energi bevart. Staven starter i ro og med potensiell energi null. Massesenteret ligger i geometrisk sentrum av staven. Vi får:

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mgL$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}mL^2\omega^2 = \frac{1}{2}mgL \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

Oppgave 6 Astronauten

En astronaut slapper av i romskipet sitt, som passerer Jorda med en hastighet på $0.60c$.

- (a) Astronauten i romskipet har en puls på 65 hjerteslag per minutt. Hva er pulsen til astronauten målt av en observatør på Jorda?

Løsning: Her bruker vi formelen for tidsdilatasjon. Astronauten er i ro i romskipet, derfor er dette egentiden. En observatør på Jorda måler en forlenget tid. Tidsintervall mellom hvert hjerteslag i romskipet: $\Delta t_0 = 60\text{s}/65\text{slag} = 0.9231$ sekunder mellom hvert slag. Sett fra Jorda får vi $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 1.25 \cdot 0.9231\text{s} = 1.154$ sekunder. Antall hjerteslag per minutt blir da $60/1.154 \approx 52$ slag per minutt.

- (b) Astronauten får lyst til å måle hvor langt romskipet er, og måler med et målebånd at romskipet er 80 m. Så får astronauten lyst til å kjøre fortere enn $0.60c$ og øker farten til romskipet. Etter fartsøkningen måler en observatør på Jorda at romskipet er 60 m. Hvor fort kjører romskipet nå, etter fartsøkningen?

Løsning: Egenlengden er $l_0 = 80\text{m}$. Siden en observatør på Jorda måler at lengden $l = 60\text{m}$, kan vi bruke formelen for lengdekontraksjon og løse for relativhastigheten. Vi får:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{l_0}{l} = 1.33.$$

Så vet vi også at

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Kvadrerer på begge sider:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

og løser for v :

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{1.333^2}} = 0.66c.$$

Eksamenssett slutt.

Formelark FYS1100

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{hvor} \quad \vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{og} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\text{Konstant } \vec{a}: \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2, \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\text{Konstant } \alpha: \quad \omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{Baneakselerasjon:} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{r}\hat{u}_N$$

$$\text{Rotasjon:} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\text{Galilei-transformasjon, referansesystemer:} \quad \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}', \quad \vec{a} = \vec{a}'$$

$$\text{Fjærkraft:} \quad F(x) = -k(x - x_0), \quad \text{luftmotstand:} \quad \vec{F}_v = -k\vec{v} \quad \text{eller} \quad \vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$$

$$\text{Statisk friksjon:} \quad |\vec{F}_s| \leq \mu_s N, \quad \text{dynamisk friksjon:} \quad |\vec{F}_d| = \mu_d N$$

$$\text{Arbeid:} \quad W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A, \quad \text{kinetisk energi:} \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Potensiell energi for gravitasjon:} \quad U = mgy, \quad \text{for fjærkraft:} \quad U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$\text{Effekt:} \quad P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Konservativ kraft:} \quad 1D: F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad 3D: \vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

$$\text{Impuls:} \quad \vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$$

$$\text{Rakettligningen:} \quad \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m\vec{a}$$

$$\text{Massesenter:} \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm, \quad M = \sum_i m_i = \int_M dm$$

$$\text{Kraftmoment:} \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \text{spinn:} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\text{Spinnsats:} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{Stive legemer:} \quad L_z = I_z \omega_z, \quad \tau_z = I_z \alpha_z$$

$$\text{Kinetisk rotasjonsenergi:} \quad K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{Trehetsmoment:} \quad I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$$

$$\text{Parallellakse teoremet:} \quad I = I_{cm} + Md^2 \quad \text{Rullebetingelse:} \quad V = \omega R$$

$$\text{Gravitasjon:} \quad \vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r, \quad U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}; \quad G \text{ er gravitasjonskonstanten}$$

$$\text{Lorentz-transformasjon:} \quad x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\text{Lorentz-transformasjon for hastighet:} \quad v' = \frac{v-u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$\text{Tidsdilatasjon:} \quad \Delta t = \gamma \Delta t_0, \quad \text{lengdekontraksjon:} \quad l = \frac{l_0}{\gamma}$$

Taylor-rekke til en funksjon $f(x)$ om funksjonsargumentet $x = a$:

$$T_n(f; a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)\frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x-a)^2\frac{d^2f(x=a)}{dx^2} + \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n\frac{d^nf(x=a)}{dx^n}$$

$$\text{Restledd:} \quad R_n(f; a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1}f(x=\zeta)}{dx^{n+1}} \quad \text{hvor } \zeta \in [x, a] \text{ er ukjent.}$$

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:

$$q(x) \cdot \frac{dx}{dt} = p(t) \Rightarrow \int q(x) dx = \int p(t) dt \Rightarrow Q(x) = P(t) + C, \quad \text{med } \frac{dQ}{dx} = q(x) \text{ og } \frac{dP}{dt} = p(t)$$

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Rightarrow \text{Karakteristisk likn. } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \text{ med generelt to røtter } \lambda_1 \text{ og } \lambda_2.$$

$$\text{Generelle løsninger: To reelle røtter: } x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{En reell rot: } x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

$$\text{To komplekse røtter, } \lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib: x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$$