

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag ACL + JB, siste versjon 06.05.2024.

Sensorveiledning, siste versjon 17.06.2024.

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2024

Dato: Mandag 27. mai 2024, kl. 15:00-19:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 5 sider (formelark bakerst på side 6).

Tillatte hjelpemidler:

Rottmann: "Matematisk formelsamling".

Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

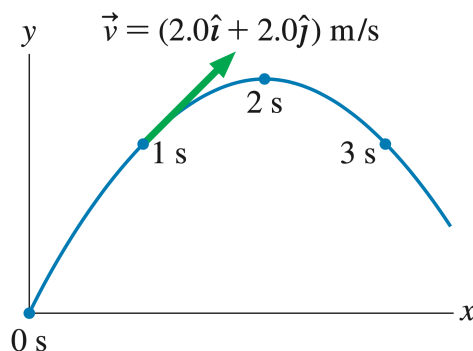
Husk at alle svar må begrunnes!

Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Sensorveiledning: Alle deloppgaver gis maksimalt 5 poeng. Generelt gis lite eller ingen poeng for bare riktig svar uten noen begrunnelse. Det gis heller ikke poeng for å bare skrive opp noen likninger som kanskje er relevante uten å gjøre noe forsøk på å bruke dem eller tilpasse dem til det gitte problemet. Det gis poeng for en god ide til løsningsstrategi selv om denne ikke er fullført. Følgefeil skal det ikke trekkes for. I oppgaver med tallsvar skal det brukes et fornuftig antall gjeldende siffer, men vi kan gi full uttelling for svar med ett siffer mer eller mindre enn i løsningsforslaget. Trekker heller normalt ikke dersom forskjeller i numerisk verdi skyldes at det er rundet av mer eller mindre i mellomsvar.

Oppgave 1 Ballkast på planeten Dagobah

En fysikkstudent på planeten Dagobah kaster en ball, og ballen følger en parabolisk bane som vist i figuren (vi ser bort fra luftmotstand). Ballens posisjon er vist for tidsintervaller på 1.0 s ved $t_1 = 1.0$ s, $t_2 = 2.0$ s, og $t_3 = 3.0$ s. Ballen er ved sin maksimale høyde ved tiden $t_2 = 2.0$ s. Ved $t_1 = 1.0$ s, så er ballens hastighet gitt ved $\vec{v}(t_1) = (2.0\hat{i} + 2.0\hat{j})$ m/s.



- (a) Finn ballens hastighet $\vec{v}$ ved $t_2 = 2.0$ s og $t_3 = 3.0$ s.

Løsning: Ved $t_2 = 2.0$ s er ballen på det høyeste punktet i banen, og da er v_y null. Ved $t_3 = 3.0$ s er hastighetskomponenten i y -retning (pga. symmetri) like stor men motsatt rettet i forhold til ved tid t_1 . Vi får da:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_2) &= (2.0\hat{\mathbf{i}}) \text{ m/s} \\ \vec{v}(t_3) &= (2.0\hat{\mathbf{i}} - 2.0\hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}\end{aligned}$$

Sensorveiledning:

Det gis kun 2p dersom bare en av komponentene er funnet, og det trekkes også 2p om ikke retning er angitt.

- (b) Hva er verdien på tyngdeakselerasjonen g_{Dagobah} for denne planeten?

Løsning: Vi kan se på endring i hastigheten y -retning mellom t_2 og t_3 :

$$g_{\text{Dagobah}} = a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{(-2.0 - 0.0) \text{ m/s}}{1.0 \text{ s}} = -2.0 \text{ m/s}^2.$$

Sensorveiledning:

Det trekkes 1p dersom følgefeil fører til en x -komponent forskjellig fra null, og det ikke kommenteres i teksten.

- (c) Hva var ballens utgangsfart v_0 og utgangsvinkel θ_0 med horisontalen?

Løsning: Siden vi nå vet g_{Dagobah} kan vi bruke bevegelsesligningen for hastighet i y -retning for å finne v_{0y} ($v_x = v_{0x}$ siden det ikke er luftmotstand og dermed ingen krefter i x -retning):

$$v_y(t) = v_{0y} + at = v_{0y} - g_{\text{Dagobah}}t.$$

Vi setter inn for t_2 , der $v_y(t_2) = 0$ m/s og får:

$$0 = v_{0y} - g_{\text{Dagobah}}t_2 \Rightarrow v_{0y} = g_{\text{Dagobah}}t_2 = 4.0 \text{ m/s}.$$

Da får vi:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 4.47 \text{ m/s} = 4.5 \text{ m/s}$$

med to gjeldende siffer. Vinkelen med horisontalen kan vi finne ved f.eks. å se på

$$\tan \theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right) = 1.107 \text{ rad} = 63 \text{ grader}.$$

Sensorveiledning:

Det gis 3p for fart (alternativt riktig hastighetsvektor), og 2p for utgangsvinkel.

Oppgave 2 Klemme Jorda inn i en fyrstikk-eske

En venn av deg påstår at hvis alle atomene i Jorda ble komprimert slik at det ikke lenger er noe tomrom mellom atomkjernen og elektronene i atomene, slik at Jorda får samme tetthet som en atomkjerne, så kunne Jorda få plass i en fyrstikkeske. Går dette an? Løs dette som et Fermi-problem, husk å forklare tankegangen din og alle stegene i utregningen. Bruk gjerne følgende tall for å gi et estimat og vurder om påstanden er fornuftig eller ikke:

- Gjennomsnittlig tetthet for Jorda: $\rho_J = 5.51 \text{ g/cm}^3$.
- Jordas radius: $R_J = 6371 \text{ km}$.
- Tettheten til en atomkjerne er det samme som tettheten til nøytronstjerner, som er den tetteste materien som finnes i universet, bortsett fra svarte hull: $\rho_N \approx 10^{17} \text{ kg/m}^3$.
- En vanlig fyrstikkeske er ca. 6 cm lang, 4 cm bred og 2 cm høy.

Løsning: Vi antar at Jorda kan beskrives som ei kule med volum

$$V_J = \frac{4}{3}\pi R_J^3 \approx 4 \cdot (6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^3 = 4 \cdot 262 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \approx 1000 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 = 10^{21} \text{ m}^3.$$

Så har vi tettheten til Jorda, vi regner om til kg/m^3 :

$$\rho_J = 5.51 \text{ g/cm}^3 = \frac{5.51 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{(10^{-2} \text{ m})^3} = 5.51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Da får vi at massen til Jorda er

$$M_J = \rho_J \cdot V_J = 5.51 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Volumet til en fyrstikkeske er ikke rare greiene:

$$V_{\text{fyrstikkeske}} = (0.06 \cdot 0.04 \cdot 0.02) \text{ m}^3 = 48 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Hvis vi skal dytte hele massen til Jorda inn i en fyrstikkeske, blir tettheten:

$$\rho_{\text{Jorda i en fyrstikkeske}} = \frac{M_J}{V_{\text{fyrstikkeske}}} \approx 1 \cdot 10^{29} \text{ kg/m}^3.$$

Sammenlignet med tettheten til en nøytronstjerne blir det

$$\frac{\rho_{\text{Jorda i en fyrstikkeske}}}{\rho_N} \sim \frac{10^{29}}{10^{17}} = 10^{12},$$

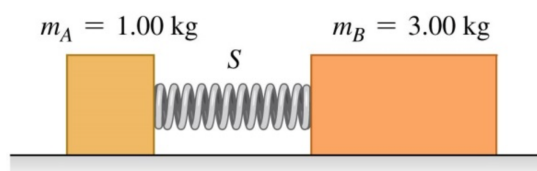
altså en billion ganger større tetthet enn en nøytronstjerne. Så, om vi hadde klart å komprimere Jorda så mye at den fikk plass i en fyrstikkeske ville vi oppnådd en tetthet langt langt høyere enn atomkjerner og nøytronstjerner. Så dette er nok ikke særlig realistisk.

Sensorveiledning:

Det gis generelt god uttelling for gode resonnementer. Det er viktig at tankegangen forklares tydelig i vurderingen av om Jorda kan komprimeres så mye at den får plass i esken, uten at tettheten blir større enn for nøytronstjerner.

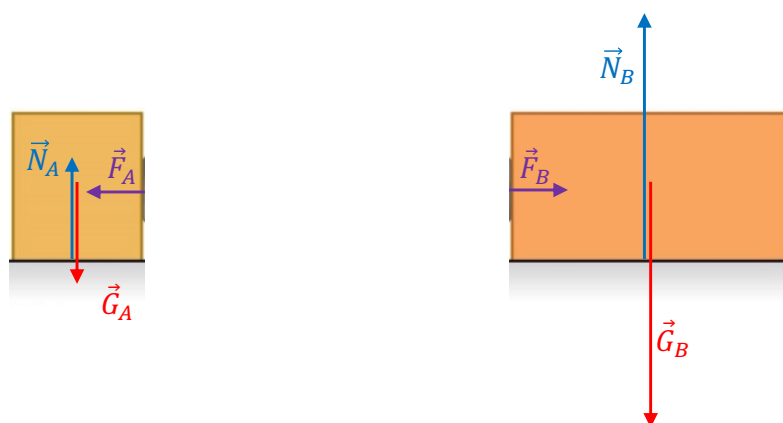
Oppgave 3 To klosser og ei fjær

Vi har to klosser og ei fjær plassert på et horisontalt, friksjonsfritt bord (se figur). Vi ser bort fra luftmotstand. Kloss A har masse $m_A = 1.00$ kg og kloss B har masse $m_B = 3.00$ kg. Klossene presses sammen, slik at fjæra som er plassert mellom klossene blir komprimert. Klossene og den komprimerte fjæra er i ro, og så slippes systemet fritt. Fjæra, som har neglisjerbar masse, er ikke festet til klossene, slik at fjæra bare faller rett ned på bordet når klossene beveger seg bort fra hverandre. Etter at fjæra har mistet kontakt med klossene, har kloss B fått en hastighet $v_B = 1.20$ m/s mot høyre.



- (a) Tegn to frilegemediagram for situasjonen i det systemet slippes løs, men før fjæra har mistet kontakt med klossene: ett for kloss A og ett for kloss B. Husk å definere alle krefter og symboler du bruker i frilegemediagrammene.

Løsning:



$\vec{N}_A$: normalkraft fra bakken på kloss A. $\vec{G}_A$: Tyngdekraft på kloss A. $\vec{F}_A$: kraft fra fjæra på kloss A. $\vec{N}_B$: normalkraft fra bakken på kloss B. $\vec{G}_B$: Tyngdekraft på kloss B. $\vec{F}_B$: kraft fra fjæra på kloss B.

Sensorveiledning:

Trekk dersom det er opplagt feil retninger eller misforhold mellom lengdene på kraftvektorene. 2p trekk for symboler som ikke er definert/krefter som ikke er forklart. Det trekkes 1p dersom angrepspunkt er klart feil.

- (b) Etter at fjæra har mistet kontakt med klossene, hva blir hastigheten til kloss A?

Løsning: Det virker ingen ytre krefter i horisontal retning. Bevegelsesmengden i horisontal retning er derfor bevart:

$$0 = m_A v_A + m_B v_B \Rightarrow v_A = -\frac{m_B}{m_A} v_B = -3.60 \text{ m/s.}$$

Sensorveiledning:

Det trekkes 1p om det ikke begrunnes hvorfor driv (bevegelsesmengde) er bevart.

- (c) Hvor mye potensiell energi var lagret i fjæra?

Løsning: Bare fjærkraften gjør arbeid, og fjærkraften er konservativ. Vi kan derfor bruke bevaring av mekanisk energi:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

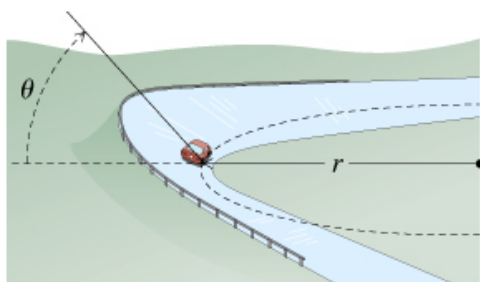
Den potensielle energien som er lagret i fjæren omdannes til kinetisk energi til klossene, som etter hvert har ikke har noen potensiell energi:

$$U_0 = K_1 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = 8.60 \text{ J.}$$

Sensorveiledning:

Det trekkes 1p om det ikke begrunnes hvorfor mekanisk energi er bevart.

Oppgave 4 Daytona Racerbane



En av svingene i Daytona Racerbane har en helningsvinkel θ og radius r . Dersom det ikke er friksjon så kan bilen klare svingen (dvs. holde samme høyde i helningen) for en gitt fart v . Forklar om bilene kan kjøre fortere, saktere, og/eller med samme fart dersom det er friksjon mellom hjulene og underlaget. Kommenter også retningen på friksjonskraften.

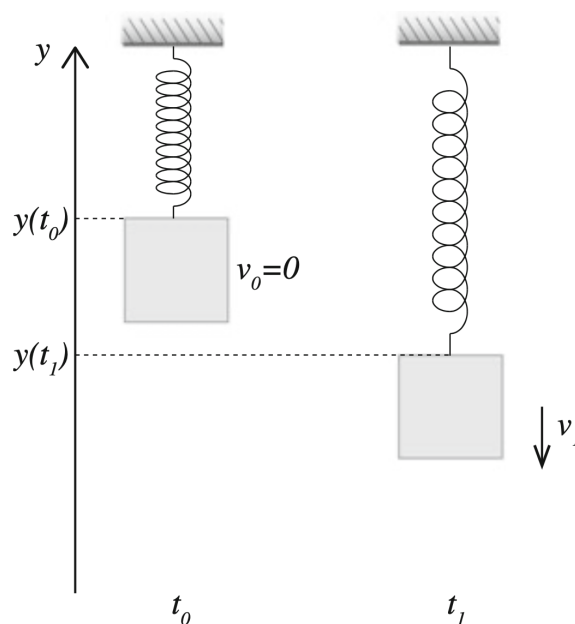
Løsning: Med friksjon kan bilen kjøre forttere så lenge friksjonskraften som trengs for å holde den i sirkelbanen er mindre enn den maksimale, statiske friksjonskraften $f_{s,max}$. Friksjonskraften peker i dette tilfellet ned langs helningen, så den får en komponent i horisontal retning som bidrar til sentripetalakselerasjonen (sammen med komponent fra normalkraften). Bilen kan også kjøre saktere, da virker den statiske friksjonen i retning opp helningen for ikke bilen skal skli ned. Bilen kan også kjøre i samme fart, da trengs ingen friksjon for å holde den i akkurat denne sirkelbanen.

Sensorveiledning:

For å få 5p skal det forklares hvordan friksjonen kan bidra til sentripetalakselerasjonen. Ingen trekk om det ikke sies noe om samme fart, hvis det er forklart fint for tilfellene med større og mindre fart.

Oppgave 5 En kloss hengende i ei fjær

En kloss med masse m er festet til ei fjær, som igjen er festet til taket (se figur). Fjærkonstanten er k , og fjærkraften kan beskrives med Hookes lov, $F_k(y) = -ky$ (dvs. likevektslengden til fjæra er ved høyde $y = 0$ m). Vi velger positiv retning oppover som vist i figuren. Vi ser foreløpig bort fra luftmotstand.



- (a) Klossen henger først i ro. Vis at likevektshøyden y_L der klossen er i ro er gitt ved

$$y_L = -\frac{mg}{k}.$$

Løsning: Siden klossen skal være i ro, må summen av kreftene som virker på den være null etter Newtons 2. lov (i vertikal retning):

$$F_k + G = 0$$

$$-ky_L - mg = 0 \Rightarrow y_L = -\frac{mg}{k}.$$

Sensorveiledning:

Her er det viktig at det forklares og vises tydelig hvordan uttrykket framkommer (bruke Newtons 2. lov) for å få full pott.

- (b) Nå trykker vi klossen oppover mot taket, slik at fjæra er i sin likevektslengde ($y(t_0) = 0$ m), og så slipper vi klossen ved tid $t_0 = 0$ s (se figur). Vis at differensialligningen som beskriver klossens bevegelse er gitt ved

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_L).$$

Løsning: Klossen er igjen påvirket av tyngdekraft og fjærkraft, men nå er det potensiell energi fra fjæra, som gir en akselerasjon i vertikal retning:

$$-ky - mg = ma \Rightarrow a(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}y(t) - g.$$

Vi bruker uttrykket for y_L og får:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} \left(y + g\frac{m}{k} \right) = -\frac{k}{m} (y - y_L).$$

Sensorveiledning:

Siden uttrykket er oppgitt i oppgaven, kreves det klar og tydelig forklaring. Hvis det tydelig mangler forståelse eller det er klart at kandidaten ikke mestrer å uttrykke forståelsen i likninger gis det 0p. Det gis 2p dersom fjærkrafta settes lik $-k(y - y_L)$ og tyngdekraften ikke tas med.

- (c) Løs differensialligningen i forrige deloppgave for å finne posisjonen $y(t)$ til klossen som funksjon av tid.

Løsning: Vi bytter variabel slik at

$$u = y - y_L,$$

$$du = dy.$$

Da er

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k}{m}u.$$

Dette er en 2. ordens homogen differensialligning, og vi finner den karakteristiske ligningen (se formelark):

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Her er det ikke noe ledd med $\frac{dy}{dt}$ så $p = 0$. Vi får da

$$\lambda^2 = -q \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{q} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Den generelle løsningen blir da

$$u(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

For å bestemme C_1 og C_2 må vi bruke initialbetingelsene: $v_0 = 0$ m/s ved $t_0 = 0$ s. Dette gir:

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}}C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{k}{m}}C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

siden $\cos(0) = 1$. Da har vi igjen å bestemme C_1 som vi kan finne fra posisjonen ved tid $t = 0$ s:

$$u(0) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) = C_1 = -y_L,$$

hvor vi har brukt $u(t) = y(t) - y_L \Rightarrow u(0) = y(0) - y_L = -y_L$. Da får vi tilslutt:

$$u(t) = y(t) - y_L = -y_L \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$y(t) = y_L - y_L \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = y_L \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right].$$

Sensorveiledning:

Det gis 0p dersom man bare integrerer likninga og enten antar y er konstant eller integrerer noen ledd med hensyn på t og noen med hensyn på y . Dvs. at det ikke er vist forståelse av hva en differensiallikning er. Det gis 2p for karakteristisk likning, 1p for riktig generell løsning, og 2p for riktig bruk av initialbetingelser og å finne løsningen.

- (d) Vi introduserer nå luftmotstand, og vi bruker at luftmotstandskraften kan beskrives ved $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$. Hva blir differensiallikningen som beskriver klossens bevegelse nå?

Løsning: Vi tar igjen utgangspunkt i Newtons 2. lov i vertikal retning, og får:

$$F_k + G + F_D = ma = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-ky - mg - D|v|v = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_L) - \frac{D}{m}|v|v.$$

Ved å ta absoluttverdien av hastigheten og så gange med hastigheten sørger vi for riktig fortegn på luftmotstandskraften. Når klossen beveger seg oppover, vil luftmotstanden ha

motsatt fortegn som hastigheten og virke nedover. Når klossen beveger seg nedover, vil luftmotstanden igjen virke mot bevegelsen og dermed virke oppover.

Sensorveiledning:

Her er det bare det siste leddet i likninga som er nytt, så det gis bare 1p for å kopiere det første leddet fra b) og 4p for siste ledd. Det trekkes 2p for å ta bort absoluttverdi.

- (e) Skissér en kode for å beregne hastigheten og posisjonen til klossen som funksjon av tid. Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, det er nok å skrive opp initialbetingelsene og selve integrasjonsløkka.

Løsning:

```
# Initial values
y[0] = 0.0
v[0] = 0.0

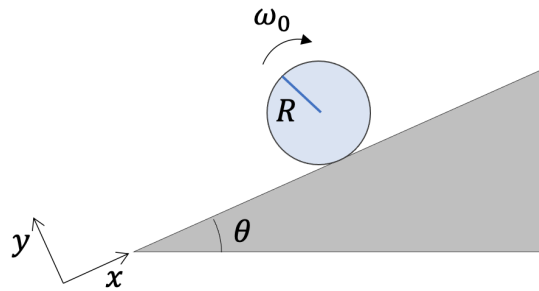
for i in range(n-1):
    F_D = -D*v[i]*abs(v[i])
    F_k = -k*y[i]
    G = -m*g
    F_sum = F_D + F_k + G
    a = F_sum/m
    v[i+1] = v[i] + a*dt
    # Euler-Cromer
    y[i+1] = y[i] + v[i+1]*dt
    t[i+1] = t[i] + dt
```

Sensorveiledning:

Det trekkes 1p om ikke absoluttverdien i koden tas med (skriver v^2 istedenfor $\text{abs}(v)v$). Det trekkes 2p hvis v skrives uten indeks. Det gis 1p for riktige initialbetingelser, 3p for riktig akselerasjon, og 1p for riktig integrasjonsløkke.

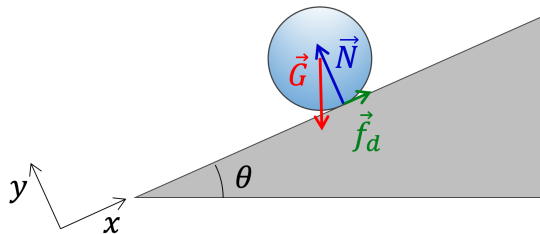
Oppgave 6 En roterende sylinder

En sylinder roterer om symmetriaksen gjennom massesenteret sitt med en vinkelfart ω_0 . Sylindren har masse M og radius R , og treghetsmomentet for rotasjon om symmetriaksen gjennom massesenteret er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Så settes sylindren ned på et skråplan med helningsvinkel θ , se figur. Vi legger x -aksen opp langs skråplanet og y -aksen normalt på skråplanet. Når sylindren settes ned, vil den både rulle og skli samtidig. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom sylindren og skråplanet er μ_d . Vi ser bort fra luftmotstand.



- (a) Tegn et frilegemediagram for den roterende sylindren rett etter at den er satt ned på skråplanet. Husk å navngi alle krefter.

Løsning:



Her er $\vec{N}$ normalkraft fra skråplanet på sylindren, $\vec{G}$ er tyngdekraften, og $\vec{f}_d$ er den dynamiske friksjonskraften.

Sensorveiledning:

Det trekkes 2p om det ikke navngis krefter. Det trekkes også 1p for hver manglende kraft, eller tilleggskrefter (som både statisk og dynamisk kraft, hvor de peker i hver sin retning) eller feil retning på en kraft. Også 1p trekk dersom lengden på normalkraften er veldig gal i forhold til tyngdekraftkomponenten normalt på planet.

- (b) Finn posisjonen $x(t)$ til sylindren som funksjon av tiden fra det øyeblikket sylindren settes ned til den begynner å rulle uten å skli.

Løsning: Vi bruker Newtons 2. lov i x -retning for å finne bevegelsen til massesenteret til sylindren, og dekomponerer tyngdekraften ved å bruke vinkelen θ , og bruker at normalkraften N er like stor som tyngdekraftskomponenten i y -retning, dvs. $N = Mg \cos \theta$:

$$\sum F_x = f_d - Mg \sin \theta = \mu_d Mg \cos \theta - Mg \sin \theta = Ma_x.$$

Dermed blir akselerasjonen

$$a_x = g(\mu_d \cos \theta - \sin \theta).$$

Siden vi har konstant akselerasjon, kan vi bruke bevegelsesligningen for posisjon for dette spesialtilfellet (se formelark):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2.$$

Vi definerer $x_0 = 0$ m og siden den settes rett ned på skråplanet er også $v_0 = 0$ m/s. Dermed får vi at posisjonen er gitt ved

$$x(t) = \frac{g}{2} (\mu_d \cos \theta - \sin \theta) t^2.$$

Sensorveiledning:

Det gis 3p for riktig akselerasjon (1p for å forstå at det er konstant a_x , 2p for å finne uttrykket for a_x) og 2p for posisjon. Hvis a_x er funnet så godtas også at det ikke settes inn for a_x , men svares $x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$ i siste del. Det trekkes ikke dersom svaret oppgis med en $x_0 \neq 0$ m, siden dette initialbetingelsen ikke er oppgitt i oppgaven. (Godtar altså både $x_0 = 0$ m og $x_0 \neq 0$ m i svaret).

- (c) Diskuter bevegelsen for forskjellige verdier av vinkelen θ i forhold til den dynamiske friksjonskoeffisienten μ_d ; hvordan beveger sylindren seg hvis
- (i) $\tan \theta < \mu_d$,
 - (ii) $\tan \theta > \mu_d$,
 - (iii) $\tan \theta = \mu_d$?

Løsning:

Tilfelle (i):

Dersom $\tan \theta < \mu_d$, så betyr det at

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < \mu_d \Rightarrow \sin \theta < \mu_d \cos \theta.$$

I dette tilfellet blir akselerasjonen positiv og peker opp langs skråplanet, og dermed er $x(t) > 0$, sylindren beveger seg opp skråplanet.

Tilfelle (ii):

Dersom $\tan \theta > \mu_d$, så får vi at

$$\sin \theta > \mu_d \cos \theta,$$

og da vil akselerasjonen peke ned skråplanet, $x(t) < 0$, altså vil sylindren skli ned skråplanet.

Tilfelle (iii):

Dersom $\tan \theta = \mu_d$, så får vi at

$$\sin \theta = \mu_d \cos \theta,$$

og da blir akselerasjonen null, og massesenteret til sylindren flytter seg ikke, $x(t) = 0$.

Sensorveiledning:

Om man ikke har fått til riktig akselerasjon i forrige oppgave, så er det følgefeil. Her blir det kanskje litt vanskelig å vurdere poeng, grovt sett gis 2p på tilfelle 1, 2p på tilfelle 2 og 1p for tilfelle 3.

- (d) Finn et uttrykk for vinkelhastigheten $\vec{\omega}(t)$ til cylinderen som funksjon av tid fra det øyeblikket cylinderen settes ned til den begynner å rulle uten å skli. Vær oppmerksom på rotasjonsretningen og retningen til vinkelakselerasjonen.

Løsning: Vi bruker koordinatsystemet som vist i figuren. Den opprinnelige vinkelfarten er $|\vec{\omega}_0|$, retningen med det gitte koordinatsystemet er $\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \hat{\mathbf{k}}$. Vi ser på kraftmomentene på cylinderen om rotasjonsaksen som går gjennom massesenteret. Tyngdekraften angriper i massesenteret og har ingen kraftarm. Normalkraften har en kraftarm som er antiparallell med kraften, og dermed ikke noe kraftmoment. Dermed er det kun friksjonskraften som gir et kraftmoment, kraftarmen er $-R\hat{\mathbf{j}}$ og vi får:

$$\vec{\tau}_f = -R\hat{\mathbf{j}} \times f\hat{\mathbf{i}} = Rf\hat{\mathbf{k}} = R\mu_d mg \cos \theta \hat{\mathbf{k}}.$$

Videre bruker vi nå Newtons 2. lov for rotasjoner for å finne vinkelakselerasjonen:

$$\alpha = \frac{|\vec{\tau}_f|}{I} = \frac{R\mu_d Mg \cos \theta}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2\mu_d g \cos \theta}{R},$$

i positiv z -retning. Vi ser at vinkelakselerasjonen er konstant, så vi kan bruke bevegelsesligningen for vinkelhastigheten for spesialtilfellet med konstant vinkelakselerasjon (se formelark):

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(t) &= \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t, \\ \vec{\omega}(t) &= -\omega_0 \hat{\mathbf{k}} + \frac{2\mu_d g \cos \theta}{R} t \hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Vi ser altså at friksjonskraften reduserer den opprinnelige vinkelhastigheten.

Sensorveiledning:

Her er det potensielt litt kronglete med fortegn. Det gis svært god uttelling om man får nesten riktig uttrykk men surrer litt med fortegn. Det gis 3p for riktig vinkelakselerasjon og 2p for vinkelhastigheten.

- (e) Vi ser nå på situasjonen hvor $\tan \theta < \mu_d$. Vis at tiden det tar for cylinderen å oppnå rullebetingelsen (rulle uten å skli) er gitt ved

$$t_{\text{Rulle}} = \frac{\omega_0 R}{3\mu_d g \cos \theta - g \sin \theta}.$$

Løsning: For denne situasjonen beveger cylinderen seg oppover skråplanet. Tilslutt vil friksjonen ha redusert vinkelfarten nok til at kontaktpunktet ikke lenger sklir, og cylinderen vil oppnå ren rulling. Når dette skjer har vi at rullebetingelsen er oppfylt:

$$v_x(t_{\text{Rulle}}) = \omega(t_{\text{Rulle}})R.$$

Når cylinderen ruller og sklir, har massesenteret en akselerasjon gitt ved $a_x = g(\mu_d \cos \theta - \sin \theta)$ som vi fant fra Newtons 2. lov. Vi har da fra bevegelsesligningen at

$$v_x(t) = g(\mu_d \cos \theta - \sin \theta)t,$$

med initialbetingelsen $v(t = 0) = 0$ m/s. Vi setter dette lik uttrykket for $\omega(t)$ vi fant i forrige oppgave og bruker rullebetingelsen. Vi må passe på fortegn, her må vi ha $-\omega(t)$ siden vi med vårt koordinatsystem har at vinkelhastigheten peker i negativ z -retning, mens vinkelakselerasjonen peker i positiv z -retning. Vi får:

$$g(\mu_d \cos \theta - \sin \theta)t_{\text{Rulle}} = R \left(\omega_0 - \frac{2\mu_d g \cos \theta}{R} t_{\text{Rulle}} \right)$$

$$R\omega_0 = (\mu_d g \cos \theta + g \sin \theta + 2\mu_d g \cos \theta)t_{\text{Rulle}}$$

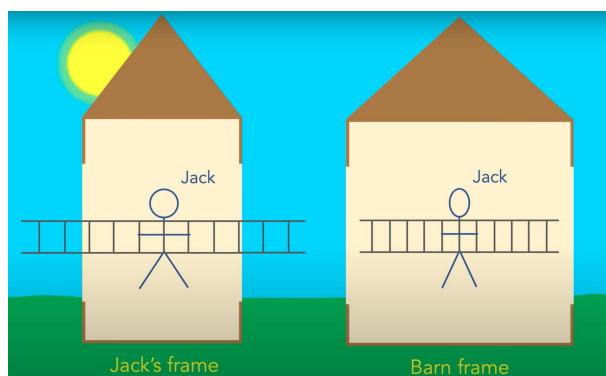
$$t_{\text{Rulle}} = \frac{R\omega_0}{3\mu_d g \cos \theta - g \sin \theta}.$$

Sensorveiledning:

Her kan det også bli problemer med fortegn, jfr. forrige oppgave. Vi trekker ikke om det er forklart/kommentert og konsistent med forrige oppgave (følgefeil). 2p for riktig rullebetingelse og 3p for riktig uttrykk til slutt.

Oppgave 7 En relativistisk stige

Jack jobber på en gård, og han har en veldig lang stige som, når den er i ro, dessverre ikke får plass i låven men endene vil stikke ut gjennom dørene på hver side av låven. På fritiden har Jack har lest om Einstein og den spesielle relativitetsteorien. Jack får en lys idé: hva om han løper veldig fort, slik at stigen får en lengdekontraksjon? Sett fra et referansesystem hvor låven er i ro, vil kanskje stigen få plass i låven likevel, hvis han greier å løpe fort nok! Men så blir Jack bekymret. Sett fra Jack og stigen referansesystem, vil det jo se ut som at det er låven som er lengdekontrahert, og da vil begge endene av stigen stikke ut gjennom dørene på låven samtidig (se illustrasjon). Kan du hjelpe Jack med å finne ut av dette problemet? Her trenger du ikke gjøre noen utregninger, om du ønsker kan du gjerne forklare med ord hvordan denne problemstillingen kan løses.



Løsning: Det Jack nok ikke har tenkt så nøye på, er at hendelser som er samtidige i ett referansesystem ikke er samtidige i et annet. Når vi sier at stigen får plass i garasjen, så betyr det at ved en spesifikk tid, så er posisjonen til fram-enden og posisjonen til bak-enden av stigen innenfor de to låvedørene. Vi kan definere følgende hendelser:

- Hendelse 1: stigen fram-ende passerer låvedøren til høyre
- Hendelse 2: stigen bak-ende passerer låvedøren til venstre.

Vi vil si at stigen passer inni låven, dersom både fram-enden og bak-enden er inne i låven samtidig. I referansesystemet til låven (der låven er i ro), er de to hendelsene samtidige, men de to hendelsene vil aldri være samtidige i referansesystemet som følger Jack og stigen.

Vi kan se dette ved å tenke oss at i referansesystemet til låven, så lukkes begge dørene for et kort øyeblikk i det begge endene til stigen er innenfor dørene. Nå betrakter vi hendelsene definert over i referansesystemet til stigen. Fram-enden nærmer seg den høyre døra, døra lukkes, og åpnes igjen for å slippe igjennom stigen. Ved en senere tid beveger bak-enden til stigen seg inn gjennom døra til venstre, som lukkes og så åpnes igjen. Det vil si, i referansesystemet som følger stigen, er *ikke* døra til høyre og døra til venstre lukket til samme tid, bare en dør er åpen om gangen (først den til høyre og så den til venstre). Med andre ord, når fram-enden av stigen er ved den høyre døra, så har ennå ikke bak-enden kommet til den venstre døra, og når bak-enden kommer innenfor den venstre døra, har allerede fram-enden passert den høyre døra. Så: stigen får plass i referansesystemet til låven, men ikke i referansesystemet som følger stigen. Det er imidlertid ikke noe problem, selv om vi skulle finne på å lukke dørene samtidig i referansesystemet til låven, så er hendelsene at den høyre døra lukkes og den venstre døra lukkes ikke samtidige i referansesystemet til stigen, og den vil uansett ikke bli “kappet av” av at dørene lukkes, selv i dette referansesystemet. Altså ingen grunn til bekymring! :)

Sensorveiledning:

Generelt gis mye uttelling for fornuftige betraktninger her. Spesielt viktig er det å trekke fram *samtidighet*, det er det viktigste momentet i oppgaven. Det blir derimot ingen poeng for å bare skrive opp ligninger som har med spesiell relativitetsteori å gjøre fra formelarket, uten å diskutere dem i denne spesifikke situasjonen.

Eksamenssett slutt.