

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

PRØVEEKSAMEN: Midtveiseeksamen FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2022

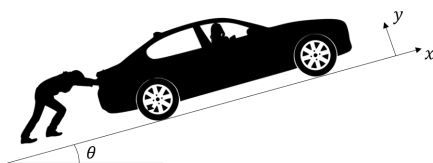
Dato: ??? (3 timer)

Oppgavesettet er på: 20 flervalgsoppgaver.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator; Rottman: "Matematisk formelsamling"

Oppgave 1

En person dytter en bil med konstant hastighet opp en bakke. Bilen har massen m og hellingsvinkelen er θ . Nettokraften som virker på bilen er:



A: Rettet opp langs bakken

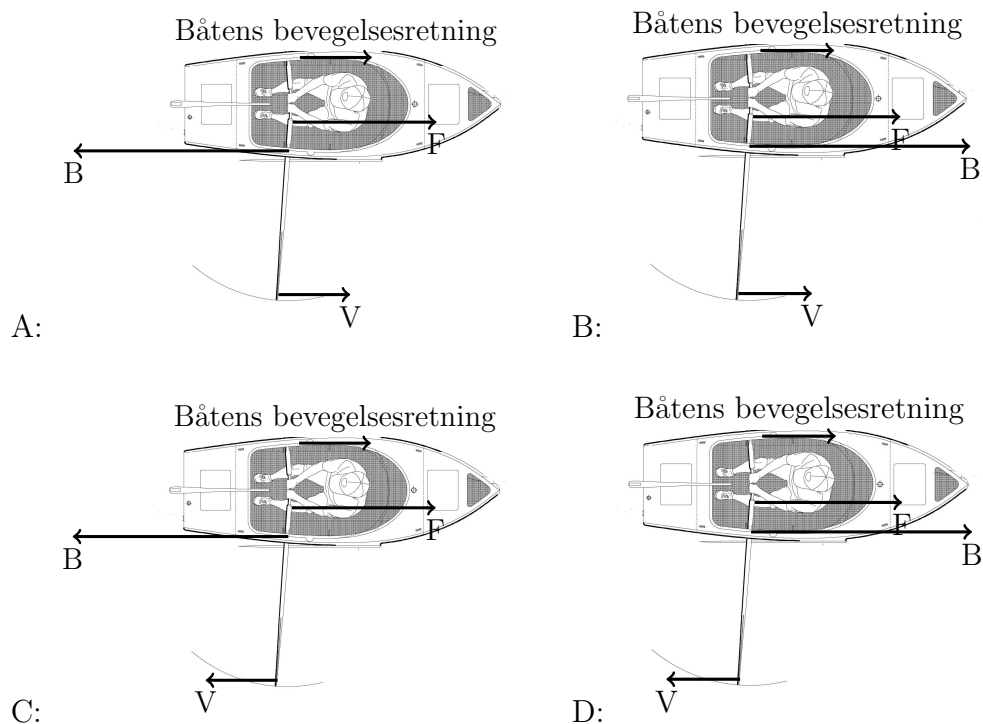
B: Null

C: Rettet ned langs bakken

Løsning: Konstant hastighet betyr at summen av kreftene er null, altså B.

Oppgave 2

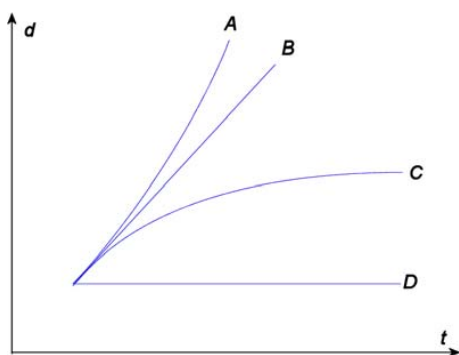
En person ror i en båt. Åra er festet i kanten av båten slik at den kan rotere om dette punktet. I det personen drar åra til seg, virker det tre krefter på den: Kraften F fra hånda, kraften B fra båten og kraften V fra vannet. Hvilken figur representerer best kreftene som virker på åra? Anta at båten beveger seg med konstant fart.



Løsning: Siden åra skyver vannet bakover, må krafta fra vannet på åra være framover. Da må krafta fra båten være bakover slik at summen av kreftene er null (siden vi vet at båten og åra har konstant fart framover). Altså alternativ A.

Oppgave 3

To like klosser glir med den samme konstante akselerasjonen nedover et langt skråplan. Først slippes den ene klossen fra toppen av skråplanet ved tida $t = 0$. Etter 1 s slippes den andre klossen fra samme sted. Hvilken av kurvene viser best avstanden d mellom klossene som funksjon av tida t ?



Løsning: Vi kaller tidsdifferansen Δt og akselerasjonen a . Posisjonene til de to klossene er da

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2, x_2(t) = \frac{1}{2}a(t - \Delta t)^2.$$

Det betyr at avstanden mellom dem er

$$d = x_1(t) - x_2(t) = at\Delta t - \frac{1}{2}a\Delta t^2.$$

Dette er en lineær funksjon i t , altså er graf B riktig.

Oppgave 4

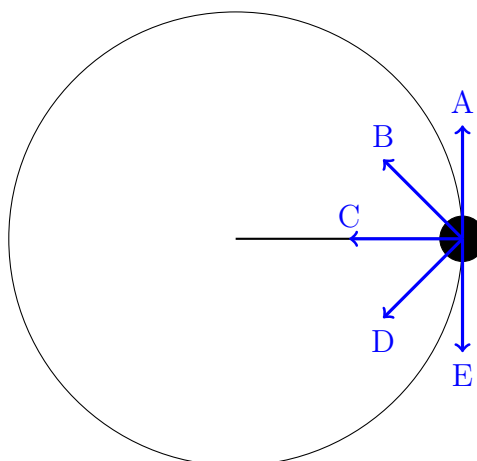
Du kaster en ball oppover med en initialhastighet $v_0 > 0$. Etter å ha nådd sitt høyeste punkt faller ballen ned igjen. I det høyeste punktet er akselerasjonen

- A: Positiv
- B: Null
- C: Negativ

Løsning: Siden det er oppgitt at initialhastighet $v_0 > 0$ må det bety at positiv retning er oppover. Tyngdeakselerasjonen er dermed negativ. Dette gjelder i alle punkter i banen. Alternativ C.

Oppgave 5

Et lodd er festet i ei snor og roterer i en vertikal sirkelbane. Hvilken pil representerer akselerasjonen til loddet idet den passerer horisontalstillingen på vei oppover?



Løsning: Det virker to krefter: Tyngden (nedover) og snordraget (inn mot sentrum). Akselerasjonen er i samme retning som summen av kreftene, altså pil D

Oppgave 6

Vi har en metallstav med lengden L og tverrsnittsareal A . Hvis vi strekker den med en kraft F vil den bli forlenget med ΔL gitt ved uttrykket

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}.$$

Konstanten E kalles Youngs modul og sier noe om hvor stivt metallet er. Lydfarta i metallet avhenger av Youngs modul og massetettheten ρ .

Hvilket av følgende uttrykk for lydfarta i staven kan være riktig? (Hint: Dimensjonsanalyse)

A: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

B: $v = \sqrt{\frac{\rho}{E}}$

C: $v = \sqrt{\rho E}$

D: $v = \sqrt{\frac{1}{\rho E}}$

Løsning: Fra den oppgitte formelen ser vi at enheten til Youngs modul er $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$. Tettheten har enhet $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Det eneste av alternativene som gir riktig enhet til farta $[v] = \text{m/s}$ er alternativ A.

Oppgave 7

To personer trekker i hver sin ende av et tau, og de finner at de er akkurat like sterke. Hvis de istedenfor fester tauet i et tre og trekker sammen i en ende, blir snordraget

A: Halvparten

B: Like stort

C: Dobbelt så stort

D: Fire ganger så stort

Løsning: Når begge trekker i samme ende blir snordraget dobbelt så stort.

Oppgave 8

Du starter i ro, og begynner så å løpe. Du har konstant akselerasjon fram til tidspunktet t_0 hvor du har oppnådd farten v_0 , og etter t_0 løper du med konstant fart. Hvor lang tid bruker du på å løpe en strekning x_0 ? Anta at du kommer til posisjonen x_0 etter tida t_0 .

A: $\frac{x_0}{v_0} + \frac{1}{2}t_0$

B: $\frac{2x_0}{v_0}$

C: $\frac{2v_0}{x_0}$

D: $\frac{2x_0}{t_0} + v_0$

Løsning: Akselerasjonen må være $a = v_0/t_0$. For $t < t_0$ er

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0}{2t_0}t^2.$$

Det betyr at akselerasjonen stopper i posisjonen $x_1 = x(t_0) = \frac{1}{2}v_0t_0$. For $t > t_0$ er $x(t) = x_1 + v_0(t - t_0)$. Tida da $x(t) = x_0$ blir da

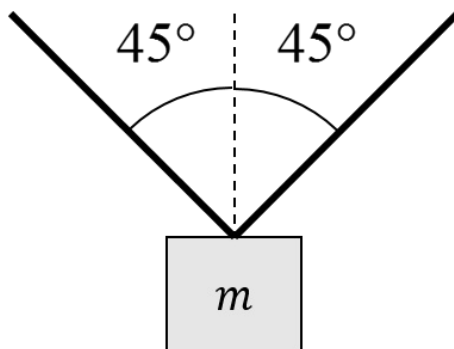
$$t = t_0 + \frac{x_0 - x_1}{v_0} = \frac{x_0}{v_0} + \frac{1}{2}t_0,$$

altså er alternativ A riktig.

Oppgaven kan også løses ved å sjekke hvilke alternativ som er mulige. C og D har ikke riktig enhet, og vi kan utelukke dem. Hvis vi ser på grensetilfellet der $t_0 \rightarrow 0$, dvs at akselerasjonen er veldig stor i en kort tid, og vi løper med konstant fart (nesten) hele strekingen vet vi at da vil tida bli x_0/v_0 . Vi kan dermed utelukke B og A må være riktig.

Oppgave 9

En eske med masse m henger i to snorer som vist i figuren. Hver snor har en 45° vinkel i forhold til vertikalretning. Massen til snorene er neglisjerbar. Hvor stor er spenningen i hver snor?



A: $\frac{mg}{2}$

B: $\sqrt{2}mg$

C: $\frac{mg}{\sqrt{2}}$

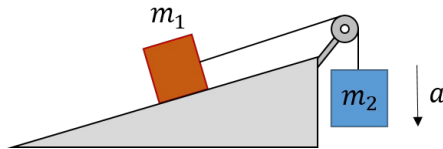
D: $2mg$

E: mg

Løsning: Vi dekomponerer snorkrafta S , og finner at vertikalkomponenten i hver snor er $S \cos 45^\circ = S/\sqrt{2}$. Summen av bidragene fra hver snor må være lik mg , som betyr $2S/\sqrt{2} = \sqrt{2}S = mg$. Dermed er $S = mg/\sqrt{2}$.

Oppgave 10

En eske med masse m_1 befinner seg på en rampe og er knyttet til en annen eske med masse m_2 med en snor som går over en trinse som vist i figuren. Vi kan anta at både snoren og trinsen er masseløse. Når systemet slippes fri akselererer eske 1 opp rampen, mens eske 2 akselererer nedover. Hvor stort er snordraget T i forhold til vekten m_2g når eskene beveger seg?



A: $T < m_2g$

B: $T = m_2g$

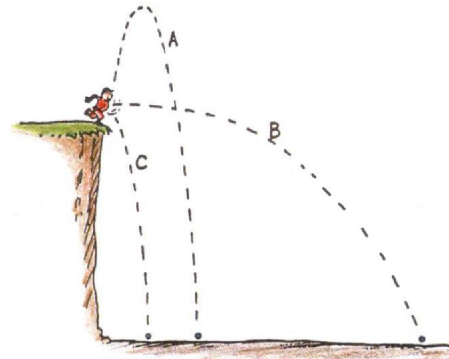
C: $T > m_2g$

D: Alt er mulig, avhengig av friksjonskraften mellom esken og rampen.

Løsning: Siden eske 2 akselererer nedover må summen av kreftene på den være rettet nedover. Det betyr at $T < m_2g$.

Oppgave 11

Tre identiske baller blir kastet fra toppen av en klippe slik banene A, B og C viser på tegningen. Utgangsfarten deres er den samme, og luftmotstanden er så liten at vi kan se bort fra den. Hvilken ball treffer bakken under klippen med størst fart?



A: Ball A

B: Ball B

C: Ball C

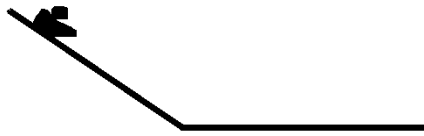
D: Ball A og C

E: Alle treffer med samme fart

Løsning: Alle treffer bakken med like stor fart. I forhold til bakken under klippen, er den kinetiske energien pluss den potensielle i starten den samme for hver ball. Denne energien er

lik den kinetiske energien i det ballene treffer bakken. For baller med like masser vil samme kinetiske energi bety samme fart.

Oppgave 12



Per aker på en kjelke nedover en snøbakke og stopper etter et stykke på flat mark. Vi antar at friksjonstallet er det samme overalt. Ola blir så med på en kjelketur. De starter fra samme sted som Per gjorde alene. Massen av kjelken med Per og Ola er dobbelt så stor som massen av kjelken med bare Per. Blir bremselengden på flat mark med både Per og Ola på kjelken sammenlignet med da Per akte alene

- A: mindre
- B: den samme
- C: dobbelt så lang
- D: fire ganger så lang

Løsning: Når massen dobles blir også den potensielle energien i starten dobbelt så stor. Kjelka stopper når arbeidet gjort av friksjonen er like stor som den opprinnelige potensielle energien. Arbeidet er friksjonskrafta ganger strekningen, og når massen dobles dobles også normalkrafta N , og dermed også friksjonskrafta som er μN . Strekningen blir dermed den samme.

Oppgave 13

En person på 60 kg står inne i en lukket kasse på 10 kg som står på en vekt. Vekten viser 70 kg. Personen hopper opp i luften. Mens hun er oppe i luften inne i kassen så viser vekten normalkrafta N som er

- A: $N > 70 \text{ kg}$
- B: $N = 70 \text{ kg}$
- C: $10 \text{ kg} < N < 70 \text{ kg}$
- D: $N = 10 \text{ kg}$

Løsning: Når personen inne i kassa er i lufta vil vekta vise tyngden til kassa, altså 10 kg. Idet personen hopper vil vekta vise mer.

Oppgave 14

Hva er vinkelfarta ω (radianer per sekund) til en satellitt i bane rundt jorda i avstanden R ? Massen til jorda er M , massen til satelliten m og gravitasjonskonstanten G .

A: $\omega = \sqrt{\frac{Gm}{R^3}}$

B: $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$

C: $\omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R^3}}$

D: $\omega = \frac{G(M-m)}{R^3}$

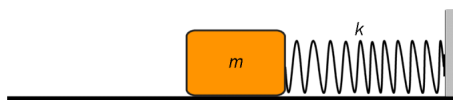
Løsning: Tyngdekrafta må være lik sentripetalkrafta

$$G \frac{Mm}{R^2} = mR\omega^2$$

som gir

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}.$$

Oppgave 15



En kloss med massen m er festet i en fjær slik at den kan svinge fram og tilbake på et horisontalt underlag. Fjæra har fjærstivheten k . Friksjonstallet (både statisk og dynamisk) for klossen mot underlaget er μ . Klossen slippes i avstanden d fra likevektstillingen. Hvor stort må friksjonstallet μ minst være for at klossen skal bli liggende i ro når den stanser første gang?

A: $\mu > \frac{kd}{mg}$

B: $\mu > \frac{kd}{2mg}$

C: $\mu > \frac{kd}{3mg}$

D: $\mu > \frac{kd}{4mg}$

Løsning: I starten er den potensielle energien $U_0 = \frac{1}{2}kd^2$. Hvis den stanser første gang i posisjonen x er den potensielle energien $U = \frac{1}{2}kx^2$ og friksjonens arbeid er $\mu mg(d - x)$. Når klossen stanser er det ikke noen kinetisk energi, og dermed er

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu mg(d - x)$$

Dette gir to mulige løsninger $x = d$ (som svarer til starten) og $x = 2\mu mg/k - d$ som svarer til der den stanser. Hvis den skal bli liggende der må fjærkrafta være mindre enn friksjonskrafta, dvs

$$k|x| < \mu mg.$$

Vi må ha absoluttverdien til x fordi klossen stopper på motsatt side av likevektspunktet i forhold til starten, altså for $x < 0$. Dette gir

$$kd - 2\mu mg < \mu mg$$

eller

$$\mu > \frac{kd}{3mg}.$$

Oppgave 16

Et lodd med massen m henger i ei fjær med fjærkonstanten k . Vi velger systemets likevektstilling som $y = 0$ og positiv retning oppover. Vi trekker loddet ned med en strekning y_0 og slipper det. Hvis vi antar at luftmotstanden $F_L = cv$ er lineær i farta, hvilken differensiallikning beskriver loddets bevegelse, $y(t)$? (Minner om at $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ og $\ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$).

A: $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0$ med $y(0) = -y_0$ og $\dot{y}(0) = 0$

B: $m\ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) + cy(t) = 0$ med $y(0) = -y_0$ og $\dot{y}(0) = 0$

C: $m\ddot{y}(t) - c\dot{y}(t) + ky(t) = 0$ med $y(0) = -y_0$ og $\dot{y}(0) = 0$

D: $m\ddot{y}(t) - k\dot{y}(t) - ky(t) = 0$ med $y(0) = -y_0$ og $\dot{y}(0) = 0$

Løsning: Likning A: Krafta virker i motsatt retning av posisjonen og farta. Konstanten c bestemmer luftmotstanden og må multipliseres med farta $\dot{y}(t)$, mens k er fjærkonstanten og skal stå med forskyvninga $y(t)$.

Oppgave 17

Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \frac{1}{1+x}$?

A: $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$

B: $1 + x + x^2$

C: $1 - x + x^2$

D: $1 + \frac{1}{2}x$

E: $1 + x^2$

Løsning:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - x + x^2$$

Oppgave 18

Løsningen av differensialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = t$$

med initialbetingelsene $x(0) = \frac{1}{4}$, $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = \frac{1}{2}$ er gitt ved

A: $x(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$

B: $x(t) = \frac{1}{4}(te^{2t} - t - 1)$

C: $x(t) = \frac{1}{4}(te^{2t} + t + 1)$

D: $x(t) = \frac{1}{2}(te^{2t} + e^t + 1)$

E: $x(t) = \frac{1}{4}(te^{2t} + e^{2t})$

Løsning: Vi kan sjekke hvilken løsning som er riktig ved først å se på initialbetingelsene. For B og D er $x(0) \neq \frac{1}{4}$. For E er $x'(0) \neq \frac{1}{2}$. A kan ikke være riktig fordi deriverte av e^{2t} alltid gir tilbake noe proporsjonalt med e^{2t} , slik at vi aldri kan få t på høyre side. Riktig svar er altså C.

Vi kan også løse likninga systematisk (dette har vi ikke lært helt ennå, ta dette som et eksempel). Vi finner først en løsning av den homogene likninga

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Dette gjør vi ved å gjette $x = e^{\lambda t}$ og sette inn. Da finner vi den karakteristiske likninga

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

som har løsning $\lambda = 2$. Når vi har en dobbelt rot av den karakteristiske likninga er den generelle løsninga av den homogene likninga

$$x_h = Ae^{2t} + Bte^{2t}.$$

Vi må så finne en partikulær løsning av den homogene likninga. Når det inhomogene leddet (høyre side) er et polynom må man prøve et polynom av samme grad. Dvs vi prøver

$$x_p(t) = at + b$$

som vi setter inn

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} - 4\frac{dx_p}{dt} + 4x_p = -4a + 4at + 4b.$$

For at dette skal bli lik t må vi velge $a = b = \frac{1}{4}$. Dermed er den generelle løsninga av likninga vår

$$x(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}.$$

Vi bruker så initialbetingelsene

$$x(0) = A + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \implies A = 0$$

$$x'(0) = B + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \implies B = \frac{1}{4}$$

Dermed er C rett løsning.

Oppgave 19

Et lodd med massen m henger i ei snor med lengden r . Du gir loddet en horisontal fart v_0 slik at det begynner å bevege seg langs en vertikal sirkelbane. Hva er den minste størrelsen v_0 kan ha for at loddet følger hele sirkelbanen rundt?

A: $\sqrt{gr}$

B: $\sqrt{2gr}$

C: $\sqrt{3gr}$

D: $\sqrt{4gr}$

E: $\sqrt{5gr}$

Løsning: Energibevaring gir

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg2r$$

og dermed

$$v^2 = v_0^2 - 4gr$$

Farta er akkurat stor nok når snordraget er null på toppen, og det betyr at tyngden er lik sentrifugalkrafta, det vil si $mv^2/r = mg$. Dermed har vi

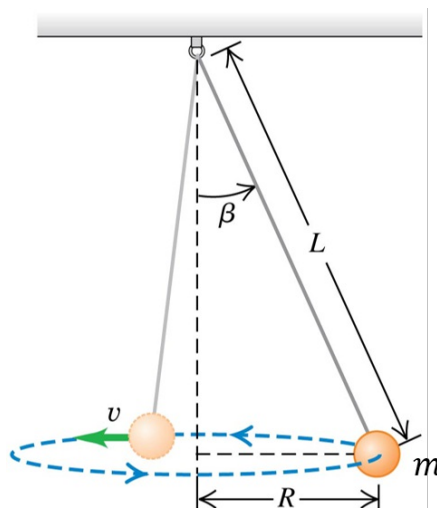
$$v_0^2 - 4gr = gr$$

eller

$$v_0 = \sqrt{5gr}.$$

Oppgave 20

En kule med masse er knyttet til en masseløs snor av lengde L som er festet i taket. Kulen beveger seg med konstant fart v på en horisontal sirkelbane med radius R , og snoren har en konstant vinkel β i forhold til vertikalen (konisk pendel, se figur). I forhold til kulens vekt er snordraget T :



- A: $T < mg$
- B: $T = mg$
- C: $T > mg$
- D: Alt er mulig, avhengig av farten til kula.

Løsning: Vertikalkomponenten av snordraget må være lik tyngden. Da må $T > mg$.