

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag
(ACL & JB, 01.03.2023)

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2023

Dato: Tirsdag 21. mars 2023, kl 09:00-12:00 (3 timer)

Digital eksamen i Inspira, 20 flervalgsoppgaver.

Tillatte hjelpemidler:

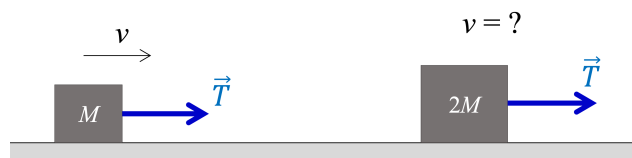
Rottmann: "Matematisk formelsamling"

Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Oppgave 1

Du trekker en eske med masse M over en horisontal flate med kraft $\vec{T}$, og esken beveger seg med konstant fart v . Du skal nå trekke en annen eske med masse $2M$, denne esken er av samme materiale som den første esken (samme friksjonskoeffisienter). Hvis du trekker med den samme kraften $\vec{T}$ på esken med masse $2M$ som står i ro på den samme overflaten, så vil denne

- forbli i ro
- akselerere inntil farten når verdien $\frac{1}{2}v$
- bevege seg med konstant fart v
- ingen av de andre tre alternativene er riktige

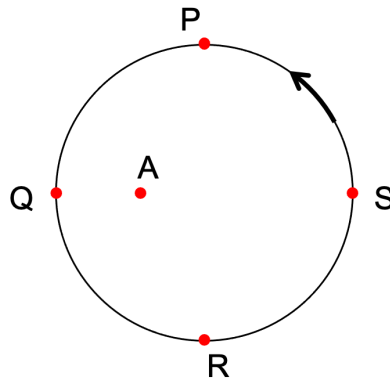


Vi vet at glidefriksjon (dynamisk friksjon) er mindre enn maksimal, statisk friksjon. Det betyr at kraften T , som brukes når esken med masse M sklir, er for liten til å greie å sette selv den mindre esken i bevegelse dersom den mindre esken er i ro. Dermed vil også den store esken måtte forbli i ro. Første kulepunkt er riktig.

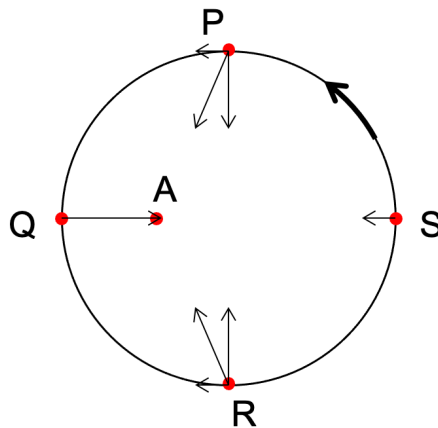
Oppgave 2

Et objekt beveger seg på en sirkelbane mot klokken som vist i figuren. Under bevegelsen peker akselerasjonsvektoren alltid i retning mot punkt A. Banefarten til objektet

- (a) øker i P og minker i R.
- (b) øker i S og minker i Q.
- (c) minker i S og øker i Q.
- (d) minker i P og øker i R.
- (e) Ingen objekter kan bevege seg på denne måten!



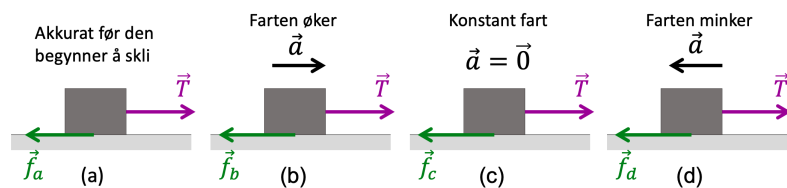
Vi vet at akselerasjonsvektor alltid skal peke mot punkt A. Hvis vi dekomponerer akselerasjonen i punkt P og R (se figur), ser vi at vi får en akselerasjonskomponent a_T i tangentiell retning i begge tilfellene. I punkt P peker a_T i samme retning som hastighetsvektor, som alltid er tangentiell til banen. I punkt R peker a_T i motsatt retning av bevegelsen. Dermed er svar (a) riktig, farten vil øke i P og minke i R.



Oppgave 3

En boks sklir bortover gulvet. Rangér størrelsen på friksjonskraften i de følgende situasjonene (boksen og gulvet er de samme i alle tilfellene):

- (a) $f_b > f_c > f_d > f_a$
- (b) $f_a > f_b > f_c > f_d$
- (c) $f_a > f_b = f_c = f_d$
- (d) $f_b > f_c = f_a > f_d$
- (e) $f_b = f_c = f_d > f_a$



Friksjonen er størst rett før boksen begynner å skli, da er den på sin maksimalverdi for statisk friksjon. Når den først glir, er det dynamisk friksjon som har en konstant størrelse, $\mu_d N$, uansett hvor stort snordraget, luftmotstand, eller andre krefter som virker på boksen er. Riktig svar er alternativ (c).

Oppgave 4

En bil med masse m kjører i en sving med kurveradius R . Bilen kjører med konstant fart v . Det er friksjon mellom hjulene og veien, med statisk friksjonskoeffisient μ_s . For å klare svingen uten å skli, må farten til bilen være gitt ved

- (a) $v < \sqrt{\mu_s g R}$
- (b) $v < \sqrt{\mu_s m g R}$
- (c) $v < \mu_s m g / R$
- (d) $v < \sqrt{\frac{\mu_s g}{R}}$

Kreftene som virker er friksjon, normalkraft og gravitasjon. Siden bilen kjører i en sving, må det være sentripetalakselerasjon $\frac{v^2}{R}$ som peker inn mot sentrum av sirkelen. For at bilen ikke skal skli må vi ha:

$$f_N < \mu_s N$$

hvor f_N er friksjonskomponenten som virker normalt på bevegelsesretningen (inn mot sirkelens sentrum, den kraften som gir sentripetalakselerasjon) og N er størrelsen på normalkraften. Ingen bevegelse i horisontal retning gir $N = mg$, og dermed:

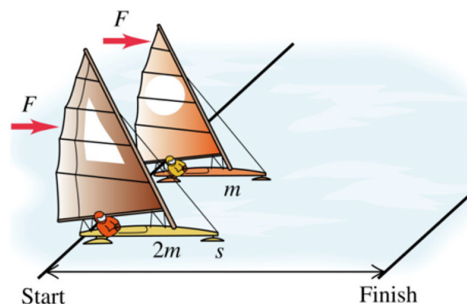
$$m \frac{v^2}{R} < \mu_s m g \Rightarrow v < \sqrt{\mu_s g R}.$$

Dette kunne vi også løst med dimensjonsanalyse, det er kun riktig enhet på farten for svaralternativ (a).

Oppgave 5

To isbåter, båt A med masse m og båt B med masse $2m$, kjører på en friksjonsfri, horisontal, frossen innsjø. Begge båtene starter i ro, og vinden utøver samme, konstante kraft på begge. Hvilken isbåt kommer først over mållinja?

- (a) Isbåten med masse m
- (b) Isbåten med masse $2m$
- (c) De kommer fram samtidig.



Fra arbeid-energi-teoremet vet vi at båtene må ha den samme kinetiske energien i det de krysser mållinja, siden det er den samme strekningen og den samme konstante kraften som virker på dem. Men de vil ha forskjellig fart, vi finner:

$$K_A = K_B$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

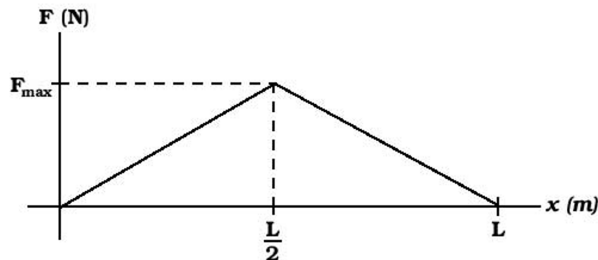
$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}2mv_B^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2}v_B.$$

Så båt A med masse m er raskest og krysser mållinja først.

Oppgave 6

En partikkel starter i ro ved $x = 0$ m og beveger seg til $x = L$ mens kraften $F(x)$ virker, se figur av kraften som funksjon av posisjonen x . Hva er partikkelens kinetiske energi ved $x = L$?

- (a) $\frac{1}{4}F_{max}L$
- (b) $\frac{1}{2}F_{max}L$
- (c) $F_{max}L$
- (d) 0



Arbeidet som kraften gjør er lik arealet av kurven:

$$W_{0,L} = \int_0^L F(x)dx = K_L - K_0 = K_L$$

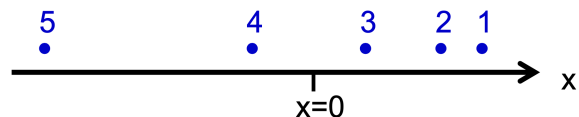
siden partikkelen starter i ro. Arealet til en trekant er gitt ved $A = \frac{1}{2}GH$ hvor $G = L$ er grunnlinja og $H = F_{max}$ er høyden, og vi får da

$$W_{0,L} = \frac{1}{2}F_{max}L = K_L.$$

Oppgave 7

Et legeme beveger seg langs x -aksen (positiv retning til høyre) med konstant akselerasjon, se figur. Prikkene 1, 2, 3, ... angir posisjonen til legemet ved tid $t_1, t_2, t_3, \dots$ med konstante tidsintervaller Δt . Ved punktet 3 har legemet

- (a) negativ hastighet og negativ akselerasjon
- (b) negativ hastighet og positiv akselerasjon
- (c) positiv hastighet og positiv akselerasjon
- (d) positiv hastighet og negativ akselerasjon

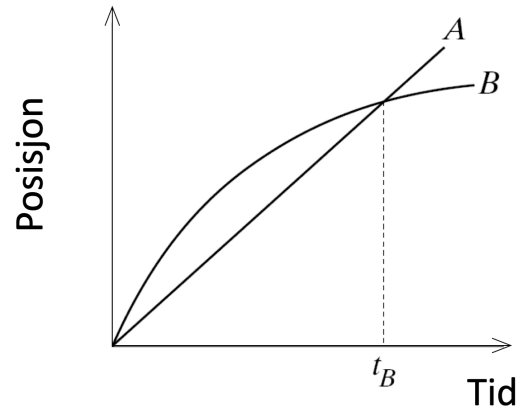


Forflytningen Δx er negativ, så hastigheten peker i negativ x -retning. Ettersom forflytningen blir større og større i negativ x -retning, er også akselerasjonen negativ. Svar (a).

Oppgave 8

Grafen viser posisjon som funksjon av tid for to tog som kjører på parallelle spor. Hvilken av følgende påstander er korrekt?

- (a) Begge togene har samme hastighet ved en tid før t_B .
- (b) Ved tiden t_B har begge togene samme hastighet.
- (c) Begge togene øker hastigheten hele tiden.
- (d) Et sted på grafen har begge togene samme akselerasjon.

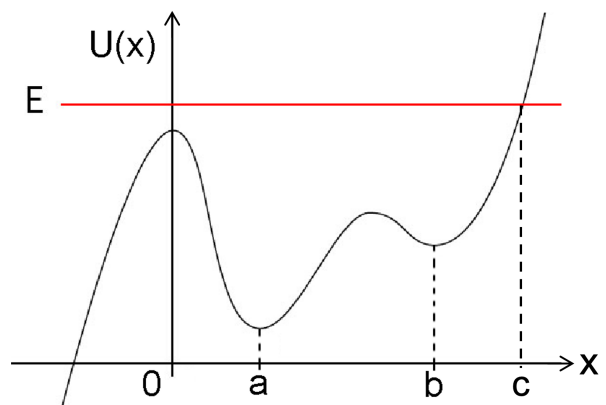


Ved en tid før t_B har togene samme stigningstall, og dermed samme hastighet. Svar (a) er riktig.

Oppgave 9

En partikkel er i et potensial $U(x)$, og har total mekanisk energi E , se figur. Partikkelen befinner seg i posisjon $x = a$ og beveger seg i positiv x -retning (mot høyre). Hva kommer til å skje med partikkelen?

- (a) Partikkelen svinger om posisjonen $x = a$.
- (b) Partikkelen svinger om posisjonen $x = b$.
- (c) Partikkelen slipper unna mot uendelig i negativ x -retning.
- (d) Partikkelen stanser og forblir ved $x = c$.
- (e) Partikkelen svinger om posisjonen $x = c$.
- (f) Det er ikke nok informasjon til å avgjøre hva som vil skje.



Vi har at mekanisk energi er bevart, $E = U + K = \text{konstant}$. Ved $x = a$ beveger partikkelen seg mot høyre, $v > 0$. Ved $x = c$ er $U(x) = E$, så her må $v = 0$. Hva skjer så? Vi vet at kraften er gitt ved

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

I punkt c har $U(x)$ et positivt stigningstall, og dermed virker kraften i negativ x -retning her. Kraften akselererer partikkelen i negativ x -retning, partikkelen vil bevege seg mot venstre. Siden totalenergien E til partikkelen er større enn det lokale maksimumet i $x = 0$ for potensialet, vil partikkelen greie å komme seg over denne "barrieren". Partikkelen vil derfor slippe unna mot uendelig i negativ x -retning (svar (c)).

Oppgave 10

To lodd henger i en trinsa som vist i figuren. Vi antar at både trinsa og snora som forbinder loddene er masseløse. Videre er massen til lodd A mindre enn massen til lodd B, $m_A < m_B$. Loddene holdes i ro, og så slippes de. Absoluttverdien til akselerasjonen som lodd B får er gitt ved

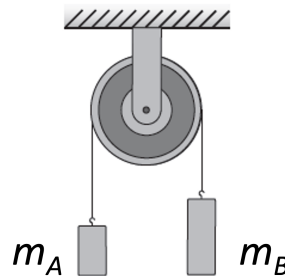
(a) $a = \left| \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} g \right|$

(b) $a = \left| \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} g \right|$

(c) $a = \left| \frac{m_B}{m_A + m_B} g \right|$

(d) $a = \left| \frac{m_A}{m_A + m_B} g \right|$

(e) $a = \left| \frac{m_B m_A}{m_A + m_B} g \right|$



Vi bruker Newtons 2. lov på begge loddene og velger positiv retning i bevegelsesretning, dvs. lodd A går opp og lodd B går ned. Da har vi for lodd A:

$$T - m_A g = m_A a$$

hvor T er snordraget, og for lodd B:

$$m_B g - T = m_B a.$$

Vi legger sammen de to ligningene og finner

$$(m_B - m_A)g = (m_A + m_B)a \Rightarrow a = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}g.$$

Svaralternativ (a) er riktig.

Kommentar Ann-Cecilie: her er både (a) og (b) riktige, begge svar vil gi 1 poeng på denne oppgaven.

Oppgave 11

En pendel svinger fra punkt P til R og tilbake. Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendellodet i punktet P (punktet lengst til venstre i banen)?

(a) Pil 1

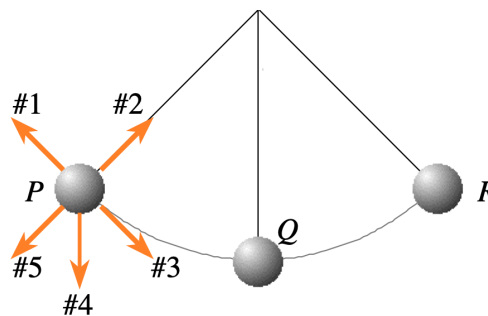
(b) Pil 2

(c) Pil 3

(d) Pil 4

(e) Pil 5

(f) Akselerasjonen i P er null

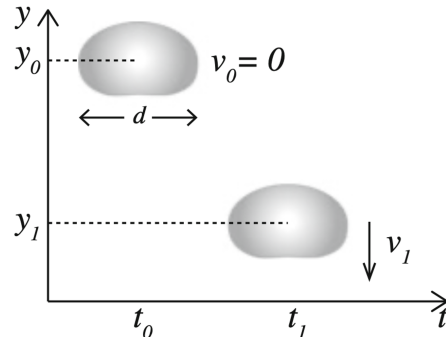


Akselerasjonen peker i samme retning som summen av kreftene. I punkt P snur pendelen, vi har gravitasjon og snordrag, og netto kraft må peke i tangentiell retning til banen, altså pil 3.

Oppgave 12

En vandråpe starter i ro, og faller så gjennom lufta mot bakken i vertikal retning, se figur. Den er påvirket av tyngdekraft og luftmotstand ($\vec{F}_D = -k_v \vec{v}$). Med terminalfarten gitt ved $v_T = mg/k_v$, er hastigheten til dråpen som funksjon av tid gitt ved

- (a) $v(t) = v_T(e^{-gt/v_T} - 1)$
- (b) $v(t) = v_T(e^{-v_T/gt} - 1)$
- (c) $v(t) = \frac{1}{v_T}(e^{-v_T/gt} - 1)$
- (d) $v(t) = v_T(e^{-gt/v_T} + 1)$
- (e) $v(t) = v_T(1 - e^{-gt/v_T})$
- (f) $v(t) = v_T(1 + e^{+gt/v_T})$



Vi bruker Newtons 2.lov i vertikal retning. Vi løser differensialligningen

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k_v}{m}v = -g - \frac{g}{v_T}v = -g \left(1 + \frac{v}{v_T}\right)$$

hvor vi har brukt uttrykket for den oppgitte terminalfarten v_T . Dette er en 1.ordens lineær, separabel diff-ligning:

$$\frac{dv}{1 + v/v_T} = -g dt.$$

Vi integrerer med initialbetingelse $v_0 = 0$ m/s og $t_0 = 0$ s og får:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv'}{1 + v'/v_T} = -g \int_0^t t' dt'$$

hvor vi integrerer over de merkede variablene. Med substitusjon $u = 1 + v'/v_T$, $du = dv'/v_T$ får vi

$$\int_1^{1+v(t)/v_T} \frac{du}{u} = -gt \Rightarrow v_T \ln \left(1 + \frac{v(t)}{v_T}\right) = -gt.$$

Vi får videre:

$$1 + \frac{v(t)}{v_T} = e^{-gt/v_T} \Rightarrow v(t) = v_T (e^{-gt/v_T} - 1).$$

Svar (a) er riktig.

Kommentar Ann-Cecilie: trykkfeil i oppgave på Inspera, der var to svaralternativer like: $v(t) = v_T(1 + e^{-gt/v_T})$ og $v(t) = v_T(e^{-gt/v_T} + 1)$ er det samme (men uansett feil svaralternativ).

Oppgave 13

Lennard-Jones-potensialet brukes ofte til å beskrive vekselvirkningen mellom to atomer i et molekyl. Potensialet er gitt ved

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{b}{r}\right)^6 \right],$$

hvor a og b er konstanter og r er avstanden mellom atomene. Kraften som virker på ett av atomene er gitt ved

- (a) $F(r) = U_0 \left[12 \left(\frac{a^{12}}{r^{13}} \right) - 6 \left(\frac{b^6}{r^7} \right) \right]$
- (b) $F(r) = U_0 \left[\frac{-12}{a} \left(\frac{a^{12}}{r^{13}} \right) + 6b \left(\frac{b^6}{r^7} \right) \right]$
- (c) $F(r) = U_0 \left[12a \left(\frac{a^{12}}{r^{13}} \right) - 6b \left(\frac{b^6}{r^7} \right) \right]$
- (d) $F(r) = U_0 \left[-12a \left(\frac{a^{12}}{r^{13}} \right) + 6b \left(\frac{b^6}{r^7} \right) \right]$

Kraften er gitt som $F(r) = -\frac{dU}{dr}$. Vi deriverer potensialet med hensyn på x og får:

$$\frac{dU}{dr} = U_0 \left[-12 \left(\frac{a^{12}}{r^{13}} \right) - (-6 \left(\frac{b^6}{r^7} \right)) \right] = -U_0 \left[12 \left(\frac{a^{12}}{r^{13}} \right) - 6 \left(\frac{b^6}{r^7} \right) \right].$$

Siden kraften er minus den deriverte til potensialet får vi til slutt

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = U_0 \left[12 \left(\frac{a^{12}}{r^{13}} \right) - 6 \left(\frac{b^6}{r^7} \right) \right].$$

Svar (a) er riktig.

Oppgave 14

Taylorploynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = 1/x$ i punktet 1 er gitt ved

- (a) $1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3$
- (b) $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3$
- (c) $1 - (x - 1) - (x - 1)^2 - (x - 1)^3$
- (d) $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3$

Vi bruker definisjonen på et Taylorpolynom fra formelarket:

$$T_n(f(x); a) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i f(x)}{dx^i} \right)_{x=a} (x - a)^i$$

med $n = 3$ og $a = 1$. Vi deriverer og får:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{d^3 f}{dx^3} &= -\frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

Da får vi

$$T_3(f(x); a = 1) = 1 - \frac{1}{1!}(x - 1) + \frac{2}{2!}(x - 1)^2 - \frac{6}{3!}(x - 1)^3 = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3.$$

Oppgave 15

Taylorpolynom til $f(x) = e^x$ av grad 4 om punktet 0 er gitt ved

- (a) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
- (b) $1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$
- (c) $1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
- (d) $1 - x^2 - \frac{x^4}{2}$

Vi bruker igjen definisjonen på Taylorpolynomet, og at den deriverte til e^x alltid er den samme som funksjonen selv. Videre er $e^0 = 1$, så vi får:

$$T_4(f(x); a = 0) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Oppgave 16

Du kaster en ball i et skrått kast, og en venn vil bruke Euler-Cromer-metoden for å beskrive bevegelsen til ballen. Vennen tar med luftmotstand og bruker modellen $F_D = -Dv^2$. Vennen din gir deg koden sin, bildet viser den delen av koden hvor løkka kjøres. Hva er feilen(e) med denne koden?

- (a) Akselerasjonen er feil fordi det ikke er delt på massen, og metoden er vanlig Euler, ikke Euler-Cromer.
- (b) Akselerasjonen er feil fordi det ikke er delt på massen.
- (c) Metoden er vanlig Euler, ikke Euler-Cromer.
- (d) Hele koden ser feil ut.
- (e) Det er feil fortegn på gravitasjonen og luftmotstanden.

```

6 # Nå er vi klare for å kjøre ei løkke og regne ut alt vi vil ha:
7 i = 0 # start-indeks
8 # Vi passe på:
9 # 1. Posisjonen i y-retning skal være større enn eller lik null, ellers er ballen under bakken
10 # (vi har definert bakken som y = 0m)
11 # 2. Telleindeksen må ikke bli for stor,
12 # vi må holde oss innenfor størrelsen til vektorene og matrisene
13 while r[i,1]>=0.0 and i<n:
14     # Her bruker vi funksjonen np.linalg.norm() for å finne normen til hastighetsvektor
15     F_D = -D*np.linalg.norm(v[i, :])**2*v[i, :]
16     F_G = -m*g*np.array([0,1]) # Enhetsvektoren i y-retning = np.array([0,1])
17     Fnet = F_D + F_G # Nettokraften.
18     a[i,:] = Fnet/m # Akselerasjonen
19     v[i+1,:] = v[i,:] + a[i,:]*dt # hastigheten
20     # Vi bruker Euler-Cromer-metoden for å beregne posisjonsvektoren
21     r[i+1,:] = r[i,:] + v[i,:]*dt
22     t[i+1] = t[i] + dt # her inkrementerer vi tiden
23     i = i+1 # husk å øke indeksen!

```

Det er ikke Euler-Cromer-metoden, fordi det ikke er $v[i+1, :]$ i utregningen av posisjonen. Dessuten er akselerasjonen satt lik F_{net} , uten å dele på massen. Svar (a) er riktig.

Oppgave 17

En komet med masse m beveger seg gjennom vårt solsystem og er bare påvirket av gravitasjonskraften fra solen. Hvilken påstand er riktig?

- (a) Kometen beveger seg på en sirkelbane rundt solen.

- (b) Kometen beveger seg på en elliptisk bane med solen i et brennpunkt.
- (c) Gravitasjonskraften avbøyer banen når kometen er nær solen, men etterhvert forlater kometen solsystemet og beveger seg uendelig langt bort.
- (d) Kometen beveger seg enten på en lukket bane eller forlater solsystemet avhengig av massen til kometen.
- (e) Kometen beveger seg enten på en lukket bane eller forlater solsystemet avhengig av sin hastighet.

Se forelesning 8, mandag 13.03.2023 og læreboka side 205, eksempel 7.6.1. Kometen er påvirket av Solas gravitasjon. Vi fant at akselerasjonen til kometen er gitt ved

$$\vec{a} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

hvor M er Solas masse og r er avstanden mellom massesenterne til Sola og kometen. Så akselerasjonen avhenger ikke av massen til kometen, og dermed er heller ikke kometens bevegelse bestemt av dens masse. Men vi så at hvilken bane kometen ender opp med å få, avhenger av initialhastigheten til kometen: den kan enten gå i en sirkelbane, i en elliptisk bane, eller bli avbøyd og forlate solsystemet. Svar (e) er riktig.

Oppgave 18

En torus er den korrekte matematiske terminologien når man snakker om formen til en smultring. Volumet til en torus kan bli uttrykt som en funksjon av den indre radien r og den ytre radien R av torusen (dvs. avstanden fra senteret til den indre og den ytre kanten). Hvilke av de følgende likningene kan være den korrekte likningen for volumet av en torus?

- (a) $V = (2\pi R)(\pi r^2)$
- (b) $V = \frac{\pi^2}{4}(Rr)^2$
- (c) $V = \frac{3\pi^2}{4}(Rr)^3$
- (d) $V = (2\pi R)(\pi r^3)$

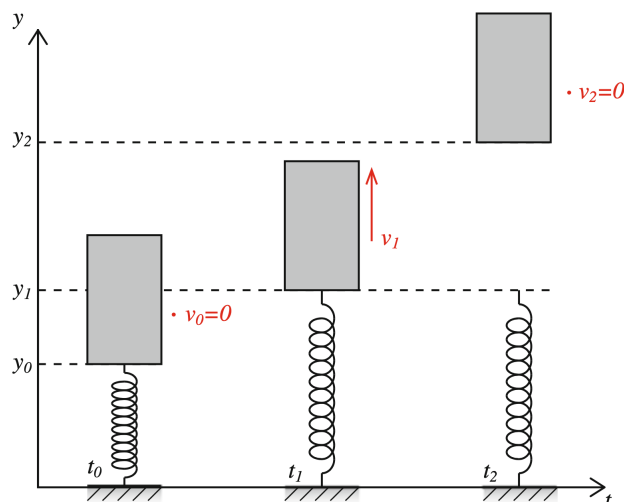
Gruppeoppgave G1.4. Vi vet at volumet skal ha dimensjon av lengde opphøyd i tredje. Dermed er det kun svar (a) som er mulig, siden alle de andre alternativene har feil dimensjon. Svar (a) er riktig.

Oppgave 19

En kloss med masse m trykkes ned på en masseløs fjær med fjærkonstant k , se figur. Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand. Idet klossen slippes, starter den i posisjon $y = y_0$ og med null hastighet. Klossen når sin maksimale høyde y_2 ved tiden t_2 . Kraften i fjæren for $y \geq y_1$ er null, siden fjæren ikke er festet til klossen. Høyden y_2 er gitt ved

- (a) $y_2 = y_0 + \frac{k}{2mg}(y_0 - y_1)^2$
- (b) $y_2 = y_0 - \frac{k}{2mg}(y_0 - y_1)^2$
- (c) $y_2 = y_0 + \frac{k}{2mg}(y_0 + y_1)^2$

(d) $y_2 = y_0 + \frac{2mg}{k}(y_0 - y_1)^2$



Fra eksempel 11.2.4 side 318 i læreboka. Siden vi ser bort fra luftmotstand og friksjon, er det kun gravitasjon og fjærkraft som virker, og de er begge konservative krefter. Vi kan da bruke at total, mekanisk energi er bevart:

$$U_0 + K_0 = U_2 + K_2.$$

I starten, $t = 0$, er den potensielle energien gitt ved summen av fjærpotensialet og gravitasjon:

$$U(y) = U_G(y) + U_F(y).$$

Her er klossen i ro, så $K_0 = 0$. Vi velger nullpunkt for gravitasjonspotensialet til å være ved bakkenivå, $y = 0$ m. Fjæren er trykket sammen en lengde $y_1 - y_0$, vi ser fra figuren at likevektslengden til fjæren er y_1 . Da får vi total mekanisk energi i starten:

$$E_0 = U_0 + K_0 = mgy_0 + \frac{1}{2}k(y_0 - y_1)^2.$$

Så ser vi på den totale mekaniske energien ved høyden y_2 . Siden $y_2 > y_1$, er det ingen fjærkraft, og siden dette er den maksimale høyden, er klossen momentant i ro her (det er nå den snur og faller ned igjen). Dermed får vi:

$$E_2 = mgy_2.$$

Det er denne høyden vi skal finne, og nå setter vi $E_0 = E_2$ og løser for y_2 :

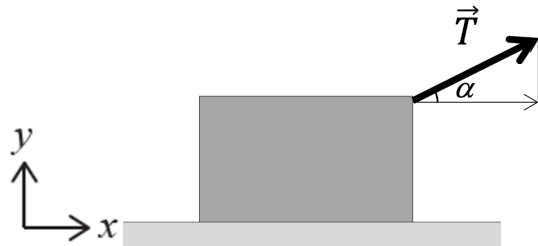
$$mgy_0 + \frac{1}{2}k(y_0 - y_1)^2 = mgy_2 \Rightarrow y_2 = y_0 + \frac{k}{2mg}(y_0 - y_1)^2.$$

Svar (a) er riktig.

Oppgave 20

Du drar i en boks med masse m langs gulvet ved trekke i et tau som er festet på ett av hjørnene på toppen av boksen, se figur. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom boksen og gulvet er μ_d . Tauet danner en vinkel α med horisontalen, og du trekker med en kraft med størrelse T . Akselerasjonen til boksen er

- (a) $a = \frac{T}{m} (\cos \alpha + \mu_d \sin \alpha) - \mu_d g$
- (b) $a = \frac{T}{m} (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) - \mu_d g$
- (c) $a = Tm (\cos \alpha + \mu_d \sin \alpha) - \mu_d g$
- (d) $a = \frac{T}{m} (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha)$
- (e) $a = \frac{T}{m} (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) + \mu_d g$



Vi bruker Newtons 2. lov i y -retning:

$$N + T \sin \alpha - G = 0 \Rightarrow N = mg - T \sin \alpha.$$

Fra Newtons 2. lov i x -retning:

$$T \cos \alpha - f_d = ma.$$

Vi vet at størrelsen til dynamisk friksjon er gitt ved $|f_d| = \mu_d N$ og setter inn for N :

$$T \cos \alpha - \mu_d (mg - T \sin \alpha) = ma.$$

Da får vi:

$$a = \frac{T}{m} \cos \alpha + \mu_d \frac{T}{m} \sin \alpha - \mu_d g = \frac{T}{m} (\cos \alpha + \mu_d \sin \alpha) - \mu_d g.$$

Svar (a) er riktig.

Eksamenssett slutt.