

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Midtveiseksamen FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2025

Dato: 9. oktober kl 15:00-18:00 (3 timer)

Oppgavesettet er på: 20 flervalgsoppgaver.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator; Rottman: "Matematisk formelsamling"

Oppgave 1

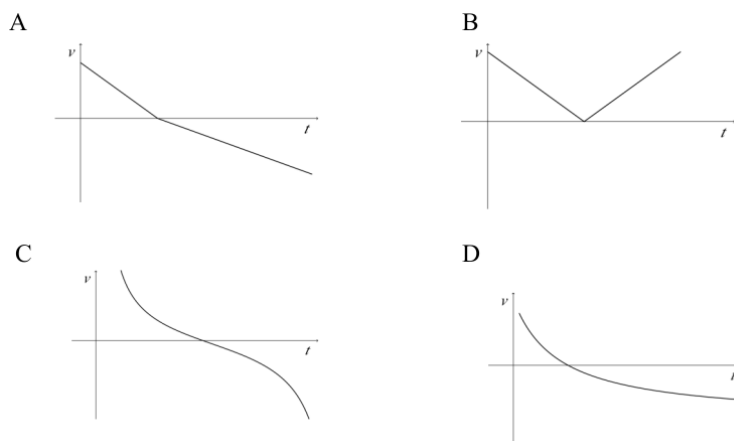
Hvilken av de følgende situasjoner er umulig for bevegelse langs ei rett linje?

- A. Et legeme har positiv hastighet og negativ akselerasjon.
- B. Et legeme har positiv hastighet og positiv akselerasjon.
- C. Et legeme har null hastighet men akselerasjon forskjellig fra null.
- D. Et legeme har konstant akselerasjon forskjellig fra null og hastighet som varierer.
- E. Et legeme har konstant hastighet forskjellig fra null og akselerasjon som varierer.

Løsning: Et legeme har konstant hastighet forskjellig fra null og akselerasjon som varierer.

Oppgave 2

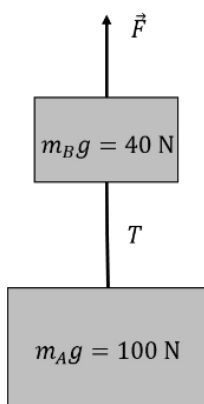
Ei vogn er gitt et dytt og beveger seg oppover et skråplan. På vogna er det montert et seil. Hvilken av fartsgrafene under beskriver best den videre bevegelsen? Se bort fra friksjonen mellom vogna og skråplanet, men altså ikke luftmotstanden.



Løsning: D. For små hastigheter går luftmotstanden som $L = kv$ (for større hastigheter går den som $L = kv^2$). På vei oppover virker tyngdekraften og luftmotstanden i samme retning, mot bevegelsen. Dess saktere vognen beveger seg, jo mindre bidrag fra luftmotstanden. Når vognen beveger seg nedover, vil tyngden og luftmotstanden virke i hver sin retning. Til å begynne med vil luftmotstanden bidra lite. Etter hvert som farten øker vil bidraget fra luftmotstanden bli større og større, og farten vil gå asymptotisk mot en konstant.

Oppgave 3

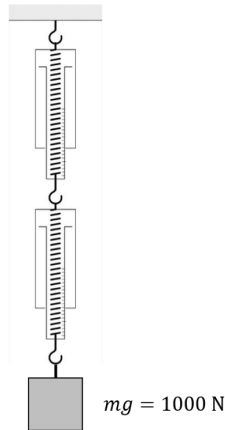
To esker med massene m_A og m_B er knyttet sammen med ei masseløs snor som vist i figuren. Ei kraft F drar i eskene slik at de beveger seg med konstant hastighet på $v = 2$ m/s oppover. Snordraget mellom eskene er T . Hvilken av følgende relasjoner mellom krafta F og snordraget T er riktig?



- A. $F = T + 40 \text{ N}$.
- B. $F < T$
- C. $F = T + 100 \text{ N}$.
- D. $F + T = 140 \text{ N}$.
- E. $F = T$

Løsning: $F = T + 40 \text{ N}$

Oppgave 4



Ei eske som veier 1000 N henger i to fjærvekter på rad som vist i figuren. Massen til fjærvektene er neglisjerbar i forhold til massen til eska. Hva leser du av?

- A. Den nederste viser 1000 N og den øverste viser 0.
- B. Begge viser forskjellige vekter, men summen er 1000 N.
- C. Den øverste viser 1000 N og den nederste viser 0.
- D. Begge viser 500 N.
- E. Begge viser 1000 N.

Løsning: Begge viser 1000 N.

Oppgave 5

To vogner triller med samme konstante fart, v_0 , på en horisontal flate. Avstanden mellom vognene er d_0 . Vognene triller så nedover et skråplan for så å komme ut på en horisontal flate igjen. Avstanden mellom vognene er nå blitt d . Høydeforskjellen mellom de to horisontale flatene er h . Se bort fra all friksjon. Avstanden d mellom vognene er blitt

- A. $d = d_0$
- B. $d = d_0 \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}$
- C. $d = \frac{d_0}{v_0} \sqrt{2gh}$
- D. $d = d_0 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$

Løsning: Fartene er konstante på de horisontale flatene. Da blir $d_0 = v_0 \Delta t$ og $d = v \Delta t$ der Δt er tidsforskjellen mellom de to vognene (denne er konstant hele tida). Dette betyr at

$$\frac{d}{d_0} = \frac{v}{v_0}.$$

Farta v finner vi fra energibevaring

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

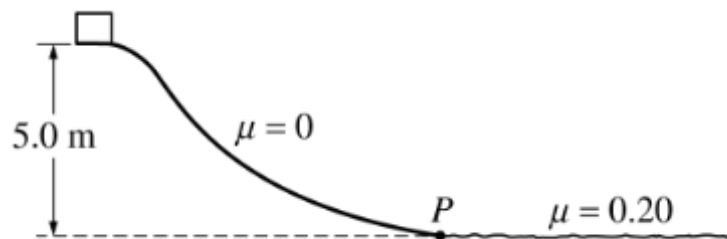
og dermed

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Da blir

$$d = d_0 \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_o^2}}.$$

Oppgave 6



En kloss starter i ro og glir ned en friksjonsløs bakke. Toppen av bakken er 5,0 m høyere enn bunnen. I bunnen av bakken fortsetter den på en horisontal flate der friksjonstallet er $\mu_d = 0,20$. Hvor langt bortover den horisontale flaten sklir klossen før den stopper? (A) 0.40 m (B) 1.0 m (C) 2.5 m (D) 10 m (E) 25 m

- A. 0,40 m
- B. 1,0 m
- C. 2,5 m
- D. 10 m
- E. 25 m

Løsning: Den potensielle energien ved toppen er $U = mgh$ der $h = 5,0$ m er høydeforskjellen og m er massen til klossen. Når den stopper har friksjonskrafta gjort et arbeid $W = \mu_d mg \Delta x$ der Δx er strekninga den sklir. Arbeidet må være lik den potensielle energien i starten, og dermed er

$$\Delta x = \frac{h}{\mu_d} = 25 \text{ m}.$$

Oppgave 7

Du går oppover en bratt fjellside, som er som et skråplan med helningsvinkel θ i forhold til horisontalen. Hvor stor må friksjonskoeffisienten mellom skoene dine og bakken være for at du ikke skal skli ned?

- A. $\mu \geq \tan \theta$
- B. $\mu \geq \sin \theta$
- C. $\mu \geq \cos \theta$
- D. $\mu \geq \cot \theta$

Løsning: $\mu \geq \tan \theta$

Oppgave 8

Ei kule med massen M og radien R roterer om en akse gjennom sentrum med vinkelfart ω . Kula har et treghetsmoment

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Hvilken av følgende uttrykk kan gjelde for den kinetiske energien i rotasjonsbevegelsen til kula? (Hint: Dimensjonsanalyse).

- A: $\frac{1}{2}I\omega^2$
- B: $\frac{I}{2\omega^2}$
- C: $\frac{I\omega^2}{2R^2}$
- D: $\frac{1}{2}M\omega^2$

Løsning: $\frac{1}{2}I\omega^2$

Oppgave 9

Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$?

- A: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$

B: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3$

C: $1 - x^2 + x^3$

D: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^4$

E: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3$

Løsning: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$. Her kan en bli litt forvirret siden svaret er et polynom av grad 2. Men siden $f'''(1) = 0$ blir tredjegradsleddet lik null.

Oppgave 10

Løsningen av differensialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

med initalbetingelsene $x(0) = 0$ og $\frac{dx}{dt}(0) = 1$ er gitt ved

A: $e^{-t} - e^{-2t}$

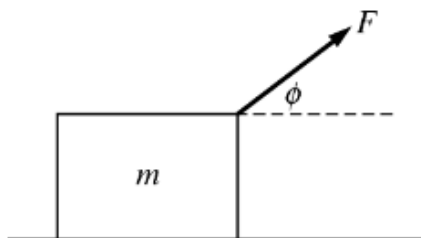
B: $e^{-t} + e^{-2t}$

C: $e^t - e^{2t}$

D: $e^t + e^{2t}$

Løsning: $e^{-t} - e^{-2t}$ (sett inn og sjekk).

Oppgave 11



Ei kasse med massen m blir trukket langs en horisontal flate. Friksjonstallet mellom kassa og flata er μ_d . Krafta F som trekker kassa virker i en retning som danner vinkelen ϕ med horisontalen.

Hvis kassa trekkes med konstant fart vil absoluttverdien til friksjonskrafta være

A: $\mu_d mg$

B: $\mu_d F \cos \phi$

C: $\mu_d (F \sin \phi + mg)$

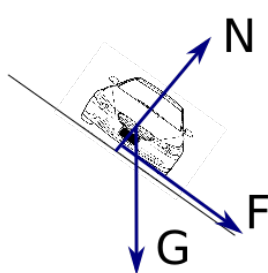
D: $\mu_d (mg - F \sin \phi)$

Løsning: Vi dekomponerer krafta F , og finner at vertikalkomponenten er $F_y = F \sin \phi$. Det betyr at normalkrafta er $N = mg - F_y = mg - F \sin \phi$. Dermed er friksjonskrafta $\mu_d (mg - F \sin \phi)$.

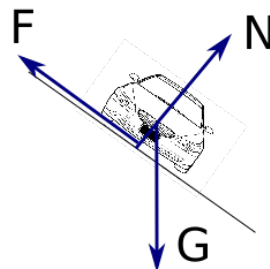
Oppgave 12

Du kjører en bil med konstant banefart gjennom en dosert sving. Farta du har er bare litt mindre enn den maksimale farta du kan ha før du sklir ut i svingen. Hvilken av figurene viser best kreftene som virker på bilen?

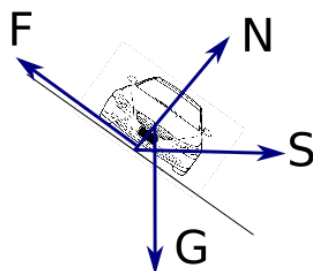
A



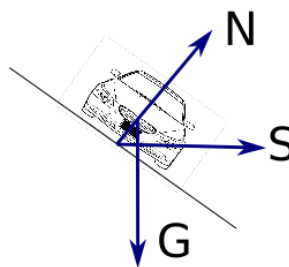
B



C



D



Symbolene betyr

$\vec{N}$	Normalkraft
$\vec{F}$	Friksjonskraft
$\vec{G}$	Tyngdekraft
$\vec{S}$	Sentripetalkraft

Løsning: A

Oppgave 13

To kuler med massene m_1 og m_2 er forbundet med ei fjær med fjærkonstanten k og ubelastet lengde x_0 . Vi antar at kulene hele tida beveger seg langs ei rett linje, og at de har posisjonene x_1 og x_2 (du kan anta at $x_2 > x_1$). Differensiallikningene som beskriver bevegelsen til kulene er da

$$\text{A: } m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - x_0) \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - x_0)$$

$$\text{B: } m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - x_0) \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - x_0)$$

$$\text{C: } m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_1 - x_2 - x_0) \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_1 - x_2 - x_0)$$

$$\text{D: } m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - x_0) \quad m_1 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - x_0)$$

Løsning: $m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - x_0) \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - x_0)$

Oppgave 14

Du flyr et lite fly med massen M (inkludert passasjerer og last). Du skal fly en loop som er formet som en vertikal sirkel med radien R . Hvor stor fart må du minst ha i bunnen av sirkelen for at du ikke skal falle ut av setet når du er på toppen (der flyet er opp-ned)? Motoren til flyet gir en konstant kraft F framover i bevegelsesretningen, og luftmotstanden er L .

$$\text{A: } \sqrt{5gR - \frac{2\pi R}{M}(F - L)}$$

$$\text{B: } \sqrt{5gR + \frac{2\pi R}{M}(F - L)}$$

$$\text{C: } \sqrt{5gR - \frac{2\pi R}{M}(F + L)}$$

$$\text{D: } \sqrt{5gR + \frac{2\pi R}{M}(F + L)}$$

Løsning: På toppen av loopen må farta v være slik at tyngdeakselerasjonen er lik sentripetallakselerasjonen for at vi akkurat ikke skal falle ut av setet. Dermed er $v^2 = gr$. Arbeidet fra motoren i en halvsirkel er $F\pi R$ og fra luftmotstanden $-L\pi R$. Hvis farta på bunnen er v_0 har vi at

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + (F - L)\pi R = \frac{1}{2}Mv^2 + 2MgR.$$

Vi setter inn for v^2 og finner

$$v_0 = \sqrt{5gR - \frac{2\pi R}{M}(F - L)}.$$

Oppgave 15

Du slipper en ball fra høyden h over gulvet. Ballen spretter opp igjen, og idet den forlater gulvet har den akkurat halvparten av farta den hadde rett før den traff gulvet. Hvilken høyde når ballen etter sprettet? Se bort fra luftmotstand.

- A: $\frac{1}{4}h$
- B: $\frac{1}{3}h$
- C: $\frac{1}{2}h$
- D: $\frac{1}{\sqrt{2}}h$

Løsning: Halvparten av farta betyr en fjerdedel av kinetisk energi, og dermed blir høyden $\frac{1}{4}h$

Oppgave 16

Du står på månen og skyter et prosjektil vertikalt oppover med stor startfart v_0 . Hvor høyt over månens overflate er det høyeste punktet i banen? Månens radius er R , massen er M , gravitasjonskonstanten er G , tyngdeakselerasjonen ved overflata er g og unnsliplingsfarta ved overflata er v_u .

- A: $\frac{R^2 v_0^2}{2GM - Rv_0^2}$
- B: $\frac{gR}{Rv_0^2 + MGv_u^2}$
- C: $\frac{v_0^2}{2g}$
- D: $\frac{R}{\left(\frac{v_u}{v_0}\right)^2 + 1}$

Løsning: Energibevaring gir

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -G\frac{Mm}{R_m}$$

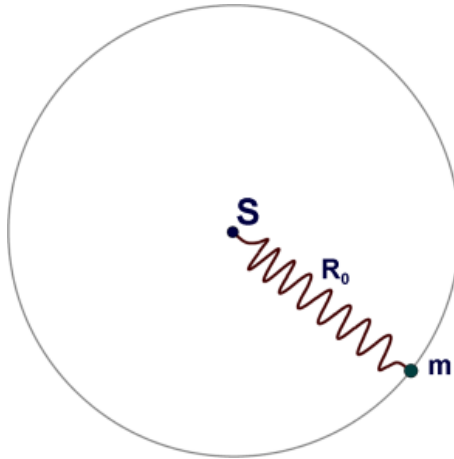
der m er massen til prosjektilet og R_m er maksimal avstand fra månens sentrum. Vi finner da

$$R_m = \frac{2GMR}{2GM - Rv_0^2}$$

og dermed maksimal høyde over overflata

$$R_m - R = \frac{R^2 v_0^2}{2GM - Rv_0^2}.$$

Oppgave 17



En liten kule med massen m er festet i den ene enden av en masseløs fjær med fjærstivheten k og ubelastet lengde R_0 . Den andre enden av fjæra er festet i et punkt S på et horisontalt glatt underlag slik at fjæra og kula kan rotere fritt i horisontalplanet. Fjæra med kula settes i rotasjon om S. Hvis kulas baneradius er R når vinkelfarta er ω (radianer per sekund) så er fjærstivheten

A: $k = \frac{m\omega^2}{1 - \frac{R_0}{R}}$

B: $k = \frac{m\omega^2}{1 + \frac{R_0}{R}}$

C: $k = \frac{m\omega^2}{1 - \frac{R}{R_0}}$

D: $k = \frac{m\omega^2}{1 + \frac{R}{R_0}}$

Løsning: Fjærkrafta er $k(R - R_0)$ og den må være lik sentripetalkrafta $mv^2/R = mR\omega^2$. Da er

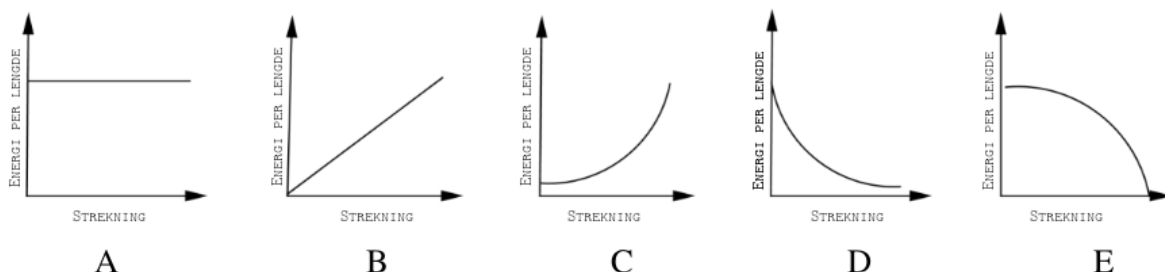
$$mR\omega^2 = k(R - R_0)$$

som vi løser og finner

$$k = \frac{m\omega^2}{1 - \frac{R_0}{R}}$$

Oppgave 18

Raske protoner blir bremsset ned i et homogent materiale. Vi antar at energitapet for hvert proton per tidsenhet er konstant. Hvilken av grafene nedenfor beskriver best avsatt energi per lengde som funksjon av tilbakelagt strekning i materialet?



Løsning: Deler vi partikkelbanen i et antall små, like lange intervaller, vil tida partikkelen befinner seg innenfor hvert intervall være omvendt proporsjonal med farten.

Etter hvert som farten avtar, vil protonet bruke lengre tid per lengdeenhet. Det vil si at avsatt energi per lengde er økende langs partikkelbanen. Dvs. alternativ B eller C. I figur B starter grafen i origo, og det betyr null energitap i det første lille intervallet. Det kan ikke være riktig. Alternativ C er riktig. Litt mer formelt kan vi også vise at grafen ikke kan være lineær. Endringen i kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2$ per tid er konstant. Det vil si

$$\frac{dK}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = C = \text{konstant.}$$

Det betyr at

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{mv}.$$

Derfor vil farten avta raskere og raskere, og tida innenfor hvert intervall vil også øke raskere og raskere. Avsatt energi per lengde, må derfor stige raskere etter hvert som farten avtar mot null. Grafen er altså ikke lineær.

Oppgave 19

Du står på taket av en høy bygning, i høyden h over bakken. Du slipper en ball vertikalt nedover (slik at den starter med null fart). Når ballen er halvveis på vei mot bakken (dvs den er i høyden $h/2$) kaster noen en annen ball vertikalt oppover fra bakken slik at begge ballene treffer bakken samtidig.

Med hvilken fart ble den andre ballen kastet?

A: $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\sqrt{gh}$

B: $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)\sqrt{gh}$

C: $\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}-1}\sqrt{gh}$

D: $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{gh}$

Løsning: Strekningen tilbakelagt av ball 1 etter tid t er $\frac{1}{2}gt^2$. Tida første ball bruker halvveis er da

$$t_{1/2} = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

og tida til den når bakken er

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Det betyr at ball 2 må bruke tida

$$t_2 = t_1 - t_{1/2} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{h}{g}}$$

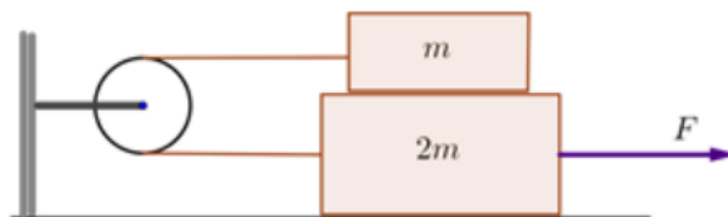
på å nå bakken. Hvis vi kaller startfarta til ball 2 v_0 er høyden til denne ballen ved en tid t etter at den ble kastet

$$y_2(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Den treffer bakken igjen når $y_2 = 0$ og for at dette skal skje ved tida t_2 må

$$v_0 = \frac{1}{2}gt_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\sqrt{gh}.$$

Oppgave 20



To klosser, med masser m og $2m$, er forbundet med en snor over en trinse slik figuren viser. Det er ingen friksjon i trinsa. Friksjonstallet mellom klossene og mellom underlaget og klossene er μ . Den nederste klossen trekkes med konstant fart mot høyre av en kraft F .

Hvor stor er F ?

A: $2\mu mg$

B: $3\mu mg$

C: $4\mu mg$

D: $5\mu mg$

Løsning: Det virker tre krefter mot venstre på klossen med massen $2m$. F er lik summen av disse siden farta er konstant. Friksjon fra øverste kloss er μmg , snordraget er μmg og friksjonen fra underlaget er $3\mu mg$. dermed er $F = 5\mu mg$.