

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag ACL, JB, TOBO, siste versjon 12.05.2025.
Rettelse fortegn på luftmotstandskraften, oppgave 2d), 26. mai
2025.

Sensorveiledning, siste versjon 11.06.2025.

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025

Dato: Mandag 26. mai 2025, kl. 15:00-19:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 5 sider (formelark bakerst på side 6 [ny versjon] og side 7 [gammel versjon for de som foretrekker den]).

Tillatte hjelpemidler:

Rottmann: "Matematisk formelsamling".

Elektronisk kalkulator av godkjent type.

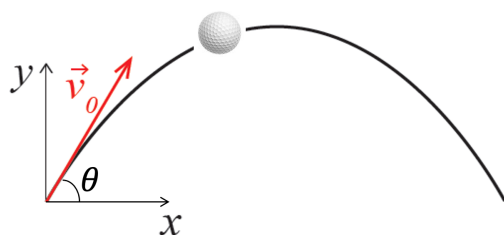
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes! Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Sensorveiledning: Alle deloppgaver gis maksimalt 5 poeng. Generelt gis lite eller ingen poeng for bare riktig svar uten noen begrunnelse. Det gis heller ikke poeng for å bare skrive opp noen likninger som kanskje er relevante uten å gjøre noe forsøk på å bruke dem eller tilpasse dem til det gitte problemet. Det gis poeng for en god ide til løsningsstrategi selv om denne ikke er fullført. Følgefeil skal det ikke trekkes for. I oppgaver med tallsvar skal det brukes et fornuftig antall gjeldende siffer, men vi kan gi full uttelling for svar med ett siffer mer eller mindre enn i løsningsforslaget. Vi trekker heller normalt ikke dersom forskjeller i numerisk verdi skyldes at det er rundet av mer eller mindre i mellom svar eller mellomregninger.

Oppgave 1 Spille golf

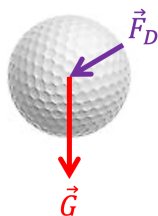
En golfspiller slår en golfball og får til “hole-in-one”, altså at ballen lander i hullet med bare ett slag. Golfballen slås slik at den får en initialhastighet $\vec{v}_0$ som danner en vinkel θ med horisontalen, se illustrasjon. Vi legger origo i startposisjonen til golfballen, med x -aksen langs horisontalen og y -aksen i vertikal retning.

Merk: Fra og med deloppgave b) antar vi at luftmotstanden er neglisjerbar.



- (a) Tegn et frilegemediagram på golfballen når den er i posisjonen på banen som vist i figuren. Husk å navngi alle krefter.

Løsning: Det virker to krefter på ballen: tyngdekraft $\vec{G}$ og luftmotstand $\vec{F}_D$ som virker motsatt retning av hastighetsvektor.



Sensorveiledning: Det trekkes 3p hvis krefter ikke er navngitt. Trekker 1p dersom luftmotstanden er kun i negativ x -retning (ballen er ikke på toppen av banen ennå). Trekker 2p for å ha med en kraft fra kølla eller andre krefter som ikke skal være med.

Vi trekker ikke om de har tegnet inn $\vec{v}$ i figuren, selv om den ikke er en kraft og dermed egentlig ikke skal være med i et frilegemediagram. Trekker 2p dersom luftmotstanden ikke er motsatt $\vec{v}$ (f.eks. med positiv vertikalkomponent). Trekker bare 1p dersom det er mulig det bare er slurv i tegninga at den ikke er motsatt.

- (b) Vi antar nå at luftmotstanden er neglisjerbar. Finn et uttrykk for golfballens hastighet $\vec{v}$ som funksjon av tid t , startfarten $v_0 = |\vec{v}_0|$ og utgangsvinkelen θ . Du kan oppgi $\vec{v}$ på vektorform eller på komponent-form.

Løsning: Siden vi ser bort fra luftmotstand er det nå kun tyngdekraften som virker på ballen, dvs. konstant akselerasjon $a_y = -g$ i y -retning og ingen akselerasjon i x -retning: $a_x = 0.0 \text{ m/s}^2$. På komponentform:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \theta = \text{konst.}$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - gt$$

På vektorform:

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \theta - gt) \hat{\mathbf{j}}$$

Evt:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{G}}{m}t$$

hvor m er golfballens masse, $\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$, og $\vec{G} = -mg \hat{\mathbf{j}}$.

Sensorveiledning: Det gis 1p for kun å dekomponere $\vec{v}_0$.

- (c) Vis at golfballen bruker en tid

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} \sin \theta$$

på å lande i golfhullet (ved høyde $y(t_1) = 0.0 \text{ m}$).

Løsning: Fra bevegelsesligningene for konstant akselerasjon:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow y(t_1) = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0$$

$t_1 = 0$ svarer til startøyeblikket, og vi er interessert i den andre løsningen

$$t_1 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g} \sin \theta.$$

Sensorveiledning: 3p for å finne $y(t)$. 2p for å løse $y(t_1) = 0$ og finne t_1 . Trekker 1p dersom de ikke forklarer at løsningen $t_1 = 0$ svarer til starten og det er den andre løsningen som er riktig.

Denne oppgaven kan også løses ved å bruke at banen er symmetrisk, og dermed er $v_y(t_1) = -v_y(0)$. Dette kan evt argumenteres for ved energibevaring, men det trekkes 3p hvis det er sett på som en 1D-bevegelse i y , og ikke forklart at energibidraget fra v_x er konstant.

- (d) Vis at strekningen mellom utslagsstedet (origo) og golfhullet, som er i posisjon $x_1 = x(t_1)$, er gitt ved

$$x(t_1) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta).$$

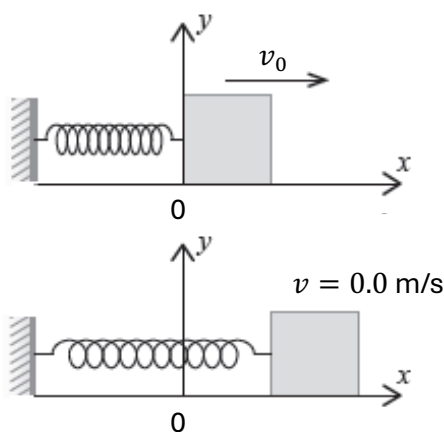
Løsning: Igjen bruker vi bevegelsesligningene, i x -retning er det konstant hastighet og vi får

$$x(t_1) = v_{0x}t_1 = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0}{g} \sin \theta = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos \theta \sin \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta).$$

Sensorveiledning: 2p for å finne $x(t)$, 2p for å sette inn t_1 , 1p for å få riktig svar.

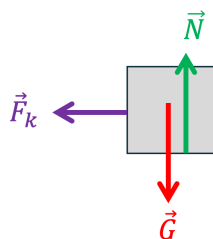
Oppgave 2 En kloss i en fjær

En kloss med masse m er festet til en masseløs fjær som følger Hookes lov, se figur. Klossen har fjærkonstant k . Klossen befinner seg på et friksjonsfritt, horisontalt underlag, og vi ser bort fra luftmotstand. Klossen starter i origo, dvs. i en x -posisjon $x_0 = 0.0$ m med en initialfart v_0 i positiv x -retning. Når klossen er i posisjon x_0 , er fjæren verken strukket eller komprimert.



- (a) Tegn et frilegemediagram for klossen når fjæren er maksimalt strukket ut, som vist i den nedre delen av figuren. Husk å navngi alle krefter.

Løsning: I vertikal retning har vi normalkraft $\vec{N}$ fra gulvet på klossen og tyngdekraft $\vec{G}$, og i horisontal retning fjærkraften $\vec{F}_k$. Normalkraften er like stor og motsatt rettet som tyngdekraften.



Sensorveiledning: Det trekkes 2p dersom fjærkraften ikke er med.

(b) Vis at klossens bevegelse kan beskrives ved følgende differensialligning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Løsning: Fra Newtons 2. lov i x -retning:

$$\sum F_{ext,x} = ma_x = F_k \Rightarrow -kx = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Sensorveiledning: Her er det viktig å vise klart og tydelig hvordan diff-ligningen framkommer for å få full uttelling.

(c) Løs differensialligningen for å finne et uttrykk for posisjonen $x(t)$ til klossen.

Løsning: Dette er en 2.ordens homogen, lineær differensialligning med konstante koeffisienter. Den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Denne har to komplekse røtter som løsning:

$$\lambda_1 = +i\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Den generelle løsningen blir da

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Vi har initialbetingelsene $x(t=0) = x_0 = 0.0$ m og initialfart $v(t=0) = v_0$. Fra den første får vi

$$x(t=0) = C_1 = 0$$

og fra den andre (fra derivasjon av den generelle løsningen)

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 \Rightarrow C_2 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Da får vi den partikulære løsningen:

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Sensorveiledning: 1p for karakteristisk likning. 1p for riktige verdier av λ . 1p for generell løsning. 1p for riktig bruk av initialbetingelser. 1p for riktig svar.

Det er også helt fint å gjenkjenne harmonisk oscillator (står også i Rottmann) for så å gå direkte til den generelle løsningen.

- (d) Vi ønsker nå å ta hensyn til luftmotstanden, og vi modellerer luftmotstandskraften som $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ hvor D er en konstant. Hva blir differensialligningen som beskriver klossens bevegelse nå?
 [NB: manglet minus foran luftmotstanden i versjonen sendt til trykking.]

Løsning: Igjen fra Newtons 2. lov får vi

$$\vec{F}_k + \vec{F}_D = m\vec{a}.$$

Bevegelsen er i x -retning, og vi må passe på fortegn, luftmotstanden virker mot bevegelsesretningen:

$$-kx - D \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{D}{m} \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt} = 0.$$

Sensorveiledning: Trekker 1p dersom det mangler absoluttverdi. Trekker 1p dersom det ikke er gjort om fra $\vec{v}$ til $\frac{dx}{dt}$

- (e) Skissér en kode som løser denne differensialligningen numerisk. Det er ikke nødvendig å skrive hele programmet, det er nok å skrive opp initialbetingelsene og selve integrasjonsløkka. Begrunn ditt valg av numerisk metode.

Løsning: Skisse av kode:

```
x[0] = 0.0
v[0] = v0

for i in range(n-1):
    F_D = -D*v[i]*abs(v[i])
    F_k = -k*x[i]
    F_sum = F_D + F_k
    a = F_sum/m
    v[i+1] = v[i] + a*dt
    # Euler-Cromer
    x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt
    t[i+1] = t[i] + dt
```

Siden dette er en periodisk bevegelse er det lurt med Euler-Cromer-metoden i stedet for f.eks. forward Euler, fordi Euler-Cromer-metoden gir en mer stabil og presis løsning. Grunnen er at Euler-Cromer-metoden av og til “tar for mye” og av og til “tar for lite”, mer presist så er Euler-Cromer (nesten) energi-bevarende, og i gjennomsnitt over en lengre tidsperiode blir feilen mye mindre med denne metoden enn for forward-Euler, hvor feilen akkumuleres mye raskere. Lenke til Alan Cromers artikkel:

<https://liceocuneo.it/oddenino/wp-content/uploads/sites/2/Alan-Cromer-Stable-solutions.pdf>

Sensorveiledning: Det trekkes 1p dersom akselerasjonen er feil her. Generelt: 1p for riktige initialbetingelser, 1p for riktig akselerasjon, 1p for numerisk metode, 2p for begrunnelse av metode.

Oppgave 3 Fermi-paradokset

Det såkalte Fermi-paradokset er ett av de mest berømte størrelsesorden-estimatene. Her ser man på en tilsynelatende motsigelse: sannsynligheten for at et betydelig antall intelligente sivilisasjoner eksisterer i vår galakse (og i universet) er relativt stor, men likevel har vi så langt ikke oppdaget noen andre intelligente sivilisasjoner. I et forsøk på å estimere denne sannsynligheten, publiserte Frank Drake den følgende ligningen i 1965:

$$N = R^* \cdot f_p \cdot n_e \cdot f_l \cdot f_i \cdot f_c \cdot L,$$

hvor symbolene betyr:

- N er antall teknologisk avanserte sivilisasjoner i Melkeveien hvor kommunikasjon med oss kan være mulig.
- R^* er den gjennomsnittlige raten av stjernedannelse i Melkeveien, $R^* \approx 1.5 - 3$ stjerner per år.
- f_p er andelen av disse stjernene som har planetsystemer. Det ser ut som mange stjerner har planeter, så vi kan anta $f_p \approx 0.5 - 1$.
- n_e er andelen planeter per solsystem som har et miljø som passer for organisk liv, $n_e \approx 3 - 5$, men har også et estimat så lavt som $n_e = 0.2$.
- f_l er andelen av disse passende planetene hvor det faktisk er organisk liv, $f_l \approx 1$.
- f_i er andelen av planeter hvor *intelligent* liv utvikles; denne faktoren er svært kontroversiell og usikker, et estimat er $f_i = 0.0002$, et annet er $f_i = 1$.
- f_c er andelen av sivilisasjoner som når et høyt nok teknologisk nivå til å sende signaler som kan detekteres av andre sivilisasjoner, og denne er også svært usikker, men et estimat er $f_c = 0.2$.
- L er hvor lenge disse sivilisasjonene sender ut signaler i verdensrommet, estimert til ≈ 420 år, men kan også være så lang tid som 10^9 år.

Det er spesielt de siste fire faktorene som er svært usikre. Basert på disse tallene, hva er den største og den minste verdien N kan ha? Hva tenker du er årsaken(e) til at de siste fire faktorene er usikre?

Løsning: Med de gitte tallene er den minste verdien

$$N_{\min} = 1.5/\text{år} \cdot 0.5 \cdot 0.2 \cdot 1 \cdot 0.0002 \cdot 0.2 \cdot 420 \text{ år} = 0.00252 \approx 3 \cdot 10^{-3}.$$

Den største verdien er

$$N_{max} = 3/\text{år} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0.2 \cdot 10^9 \text{ år} = 3 \cdot 10^9.$$

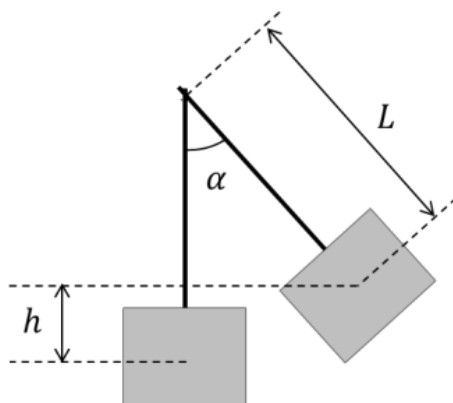
Det er altså 12 størrelsesordener forskjell på det minste og det største estimatet. Det minste hinter til at vi er sannsynligvis den eneste sivilisasjonen i vår galakse, mens det største indikerer at det er mange sivilisasjoner som vi muligens kan komme i kontakt med. Hovedproblemet ligger i de faktorene hvor vi ikke har data, eller hvor vi kun har ett datapunkt. For eksempel så har vi kun med sikkerhet påvist liv (og intelligent liv) på Jorda, og tallene for f_c og L er egentlig rene gjetninger, igjen (delvis) basert på ett datapunkt, nemlig Jorda og den menneskelige sivilisasjon.

Sensorveiledning: 2p for å gange sammen tallene riktig. 3p for å forklare at vi ikke har noe data for de siste 4 punktene.

Oppgave 4 Ei kule og en trekubbe

Sensorveiledning: Dette oppgaven var gitt som en gruppeoppgave (G9.1 uke 9)

En trekubbe på 5.00 kg henger i en 1.00 m lang snor som har neglisjerbar masse. Du skyter ei kule med masse $m = 10.0$ g horisontalt inn i kubben med hastighet $v = 400$ m/s. Kula setter seg fast inne i trekubben i kollisjonen, og trekubben svinger opp. Vi ser bort fra luftmotstand.



- (a) Hvor mye kinetisk energi K har kula før kollisjonen?

Løsning: Kulas masse er m og den kinetiske energien er

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 800 \text{ J}.$$

Sensorveiledning: 2p for $\frac{1}{2}mv^2$, 3p for riktig utregning. Det trekkes også 1p dersom svaret oppgis med kun ett gjeldende siffer. Trekker 1p for feil enhet.

- (b) Hvor mye kinetisk energi K_1 har trekubben og kula etter kollisjonen?

Løsning: Kollisjonen er fullstendig uelastisk, så vi kan ikke bruke bevaring av mekanisk energi. Siden det er ingen ytre krefter i horisontal retning er bevegelsesmengde under kollisjonen bevart, $mv = (m + M)V$, hvor M er massen til trekubben, og V er den felles hastigheten til trekubben og kula etter kollisjonen. Vi finner farta

$$V = \frac{m}{M + m}v = 0.800 \text{ m/s.}$$

og den kinetiske energien

$$K_1 = \frac{1}{2}(m + M)V^2 = 1.60 \text{ J.}$$

Sensorveiledning: Det gis 0p for bevaring av kinetisk energi eller bevaring av mekanisk energi her. Trekker 1p om massen til klossen glemmes i utregning av K_1 til slutt. Gir 2p dersom kun den nye farta regnes ut.

Trekker 1p dersom det ikke er begrunnet at driv er bevart (ingen ytre krefter i horisontal retning).

- (c) Hvilken vinkel α (se figur) får vi når trekubben med kula når sin maksimale høyde?

Løsning: Etter kollisjonen svinger trekubben opp. Siden vi ser bort fra luftmotstand er mekanisk energi bevart *etter kollisjonen* siden gravitasjon er en konservativ kraft, og snordraget står vinkelrett på bevegelsesretningen og gjør ikke noe arbeid. Bevaring av mekanisk energi gir $K_1 = (m + M)gh$, og dermed er høyden

$$h = \frac{K_1}{(m + M)g} = \frac{V^2}{2g} = 0.0330 \text{ m.}$$

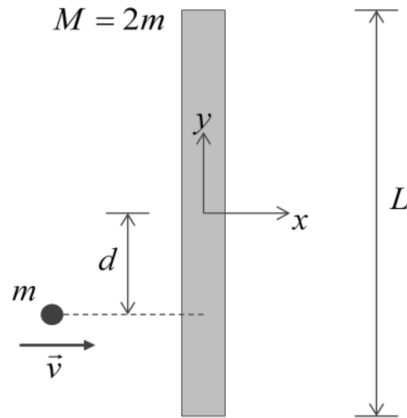
Vi har at $h = L(1 - \cos \alpha)$ slik at vinkelen blir

$$\alpha = \arccos(1 - h/L) = 14.8^\circ.$$

Sensorveiledning: Det er også helt fint å oppgi svaret i radianer ($\alpha = 0.258 \text{ rad}$). Det gis 2p for riktig geometrisk uttrykk for vinkelen, 1p for mek.energi bevart og 2p for riktig utregning.

Oppgave 5 Ei kule og en stav

Ei kule med masse m skytes inn i en tynn, homogen stav med lengde L . Staven ligger på et horisontalt bord som har en friksjonsfri overflate, og vi ser også bort fra luftmotstand. Staven har masse M , som vi setter lik $M = 2m$. Kula treffer staven i en rett vinkel med fart v i en avstand d fra massesenteret til staven, se figur. Etter kollisjonen blir kula sittende fast inne i staven. Tykkelsen til staven er ubetydelig i forhold til lengden, og vi kan betrakte kula som en punktpartikkel. Vi legger origo til koordinatsystemet i massesenteret til staven som vist i figuren, hvor vi ser situasjonen ovenfra (z -aksen oppover er i vertikal retning).



- (a) Rett etter kollisjonen, hva er massesenteret $\vec{R}$ til systemet som består av kula pluss staven?

Løsning: Massesenteret er gitt ved

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

Både kula og stavens massesenter har x -koordinat lik null, og stavens massesenter har også $y = 0$. Vi får:

$$\vec{R} = 0 \cdot \hat{i} + \frac{2m \cdot 0 - md}{2m + m} \hat{j} + 0 \cdot \hat{k} = -\frac{1}{3}d \hat{j}.$$

Sensorveiledning: Det trekkes 1p om fortegn ikke er med (og heller ikke beskrevet med ord). Det gis maks 2p hvis massesenteret til staven ikke er i origo, tilsvarer 1p for riktig formel og 1p for riktig plassering av kula.

- (b) Finn hastigheten $\vec{V}$ som massesenteret av systemet kule pluss stav får etter kollisjonen.

Løsning: Siden det ikke er luftmotstand eller friksjon mellom overflaten og staven, er det ingen krefter i horisontal retning. I vertikal retning er det normalkraft og tyngde som utligner hverandre. Da er summen av de ytre kreftene null og fra massesentersetningen har vi bevaring av driv for massesenteret:

$$m\vec{v} = (m + 2m)\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{3}\vec{v}.$$

Sensorveiledning: Det trekkes 1p hvis bevaring av driv ikke begrunnes. Det gis 2p for begrunnet at driv er bevart, men feil i utregning. Det gis 0p for bevaring av mekanisk energi, mekanisk energi er ikke bevart i kollisjonen.

- (c) Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om en akse gjennom sitt massesenter er gitt ved $I = \frac{1}{12}ML^2$. Kula treffer staven i en avstand $d = \frac{1}{4}L$ fra midten av staven. Vis at treghetsmomentet til systemet kula pluss staven om en akse gjennom deres nye, felles massesenter er

$$I_{cm} = \frac{10}{3}md^2.$$

Løsning: Det totale treghetsmomentet er summen av treghetsmomentene til staven og til kula om massesenteret som befinner seg i avstand $\frac{1}{3}d$ fra sentrum av staven (fra oppgave a) og avstand $\frac{2}{3}d$ fra der kula sitter fast. Vi bruker parallellakse-teoremet for å beregne treghetsmomentene om massesenteret. Først ser vi på stavens treghetsmoment om det felles massesenteret:

$$I_{stav,cm} = \frac{1}{12}2mL^2 + 2m\left(\frac{1}{3}d\right)^2 = \frac{1}{6}m(4d)^2 + \frac{2}{9}md^2 = \frac{26}{9}md^2.$$

Så ser vi på kula, som regnes som en punktpartikkel, slik at treghetsmomentet er gitt ved:

$$I_{kule,cm} = m\left(\frac{2}{3}d\right)^2 = \frac{4}{9}md^2.$$

Tilslutt legger vi sammen og får:

$$I_{cm} = I_{stav,cm} + I_{kule,cm} = \frac{10}{3}md^2.$$

Sensorveiledning: Det gis 1p for parallellakse-teoremet. Det gis god uttelling for riktig utgangspunkt (3-4p) men hvor det går galt i utregningen.

- (d) Finn et uttrykk for vinkelhastigheten om massesenteret til systemet bestående av staven og kula. Beskriv bevegelsen med ord.

Løsning: Siden det ikke er noen netto kraft på systemet, er det ikke noe netto kraftmoment og spinn er bevart. Spinnet til kula rett før kollisjonen:

$$\vec{l}_{kule} = \vec{r}_{kule} \times m\vec{v}_{kule} = -\frac{2}{3}d\hat{j} \times mv\hat{i} = \frac{2}{3}dmv\hat{k}.$$

Etter kollisjonen har stav pluss kule et spinn i forhold til rotasjonsaksen som går gjennom massesenteret:

$$l_{cm} = I_{cm}\omega \Rightarrow \omega = \frac{l_{cm}}{I_{cm}} = \frac{\frac{2}{3}dmv}{\frac{10}{3}md^2} = \frac{v}{5d},$$

retning er i positiv z -retning,

$$\vec{\omega} = \frac{v}{5d}\hat{k}.$$

Vi ser altså at systemet får en translatorisk bevegelse i x -retning, siden massesenteret får en hastighet $\vec{V} = \vec{v}/3$ som vi fant i oppgave b), og i tillegg en rotasjonsbevegelse gitt ved vinkelhastigheten vi nettopp fant.

Sensorveiledning: Det gis 2p for spinnbevaring, 2p for utregning og 1p for beskrivelse av bevegelsen. Det gis 0p for bruk av mekanisk energibevaring, mekanisk energi er ikke bevart i kollisjonen

Oppgave 6 En partikkel som henfaller

En partikkel blir dannet i en kollisjon mellom høy-energetiske protoner i en partikkelakselerator. Etter at partikkelen er dannet, beveger den seg med en konstant, høy hastighet nær lysets hastighet før den henfaller. I et referansesystem som følger partikkelen (hvor partikkelen er i ro), har partikkelen en levetid τ . Du befinner deg i laboratoriet, og i laboratoriets referansesystem måler du at partikkelen henfaller etter å ha beveget seg en avstand d fra kollisjonspunktet. Vi har to hendelser: (1) partikkelen oppstår i kollisjonen; (2) partikkelen henfaller.

- (a) I hvilket referansesystem blir egentiden Δt_0 målt? Forklar også hvorfor dette referansesystemet er der hvor egentiden måles.

Løsning: Siden partikkelen er i ro i sitt referansesystem, og da måler tiden til de to hendelsene på samme sted, måler partikkelen egentiden $\tau = \Delta t_0$.

Sensorveiledning: Det gis 2p for riktig referansesystem og 3p for god forklaring.

- (b) Finn et uttrykk for hastigheten v til partikkelen i laboratoriesystemet som funksjon av avstanden d og konstantene τ og lysets hastighet c .

Løsning: Vi kaller laboratoriesystemet for referansesystem S og systemet hvor partikkelen er i ro for S' . I referansesystem S' er levetiden til partikkelen egentiden, $\tau = \Delta t_0 = \Delta t'$. I laboratoriesystemet S beveger partikkelen seg med hastighet v og levetiden er lengre på grunn av tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \gamma \tau.$$

I laboratoriesystemet S beveger partikkelen seg en strekning d og bruker da tiden $\Delta t = \gamma \tau$ for å bevege seg denne strekningen. Da får vi at hastigheten v er gitt ved:

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{\gamma \tau} = \frac{d}{\tau} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ v^2 \tau^2 &= d^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = d^2 - \frac{d^2}{c^2} \\ v^2 \left(\tau^2 + \frac{d^2}{c^2} \right) &= d^2 \\ v &= \frac{d}{\sqrt{\tau^2 + \frac{d^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Sensorveiledning: Det gis 1p dersom det er et forsøk på utregning med Lorentz-faktor. Bevegelsesligninger uten Lorentz gir 0p. Det gis 3p dersom uttrykket er satt opp riktig, men det går galt i utregning eller utregningen er ufullstendig (f.eks. v er fortsatt med på begge sider av likhetstegnet).

Eksamenssett slutt.