

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Midtveiseksamen FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2022

Dato: 14.10.2022 kl. 15:00 (3 timer)

Oppgavesettet er på: 20 flervalgsoppgaver.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator; Rottman: "Matematisk formelsamling"

Oppgave 1

En bil kjører rett fram på en horisontal vei med konstant fart. Hvilken retning har friksjonskrafta fra veien på bilen? Ta hensyn til luftmotstanden.

A: Mot bevegelsesretningen

B: I bevegelsesretningen

C: Den er null

D: Det avhenger av farten til bilen

Løsning: Det er to horisontale krefter, friksjonen og luftmotstanden. Luftmotstanden virker bakover (mot bevegelsesretningen). For at farta skal være konstant må summen av kreftene være null, og dermed må friksjonen virke framover.

Oppgave 2

Hva gjør friksjon?

A: Friksjon gjør at ting beveger seg saktere

B: Friksjon gjør at ting beveger seg fortere

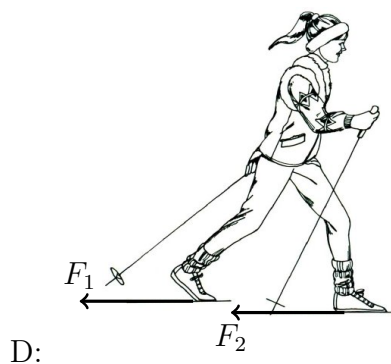
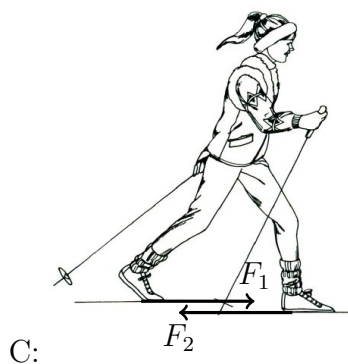
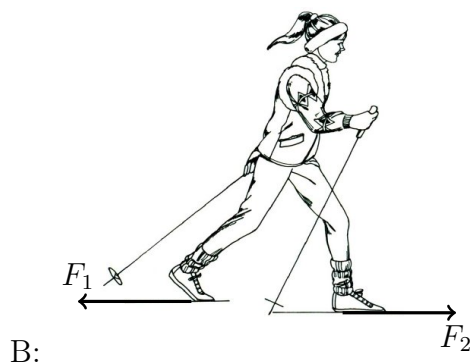
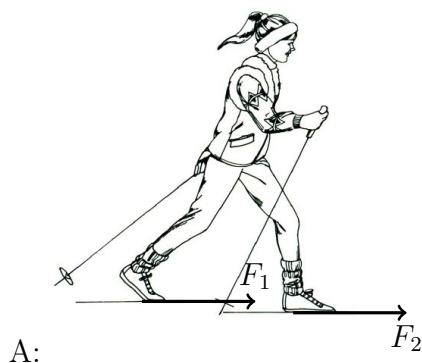
C: Friksjon kan gjøre begge deler (a og b)

D: Friksjon kan ikke gjøre noen av delene (verken a eller b)

Løsning: Friksjon kan gjøre at ting beveger seg saktere (bil som bremses) eller fortere (du som begynner å gå framover).

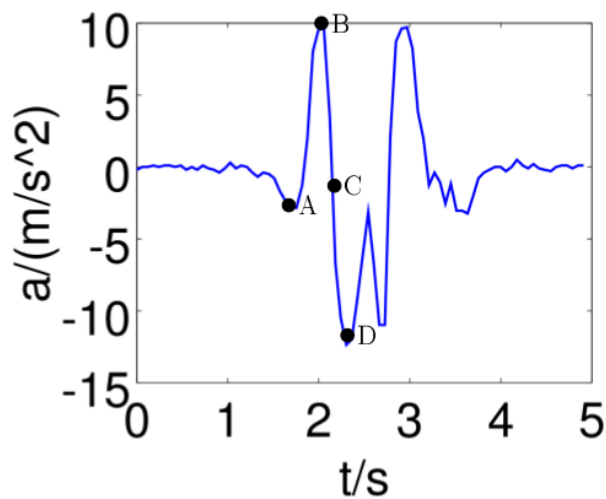
Oppgave 3

En person går på ski, og vi ser på et øyeblikk idet hun sparker fra med den ene skia og glir framover på den andre. Vi kaller friksjonskrafta på den skia som sparker fra F_1 og friksjonskrafta på den skia som glir F_2 . Hvilken figur viser best kreftene som virker på skia? For enkelhets skyld antar vi at stavene ikke blir brukt.



Løsning: Friksjonskrafta må virke bakover på den skia som glir og framover på den som sparker fra. Altså figur C.

Oppgave 4



Grafen viser akselerasjon som funksjon av tid når vi hopper rett opp og lander igjen. Vi skal markere det punktet på grafen som representerer det punktet der vi bøyer knærne mest under satsen (der tyngdepunktet er lavest). Hvilket av punktene er markert nærmest det riktige?

Løsning: B. Akselerasjonen er maksimal oppover når vi har knærne bøyd. A er når vi akselererer nedover for å ta sats, C er når krafta i beina blir lik med tyngdekrafta slik at vi ikke lengre akselererer, rett før vi mister kontakten med bakken, og D er når vi er i lufta, og $a = -g$.

Oppgave 5

Du kaster en ball rett opp og tar den imot igjen i samme høyden. Ballen bruker tida t_{opp} fra du slipper den og til den når det høyeste punket og tida t_{ned} fra det høyeste punktet og til du fanger den igjen. Hvis vi tar hensyn til luftmotstanden er

A: $t_{opp} > t_{ned}$

B: $t_{opp} = t_{ned}$

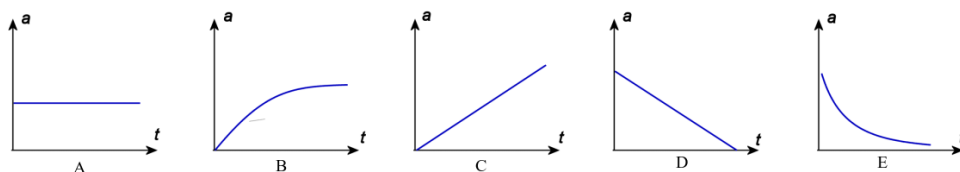
C: $t_{opp} < t_{ned}$

D: Det avhenger av startfarta hvilken tid som er størst

Løsning: Det virker to krefter på ballen, tyngden og luftmotstanden. På vei opp virker begge i samme retning, og akselerasjonen blir dermed stor. På vei ned virker de i motsatte retninger, og dermed blir akselerasjonen mindre. Dermed er $t_{opp} < t_{ned}$.

Oppgave 6

En ball blir sluppet fra ro og faller nedover. Det er luftmotstand. Hvilken av de følgende grafene viser best ballens akselerasjon som funksjon av tiden? Vi har valgt positiv retning nedover.



Løsning: Figur E. Akselerasjonen er stor i starten, og går så mot null etter som farta øker og luftmotstanden blir større.

Oppgave 7

En fotball sparkes fra bakken med en utgangsvinkel på ϕ . Ballsparket måles langs bakken til avstanden s . Finn et uttrykk for ballens største høyde h . Se bort fra luftmotstanden.

A: $h = \frac{1}{4}s \tan \phi$

B: $h = \frac{1}{4}s \cos \phi$

C: $h = \frac{1}{4}s^2 \sin \phi$

D: $h = \frac{s}{4g} \tan \phi$

Løsning: Vi velger origo i det punktet ballen sparkes fra, med x -aksen i den retningen ballen sparkes og y -aksen vertikalt opp. Vi dekomponerer starthastigheten og får at $v_{0x} = v_0 \cos \phi$ og $v_{0y} = v_0 \sin \phi$. Dermed er

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \phi t \\y(t) &= v_0 \sin \phi t - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Ballen lander ved tida t_0 slik at $y(t_0) = 0$ som gir

$$t_0 = \frac{2v_0}{g} \sin \phi.$$

Strekningen er da

$$s = x(t_0) = \frac{2v_0^2}{g} \cos \phi \sin \phi$$

og høyden

$$h = y(t_0/2) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \phi.$$

Dermed er

$$\frac{h}{s} = \frac{1}{4} \tan \phi$$

som er alternativ A.

Vi kunne også sett at C og D har feil enhet. Vi vet også at om vi setter $\phi = 0$ må $h = 0$ siden ballen da sparkes horisontalt. Dette stemmer ikke med B, og dermed er A eneste mulighet.

Oppgave 8

To biler kjører på en rett vei. Den første kjører med konstant fart v_1 . Den andre står i ro i et kryss. Idet den første bilen passerer kjører den andre inn på veien, og akselererer med konstant akselerasjon a . Hvor stor må akselerasjonen være for at den akkurat skal ta igjen den første bilen ved neste kryss som er i avstanden x_0 fra det første?

A: $\frac{v_1^2}{x_0}$

B: $\frac{2v_1^2}{x_0}$

4 C: $\frac{v_1^2}{2x_0}$

D: $4\frac{v_1^2}{x_0}$

Løsning: Posisjonene til bilene er

$$\begin{aligned}x_1(t) &= v_1 t \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} a t^2.\end{aligned}$$

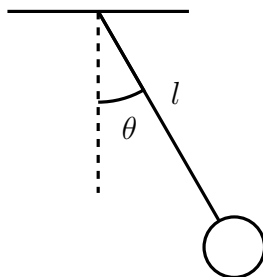
Den andre tar igjen den første ved tida t_0 som vi finner ved å sette $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ som gir

$$v_1 t_0 = \frac{1}{2} a t_0^2 \implies t_0 = \frac{2v_1}{a}.$$

Hvis dette skal skje i posisjonen x_0 må $x_1(t_0) = v_1 \frac{2v_1}{a} = x_0$ som gir

$$a = \frac{2v_1^2}{x_0}.$$

Oppgave 9



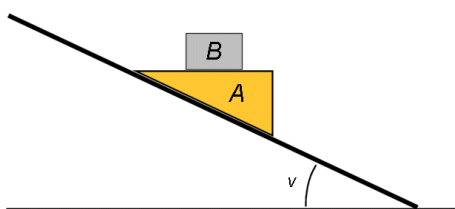
En pendel med lengden l slippes fra ro fra en stilling der vinkelen mellom pendelsnora og vertikalen er θ . Hvis vi ser bort fra luftmotstand, hva er farten idet den passerer bunnpunktet?

- A: $\sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$ B: $2gl \tan \theta$ C: $l^2/g \sin \theta$ D: $\sqrt{2gl(1 - \sin \theta)}$

Løsning: Vi må finne hvor høyt pendelen starter over bunnpunktet. Avstanden fra taket og ned til der den starter er $l \cos \theta$. Det betyr at den starter i høyden $h = l - l \cos \theta = l(1 - \cos \theta)$ over bunnpunktet. Så bruker vi bevaring av energi: $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ som gir $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$.

Vi kunne også sett på enhetene, da ser vi at alternativene A og D er de eneste som gir oss riktig enhet (m/s) for farta. Vi vet også at om vi setter $\theta = 0$, som betyr at vi starter rett ned, så må farta være 0. Dette får vi ikke med uttrykk D, og dermed er A riktig.

Oppgave 10



En trekantet kloss A glir uten friksjon nedover et skråplan med hellingsvinkel ν . En kloss B ligger oppå den horisontale flaten på A. Hva må friksjonstallet μ mellom A og B minst være for at B ikke skal gli når systemet glir nedover skråplanet?

- A: $\mu \geq \tan \nu$
B: $\mu \geq \tan \frac{\nu}{2}$
C: $\mu \geq 2 \tan \nu$
D: $\mu \geq \frac{1}{2} \tan \nu$

Løsning: Vi tenker først på begge klossene som ett legeme med massen $m = m_A + m_B$. Komponenten til tyngden parallelt med skråplanet er $mg \sin \nu$. Siden det ikke er friksjon mellom kloss A og skråplanet, gir det en akselerasjon $a = g \sin \nu$ for bevegelsen langs skråplanet. Vi dekomponerer denne i en horisontal komponent $a_x = a \cos \nu = g \cos \nu \sin \nu$ og en vertikal komponent $a_y = g \sin^2 \nu$. Vi kaller friksjonskrafta mellom klossene F_x og normalkrafta N . Newtons 2. lov for kloss B gir da

$$\begin{aligned} m_B a_x &= m_B g \cos \nu \sin \nu = F_x \\ m_B a_y &= m_B g \sin^2 \nu = m_B g - N \end{aligned}$$

Vi vet at $F_x \leq \mu N$ og det betyr at

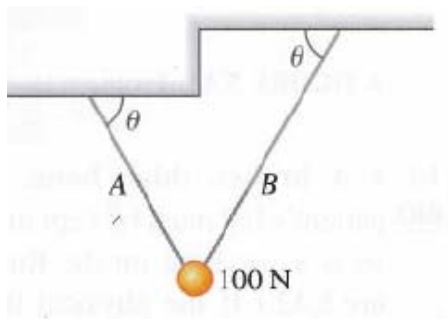
$$m_B g \cos \nu \sin \nu \leq \mu m_B g - \mu m_B g \sin^2 \nu$$

som gir

$$\mu \geq \tan \nu.$$

Oppgave 11

Ei kule med tyngden 100 N blir holdt opp av 2 lette snorer som vist på figuren. Hva kan vi si om snordraget i disse tauene?

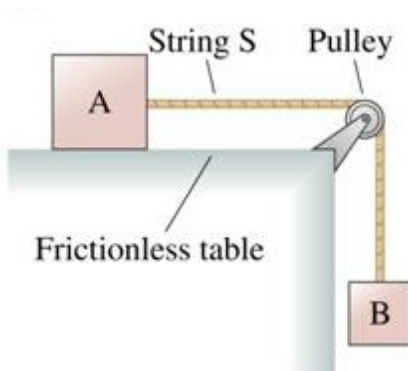


- A: Snordraget er på hvert av tauene 50 N
- B: Snordragene er like, men hver mindre enn 50 N
- C: Snordragene er like, men hver større enn 50 N
- D: Snordragene er begge 100 N

Løsning: Forskjellen i takhøyde har ingen betydning så lenge vinklene er like på begge sider. Snordragene er dermed like, og begge må ha en vertikalkomponent på 50 N for å balansere tyngden. Dermed må snordragene være større enn 50 N.

Oppgave 12

To klosser med massene m_A og m_B er forbundet med ei snor som vist på figuren. Hva er snordraget S ? Anta at det ikke er noen friksjon eller luftmotstand og at trinsa og snora er tilnærmet masseløse.



A: $S = m_A g$

B: $S = m_B g$

C: $S = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g$

D: $S = \frac{m_A m_B}{m_A - m_B} g$

Løsning: Newtons 2. lov på kloss A i horisontal retning og kloss B i vertikal retning er

$$S = m_A a \quad (1)$$

$$m_B g - S = m_B a. \quad (2)$$

Her har vi valgt positiv retning mot høyre for A og nedover for B. Vi vet at akselerasjonen a er like stor for begge, fordi avstanden langs snora er konstant (snora er stram hele tida). Vi løser de to likningene for

$$S = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g$$

Oppgave 13

En fugl på 1 kg står i en lukket kasse på 10 kg som står på en vekt. Vekten viser 11 kg. Fuglen hopper opp i luften og flyr i en konstant høyde inne i kassen. Mens fuglen er oppe i luften så viser vekten normalkrafta N som er

A: $N > 11 \text{ kg}$

B: $N = 11 \text{ kg}$

C: $10 \text{ kg} < N < 11 \text{ kg}$

D: $N = 10 \text{ kg}$

E: $N < 10 \text{ kg}$

Løsning: Siden fuglen har konstant høyde må det virke en kraft fra lufta på den som er like stor som tyngden. Da virker det en like stor kraft ned fra fuglen på lufta. For at lufta ikke skal akselerere nedover må det virke en like stor kraft opp fra gulvet på lufta. Dermed er det også en like stor kraft ned fra lufta på gulvet, og vekta viser fortsatt $N = 11 \text{ kg}$.

Oppgave 14

To klosser A og B med massene henholdsvis m og $2m$ ligger på et flatt bord, og de er forbundet med en tynn tråd. Vi ser bort fra friksjonen mellom klossene og bordet. Tråden tåler 10 N før den ryker. Hvor stor kraft kan vi dra i kloss B (den med massen $2m$) uten at tråden ryker?

A: 10 N

B: 20 N

C: 30 N

D: 40 N

Løsning: Hvis krafta vi trekker med er F og akselerasjonen a vet vi at Newtons 2. lov for begge klossene samlet gir $F = 3ma$ slik at $a = F/3m$. Hvis vi kaller snordraget i snora mellom klossene S og bruker Newtons 2. lov på A har vi $S = ma = F/3$. Hvis $S = 10 \text{ N}$ er da $F = 30 \text{ N}$.

Oppgave 15

En person med massen m hopper strikkehopp fra ei bru. Den ene enden av strikken er festet til personen og den andre er festet til brua. Strikken har lengden L når den ikke er strukket. Vi antar at forlengelsen av strikken er proporsjonal med strekkraften og proporsjonalitetskonstanten er k . Den største farten v som personen får under hoppet er

A: $v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}$

B: $v = \sqrt{2gL}$

C: $v = g\sqrt{\frac{m}{k}}$

D: $v = \frac{mgL}{2k}$

Løsning: Vi velger positiv retning ned og nullpunkt for potensiell energi der hoppet starter. Da er potensiell energi i avstanden h under brua

$$U = -mgh + \frac{1}{2}k(h - L)^2.$$

Siden den totale mekaniske energien er bevart og lik null må den kinetiske energien være

$$K = -U = mgh - \frac{1}{2}k(h - L)^2.$$

Denne er størst når

$$\frac{dK}{dh} = mg - k(h - L) = 0,$$

som betyr at $h = L + mg/k$. Farta er da

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}$$

Oppgave 16

Du skyter et prosjektil med massen m vertikalt opp fra månen der det ikke er noen luftmotstand. Det starter ved bakkenivå med hastighet v_0 , og vi velger månens sentrum som origo, med y -aksen pekende gjennom oppskytningspunktet og vertikalt oppover. Månens radius er R og massen M . G er gravitasjonskonstanten og g er tyngdeakselerasjonen ved overflaten. Hvilken differensiallikning beskriver prosjektillets bevegelse? (Minner om at $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ og $\ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$).

A: $m\ddot{y}(t) + gy(t) = 0$ med $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = v_0$

B: $m\ddot{y}(t) - G\frac{Mm}{y(t)^2} = 0$ med $y(0) = R$ og $\dot{y}(0) = v_0$

C: $m\ddot{y}(t) + G\frac{Mm}{y(t)^2} = 0$ med $y(0) = R$ og $\dot{y}(0) = v_0$

D: $m\ddot{y}(t) - G\frac{Mm}{y(t)^2} = 0$ med $y(0) = R$ og $\dot{y}(0) = 0$

E: $m\ddot{y}(t) + G\frac{Mm}{y(t)^2} = 0$ med $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = 0$

Løsning: Bare B og C har riktige initialbetingelser. Tyngdekrafta skal virke nedover, og må altså være negativ. Dermed er C riktig.

Oppgave 17

Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin(2x + \pi/2)$?

A: $1 - 2x^2$

B: $1 - x^2/2$

C: $2x$

D: $2x - \frac{4}{3}x^3$

E: $1 - x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$

Løsning: Vi kan bruke Taylors formel, og trenger

$$f'(x) = 2 \cos(2x + \pi/2) \quad f'(0) = 0 \quad (3)$$

$$f''(x) = -4 \sin(2x + \pi/2) \quad f''(0) = -1 \quad (4)$$

$$f'''(x) = -8 \cos(2x + \pi/2) \quad f'''(0) = 0. \quad (5)$$

Dermed er

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - 2x^2.$$

Alternativt kan vi bruke at

$$\sin(2x + \pi/2) = \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} = 1 - 2x^2.$$

der vi har brukt at vi kjenner Taylorrekka til $\cos x$.

Oppgave 18

Løsningen av differensialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0$$

med initalbetingelsene $x(0) = 4$, $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = -8$ er gitt ved

A: $x(t) = 5e^{-5t} + 3e^t$

B: $x(t) = 2e^{5t} + 2e^t$

C: $x(t) = 2e^{-5t} + 2e^t$

D: $x(t) = 5e^t - e^{-5t}$

E: $x(t) = 4e^t$

Løsning: Vi tipper en løsning på formen $e^{\lambda t}$ og finner den karakteristiske likninga $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ med løsninger $\lambda = -5$ og $\lambda = 1$. Dermed er den generelle løsninga

$$x(t) = Ae^{-5t} + Be^t.$$

Vi bruker så initialbetingelsene

$$\begin{aligned}x(0) &= A + B = 4 \\x'(0) &= -5A + B = -8\end{aligned}$$

som gir $A = B = 2$. Løsninga er derfor

$$x(t) = 2e^{-5t} + 2e^t.$$

Alternativt kan vi lett sjekke at bare C stemmer med de gitte initialbetingelsene.

Oppgave 19

En kloss med massen m ligger på et bord. Vi prøver å trekke klossen bortover med en fjær med fjærkonstanten k . En stund vil klossen holdes tilbake av friksjonen, før den plutselig løsner og glir bortover et stykke for så å stoppe igjen. Anta at vi trekker langsomt slik at endepunktet til fjæra ikke beveger seg mens klossen glir. Hvor langt beveger klossen seg før den stopper? Den statiske friksjonsfaktoren er μ_s og den dynamiske μ_k .

A: $\frac{2mg}{k}(\mu_s - \mu_k)$

B: $\frac{mg}{k}(\mu_s - \mu_k)$

C: $\frac{2mg}{k}(2\mu_s - \mu_k)$

D: $\frac{mg}{k}(2\mu_s - \mu_k)$

Løsning: Vi kaller forlengelsen til fjæra idet klossen begynner å gli x_0 . Da vet vi at $kx_0 = \mu_s mg$ eller $x_0 = \mu_s mg/k$. Den potensielle energien er da $U_0 = \frac{1}{2}kx_0^2$. Når klossen har flyttet seg til posisjonen x er den potensielle energien $U = \frac{1}{2}kx^2$ og friksjonen har gjort et arbeid $W = \mu_k mg(x_0 - x)$. Klossen stopper når $U_0 = U + W$, som betyr

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu_k mg(x_0 - x)$$

som vi kan skrive om til

$$\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \mu_k mg(x_0 - x)$$

$$\frac{1}{2}k(x_0 + x)(x_0 - x) = \mu_k mg(x_0 - x)$$

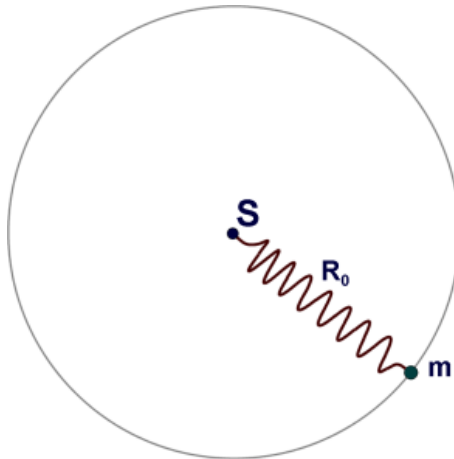
$$\frac{1}{2}k(x_0 + x) = \mu_k mg$$

$$x = \frac{2mg}{k}\mu_k - x_0$$

Strekningen den har beveget seg er da

$$d = x_0 - x = \frac{2mg}{k}(\mu_s - \mu_k).$$

Oppgave 20



En liten kule med massen m er festet i den ene enden av en masseløs fjær med fjærstivheten k og ubelastet lengde R_0 . Den andre enden av fjæra er festet i et punkt S på et horisontalt glatt underlag slik at fjæra og kula kan rotere fritt i horisontalplanet. Fjæra med kula settes i rotasjon om S med vinkelfart ω (radianer per sekund). Kulas baneradius R er da

A: $R = \frac{kR_0}{k-m\omega^2}$

B: $R = \frac{kR_0}{k+m\omega^2}$

C: $R = \frac{m\omega^2 R_0}{k-m\omega^2}$

D: $R = \frac{m\omega^2 R_0}{k+m\omega^2}$

Løsning: Fjærkrafta er $k(R - R_0)$ og den må være lik sentripetalkrafta $mv^2/R = mR\omega^2$. Da er

$$mR\omega^2 = k(R - R_0)$$

som vi løser og finner

$$R = \frac{kR_0}{k - m\omega^2}.$$