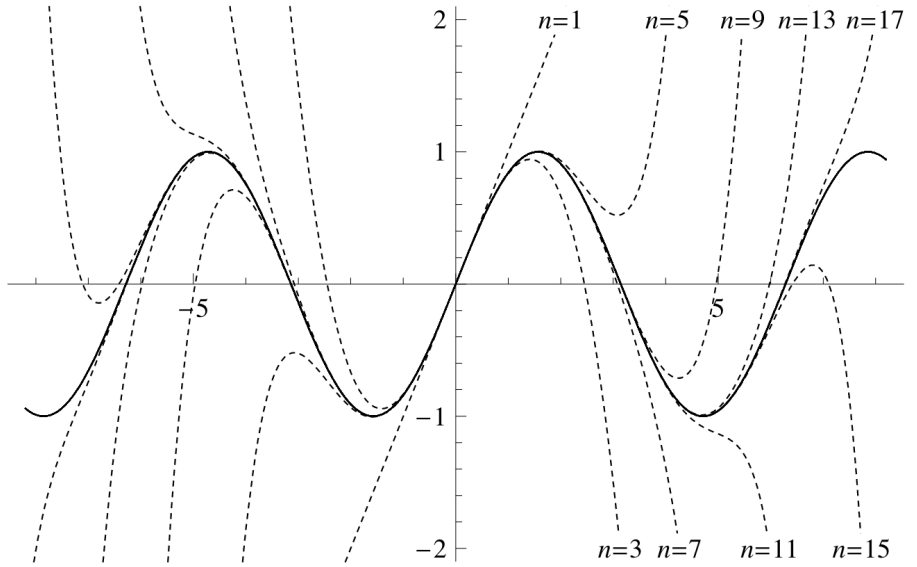
FYS1100 Mekanikk og modellering, høst 2026

Forelesning uke 7: Taylorrekker (litt repetisjon), svingninger. Analytisk løsning av 2.ordens diff-ligninger.

[Kalkulus 12.8 (Taylorrekker), 10.5 (2. ordens diff-lign.), AMS 9.3.2 (pendel), 5.7 (fjær)]

Læringsmål: Bruke ***Taylorrekker*** (Taylorpolynomer) for tilnærme funksjoner. Lære om ***analytisk løsning av 2. ordens diff-ligninger*** anvendt på ***harmoniske svingninger.***



Beskjeder:

- ✓ Jeg er vikar-foreleser for Joakim denne uka 😊
- ✓ Frist for oblig 3 er i dag (innlevering i Canvas)
- ✓ Eksperiment 1 gjennomføres i morgen på seminartimen for de som ikke har gjort det ennå
- ✓ Neste uke: midtveiseksamen fredag 09/10 kl.09:00-12:00 på Silurveien. Vær ute i god tid! (ingen undervisning i FYS1100 den uka)

3Blue1Brown-video (takk til Tor Ole 😊)

Mandag 28.09.2026 a.c.larsen@fys.uio.no

Utdrag fra formelarket, relevant for dagens temaer 👍

Taylor-rekke

til en funksjon $f(x)$ om funksjonsargumentet $x = a$

$$T_n(f;a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)\frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x-a)^2\frac{d^2f(x=a)}{dx^2} + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n\frac{d^nf(x=a)}{dx^n}$$

Restledd (MAT1100)

$$R_n(f;a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}f(x=\zeta)}{dx^{n+1}}$$

hvor $\zeta \in [x, a]$ er ukjent.

Differensialligninger

1. ordens separable lineære differensialligninger

$$q(x)\cdot\frac{dx}{dt} = p(t) \implies$$

$$\implies$$

med $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt}$

2. ordens homogene lineære differensialligninger med konstante koeffisienter

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$$

Karakteristisk ligning:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

med generelt to røtter λ_1 og λ_2

Generelle løsninger:

To reelle røtter

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$$

En reell rot

$$x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}$$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib,\ \lambda_2 = a - ib$

$$x(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$$

Taylorrekker: tilnærming til funksjoner [repetisjon]

💡 **Ideen bak:** vi kan *tilnærme* en vanskelig funksjon med en enklere funksjon 👍



Brook Taylor
(1685-1731)



Colin Maclaurin
(1698-1746)

Bilder fra Wikipedia

Taylorrekker: formalisme [repetisjon]

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Gitt en reell eller kompleks funksjon $f(x)$ som er uendelig mange ganger deriverbar i et område (intervall) rundt funksjonsargumentet $x = a$ hvor a er i intervallet, så er Taylorrekka til funksjonen gitt ved

$$T_n(f(x); x=a) = f(a) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\bigg|_{x=a}(x-a)^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\bigg|_{x=a}(x-a)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\bigg|_{x=a}(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}\bigg|_{x=a}(x-a)^n$$

Kortform:

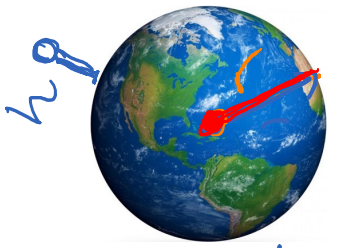
$$T_n(f(x); x=a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^kf}{dx^k}\bigg|_{x=a}(x-a)^k$$

n: graden

$f(x)$: funksjon vi vil tilnærme

a: "hvor" vi skal tilnærme $f(x)$

Eksempel: rekkeutvikling av potensiell energi



[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Gjenstand, masse m, høyde h

Nær jorda: ($h \ll r_0$): $U(h) = mgh$. Hvis $h \sim r_0$: $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

Avstand $r = r_0 + h$:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{(r_0+h)} = -\frac{GMm}{r_0}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{h}{r_0}\right)}$$

Rekkeutvikler om $x = a = \frac{h}{r_0}$: (Rottmann side 115):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \Rightarrow \frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \ldots$$

Setter inn:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r_0}\left[1 - \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - \ldots\right] = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMmh}{r_0^2}(+\ldots)$$

Potensiell energi relativt til bakkenivå:

$$U(h) = U(r) - U(r_0) = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMmh}{r_0^2} + \frac{GMm}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}mh = mgh$$

$-0!$:)

Eksempel: Taylorrekka til $\sin(x)$ rundt $x = 0$

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vår funksjon: $f(x) = \sin(x)$, $x = a = 0$

Deriverte: $\frac{df}{dx} = \cos(x)$, $\frac{d^2f}{dx^2} = -\sin(x)$, $\frac{d^3f}{dx^3} = -\cos(x)$

Rekkeutvikler:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\Big|_{x=0} x + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\Big|_{x=0} x^3 + \dots$$

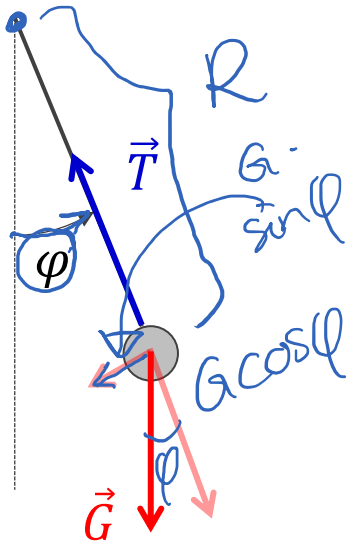
$$\approx 0 + x - 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$ (Rottmann s. 117)

Eksempel: pendelen på Fysisk institutt 🥰

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Krefter: snordrag $\vec{T}$, tyngdekraft $\vec{G}$





Radiell retning (Newtons 2. lov):

$$\sum F_{rad} = T - mg\cos\varphi = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R}$$

Tangentiell retning (Newtons 2. lov):

$$\sum F_t = -mg\sin\varphi = ma_t \Rightarrow \underline{a_t = -g\sin\varphi}$$

Pendelen beveger seg på en (del av en) sirkelbane: $\underline{v = R\omega}$, $\underline{a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha}$

α: vinkelakselerasjon, $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Løser for α: $\underline{\alpha} = \frac{a_t}{R} = \boxed{-\frac{g}{R}\sin\varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2}}$

2. ordens diff-lign

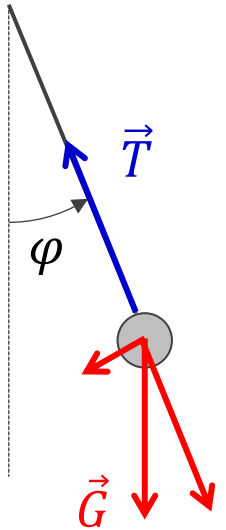
Eksempel: pendelen på Fysisk institutt 🥰

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Tangentiell akselerasjon: $a_t = -g\sin\varphi = \alpha R$

$\alpha R + g\sin\varphi = 0 \quad | : R$



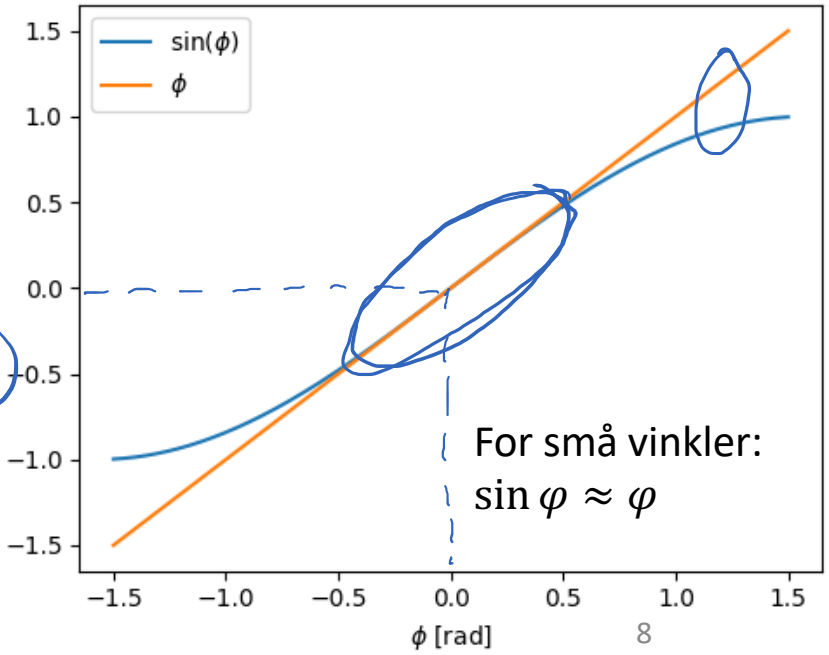
Differensialligning: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$

Utvikler $\sin\varphi$ i en Taylorrekke (gjelder for *små* vinkler):

$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$

$\Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$, kun for φ nær 0

(små utslag, liten startvinkel)

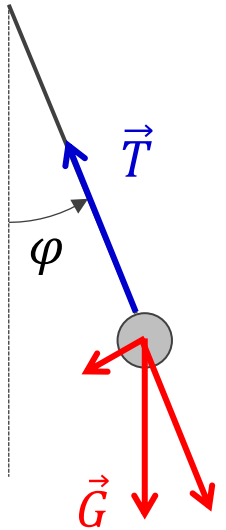


Tilnærming for *små* vinkler: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0$

Fellesoppgave: pendelen, analytisk løsning

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Differensialligning: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0$





Vi følger oppskriften fra formelarket:

$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0$

Kar. lign.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Vårt tilfelle:

$\lambda^2 + 0 + \frac{g}{R} = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{g}{R}}$

Formelark:

$\lambda_1 = a + ib$

$\lambda_2 = a - ib$

To komplekse røtter: $\lambda_1 = +i\sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{R}}$

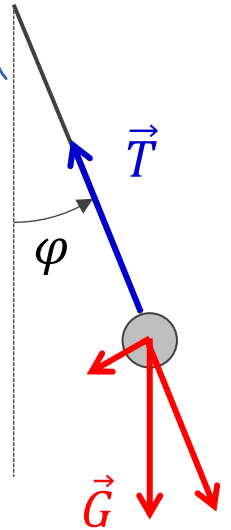
Generell løsn: $\varphi(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$

Naturlig (egen-)frekvens: $f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}, \quad \omega_e = \sqrt{\frac{g}{R}}$

Fellesoppgave: pendelen, analytisk løsning

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Differensialligning: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0$, $\omega_e = \sqrt{\frac{g}{R}}$





$\varphi(t) = C_1\cos(\omega_e t) + C_2\sin(\omega_e t)$

Vi finner konstantene fra initialbetingelsene:

$t_0 = 0$ s: maks utslag φ_0, momentant i ro

Setter inn: $\varphi(t_0) = C_1\cos(0) = C_1 = \varphi_0$

Deriverer $\varphi(t)$:

$$\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = \left[-C_1\omega_e\sin(\omega_e t) + C_2\omega_e\cos(\omega_e t)\right]_{t=0} = C_2\cdot\omega_e = 0$$

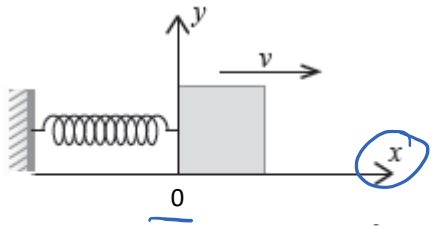
$\Rightarrow C_2 = 0$ (siden $\omega_e \neq 0$)

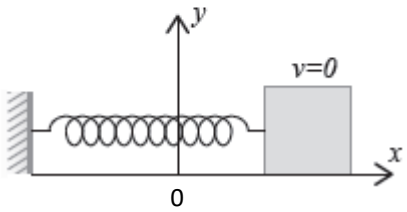
Spesiell (partikulær) løsning:

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_e t) = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$$

Eksempel: fjærkraft

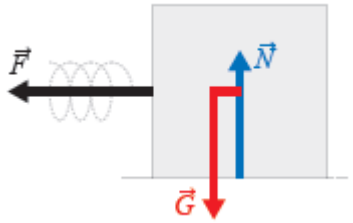
En masse m = 1.00 kg er festet til ei fjær med fjærkonstant k = 100 N/m og kan bevege seg på et bord uten friksjon og luftmotstand. Massen beveger seg med v_0 = 1.00 m/s ut fra likevektsposisjonen.





Kontaktkrefter:
- kraft F fra fjæra på massen
- normalkraft N fra bordet på massen

Langtrekkende kraft:
- gravitasjonskraft G



Normalkraft kompenserer gravitasjon: $\vec{N} = -\vec{G}$
$\Rightarrow$ ingen bevegelse i y-retning.

Kraft F fra fjæra på massen:

Hookes lov: $F(x) = \pm k\Delta x$; Δx: hvor mye fjæra er strukket eller kompr.

Vi definerer $x = 0$ i likevektsposisjon; hvis $x > 0$ trekker kraften i *negativ* x-retning: $F(x) = -kx$

Initialbetingelser: $x(t=0) = 0.00\,m$, $v(t=0) = 1.00\,m/s$

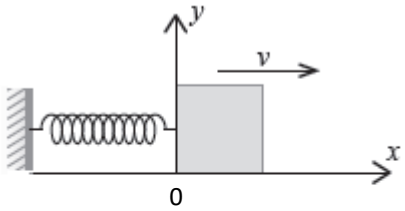
Newtons 2. lov: $\sum F_x = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

Fellesoppgave: fjærkraft, analytisk løsning

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Newtons 2. lov ga oss: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$



Vi følger oppskriften fra formelarket:

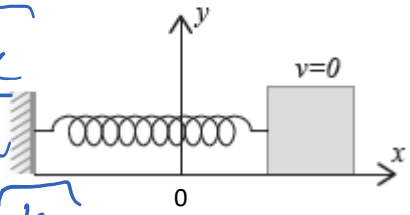
$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0$$

Kar. lign:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Vårt tilfelle:

$$\lambda^2 + 0 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}}$$



$$\Rightarrow \lambda_1 = +i\sqrt{\frac{k}{m}},\ \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Initialbetingelser:

$x(t_0) = 0$ m

$v(t_0) = 1$ m/s

Generell løsn: $x(t) = C_1\cos(\omega_e t) + C_2\sin(\omega_e t)$

Fra initialbet: $x(t=0) = C_1 = x_0 = 0$; $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = C_2\omega_e = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega_e}$

Partikulær løsning: $x(t) = \frac{v_0}{\omega_e}\sin(\omega_e t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

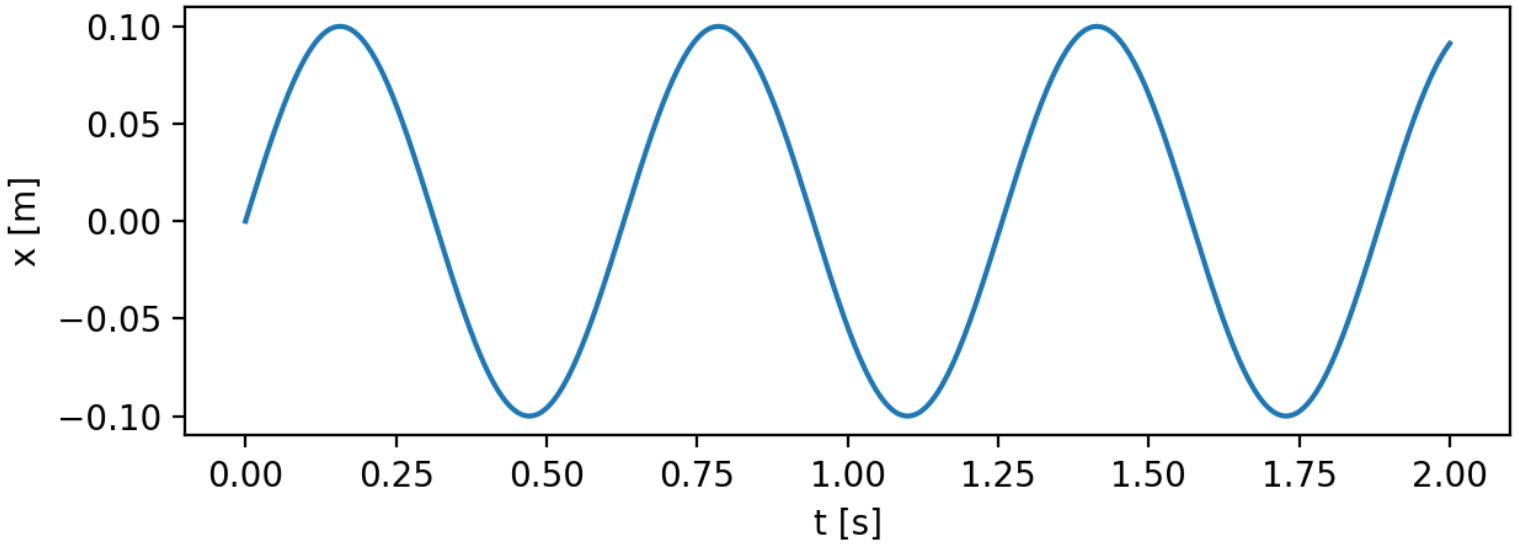
Svingefrekvens $\omega_e/2\pi$:
stiv fjær eller liten masse ⇒ rask svingning

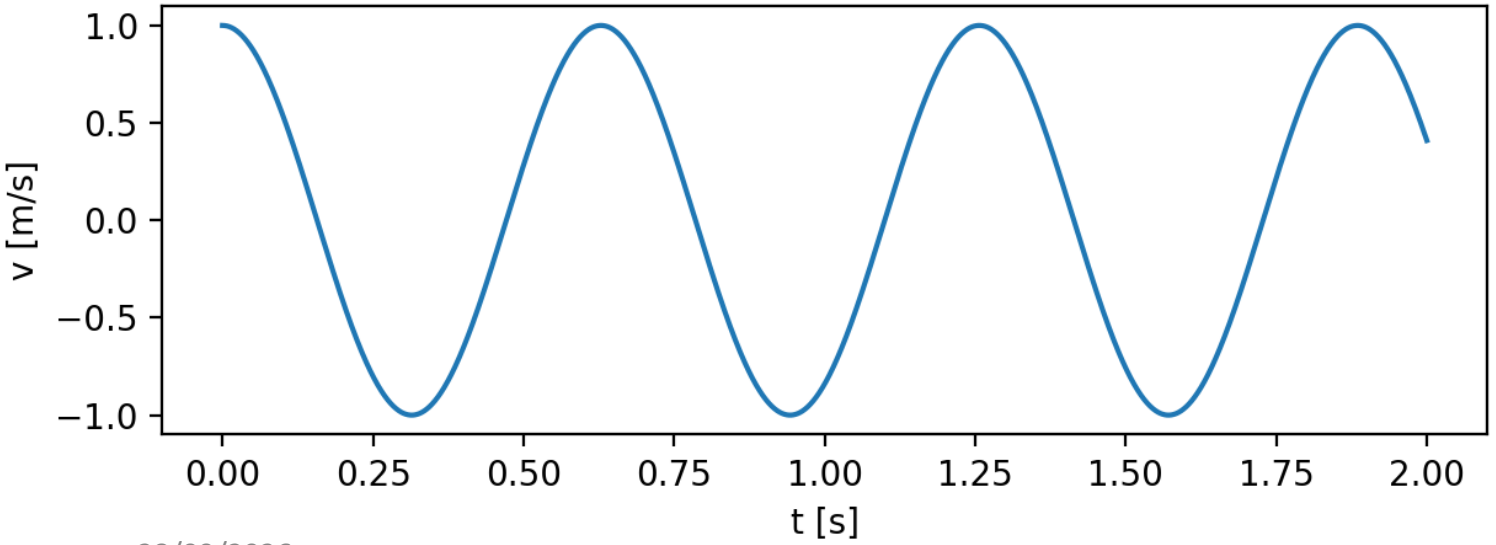
Amplitude C_2:
høy initialhastighet ⇒ stor amplitude (utslag)

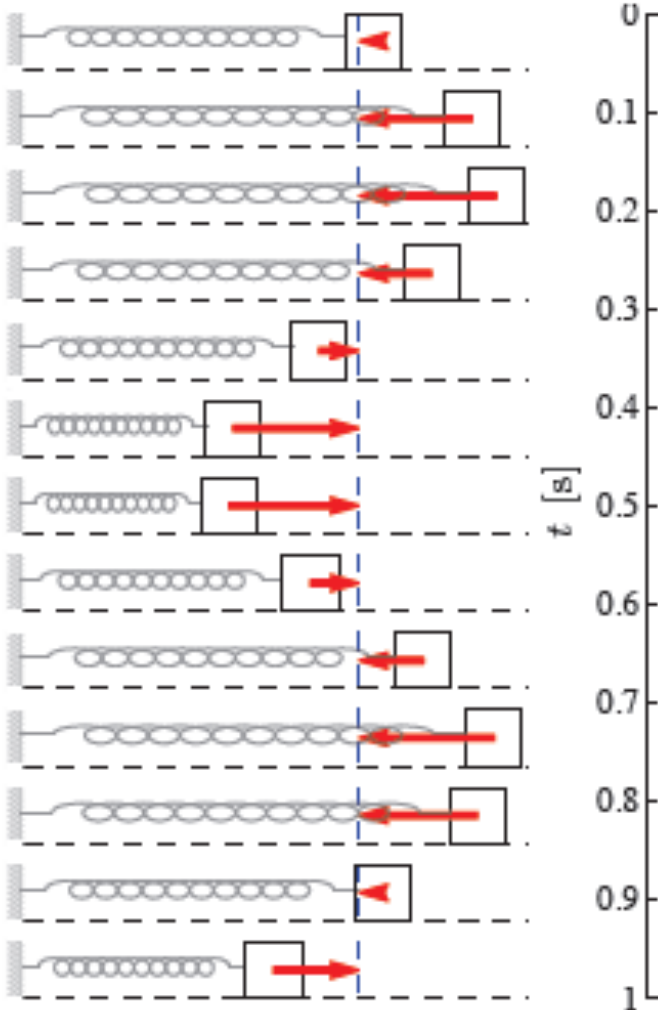
Fjærkraft, svingning (harmonisk oscillator)

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t)$$







Takk for i dag! 😀