Forelesningsnotater, FYS1100 uke 1

Joakim Bergli

1 Fermiproblemer

"Regler" for Fermiproblemer:

- Du skal bare tenke på størrelsesordenen, om svaret blir 5 ganger for stort eller lite spiller ingen rolle
- Det skal være enkel regning, helst som vi kan gjøre i hodet, kanskje med hjelp av papir og blyant. Kankulator er ikke lov
- Du skal ikke slå opp noen ting (ikke bøker, ikke tabeller ikke internett)
- Vi kan spørre hverandre og diskutere muligheter

Noen ganger må vi jukse og slå opp ett eller annet (men vi skammer oss litt hvis det trengs).

1.1 Eksempel: Hvor mange atomer er det på jorda?

Jeg vet:

- Jordas radius er $R = 6379$ km $\approx 6 \cdot 10^6$ m. [Hvis vi ikke vet det kan vi prøve å estimere, her er et forslag: Jeg vet det tar ca 6 timer å fly Oslo - New York. Farta til et rutefly er ca 1000 km/t, så strekninga må være ca 6000 km. Jeg tipper (har sett på verdenskart og globus) at det er ca 1/4 av veien rundt jorda, som dermed har omkrets $L = 24000$ km. Da blir radien $R = L/2\pi \approx 4000$ km.]
- 1 mol atomer er $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ atomer og veier ca 10 g $\approx 10^{-2}$ kg (bare lette atomer er nede i 1 g, og ganske tunge er oppe i 100 g).
- 1 liter vann veier 1 kg, som betyr en massetetthet på $\rho = 10^3$ kg/m^3. Jeg vet jo at stein er tyngre enn vann, men ikke størrelsesordner større, så vi bruker det også for stein.

Vi kan nå regne ut at massen til jorda er

$$M = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 216 \cdot 10^{18} \text{ kg} \approx 10^{24} \text{ kg}.$$

Her har vi brukt $\pi \approx 3$, $6^3 = 216$ og $4 \cdot 216 \approx 10^3$. Dermed er antal atomer

$$N = 10^{24} \text{ kg} \cdot 10^2 \text{ mol/kg} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ atomer/mol} = 6 \cdot 10^{49}.$$

Google sier at det er $13,3 \cdot 10^{49}$ atomer i jorda basert på hvor mye det er av de forskjellige grunnstoffene.

2 Dimensjonsanalyse

2.1 Hvor høyt går en ball med startfart v_0?

Dette spørsmålet kan vi svare skikkelig på om vi har lært om energibevaring (eller bevegelse med kosntant akselerasjon). Den kinetiske energien i starten er $\frac{1}{2}mv_0^2$ som gjøres om til potensiell energi mgh i toppen. Siden den totale energien er bevart er $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$, og dermed

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Målet for oss nå er å komme fram til formen på dette uttrykket (men ikke numeriske konstanter) uten å bruke noen fysiske lover, men bare ved å se på enhetene. Vi bruker notasjonen at om vi skriver en størrelse i firkantparenteser betyr det enheten til størrelsen. Så hvis høyden er h er $[h] = \text{m}$. Hvilke størrelser kan påvirke høyden?

- Massen m, $[m] = \text{kg}$.
- Tyngdeakselerasjonen g, $[g] = \text{m/s}^2$.
- Startfarta v_0, $[v_0] = \text{m/s}$.

To alternativer:

- Vi kan gjøre dette litt uformelt som følger. Vi skal finne et uttrykk for h som inneholder de gitte størrelsene. h er i meter, og alt annet må korte bort. Massen er det eneste som inneholder kg, og den kan dermed ikke være med. For å forkorte sekund (s) må vi ha forholdet mellom v_0^2 og g. Da ser vi at

  $$h \sim \frac{v_0^2}{g}$$

  her betyr $\sim$ at de to sidene er like opp til en numerisk verdi (et dimensjonsløst tall). Vi ser at vi får riktig form på uttrykket, men kan ikke oppdage at det er en faktor 2 i nevneren siden denne er dimensjonsløs.

- Mer systematisk kan vi anta at høyden er gitt ved en formel som kan skrives

  $$h = m^a g^b v_0^c$$

  der a, b og c er konstanter som vi skal finne. Da er

  $$[h] = \text{kg}^a \frac{\text{m}^b}{\text{s}^2 b} \frac{\text{m}^c}{\text{s}^c} = \text{kg}^a\ \text{m}^{b+c}\ \text{s}^{-2b-c} = \text{m}$$

  og dermed har vi likningene

  $$a = 0, \qquad b + c = 1, \qquad -2b - c = 0$$

  som gir

  $$a = 0, \qquad b = -1, \qquad c = 2.$$

  Dermed er

  $$h \sim \frac{v_0^2}{g}.$$

2.2 Hva er svingetida til en pendel?

Vi kaller svingetida T med $[T] = \text{s}$. Hvilke størrelser kan vi tenke at påvirker svingetida til en pendel?

- Lengden l, $[l] = \text{m}$.
- Massen m, $[m] = \text{kg}$.
- Tyngdeakselerasjonen g, $[g] = \text{m/s}^2$.
- Startvinkelen θ_0, $[\theta_0] = 1$.

To alternativer:

- Vi kan gjøre dette litt uformelt som følger. Vi skal finne et uttrykk for T som inneholder de gitte størrelsene. T er i sekunder, så alt annet må korte bort. Massen er det eneste som inneholder kg, og vi kan ikke bli kvitt den om vi tar med m i uttrykket. m skal derfor ikke være med. Både l og g inneholder meter (m), og for å ikke få noe m i svaret må vi dele dem på hverandre.

  $$\left[\frac{l}{g}\right] = \text{s}^2$$

  og dermed må vi ta kvadratrota av dette og finner at

  $$T = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\theta_0).$$

  Her er $F(\theta_0)$ en ukjent funksjon av startvinkelen. Siden θ_0 er dimensjonsløs kan vi aldri finne avhengigheten av den med dimensjonsanalyse. Denne metoden virker best hvis det er enkle uttrykk slik at vi klarer å "se" hvilke kombinasjoner som gir riktig enhet.

- Vi kan gjøre det samme mer formelt (og litt mer tungvint, men det virker uten at vi må være noe ekstra lure) om vi tenker at formelen for T skal ha formen

  $$T = l^a m^b g^c$$

  der a, b og c er konstanter som vi skal finne. Vi har da

  $$[T] = \ \text{m}^a\ \text{kg}^b (\ \text{m/s}^2)^c = \ \text{m}^{a+c}\ \text{kg}^b\ \text{s}^{-2c} = \ \text{s}.$$

  Skal dette stemme må potensene til hver enhet være like på begge sider, og vi får likningene

  $$a + c = 0, \qquad b = 0, \qquad -2c = 1$$

  med løsningen

  $$a = \frac{1}{2}, \qquad b = 0, \qquad c = -\frac{1}{2}.$$

  Dette gir som før

  $$T \sim l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\theta_0).$$

Her skriver vi $T \sim l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$ for å indikere at de to sidene er like opp til en numerisk verdi (et dimensjonsløst tall). Vi skal seinere lære å vise at

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

for $\theta_0 \ll 1$. Numeriske konstanter som 2π kan vi aldri bestemme med dimensjonanalyse.

2.3 Hva er svingetida til en elastisk pendel

Hva kan svingetida avhenge av?

- Fjærkonstanten k, $[k] =$ N/m = kg/s^2.
- Massen m, $[m] =$ kg.
- Tyngdeakselerasjonen g, $[g] =$ m/s^2.

Meter (m) inngår bare i g og dermed kan ikke g være med. Det er da lett å se at

$$T \sim \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Løser vi problemet eksakt (vi kommer til det om noen uker) får vi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.