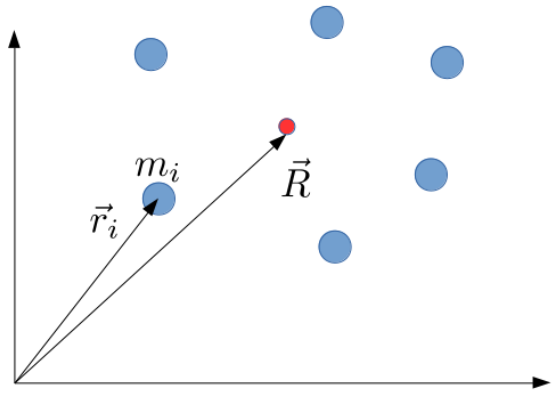
Forelesningsnotater, FYS1100 uke 10
Flerpartikkelsystemer og rotasjon av stive legemer

Joakim Bergli

1 Massesenter

Vi ser på en samling av massepunkter med massene m_i (massene trenger ikke å være like) og posisjon $\vec{r}_i$ i et gitt koordinatsystem.

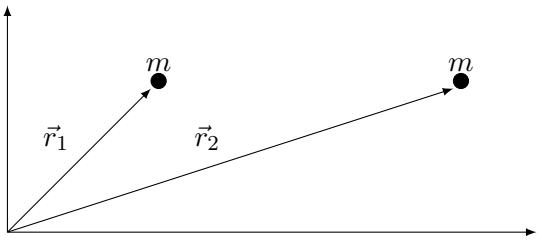


Massenteret til dette systemet har da koordinatene

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i, \qquad M = \sum_i m_i.$$

For et kontinuerlig legeme må vi tenke oss at det er satt sammen av et stort antall små deler som vi kan tenke på som slike massepunkter. I grensen der størrelsen av delene går mot null og antallet mot uendelig vil summen gå over i et integral. Dette kommer vi tilbake til etter MAT1110 der dere lærer om integraler i flere dimensjoner.

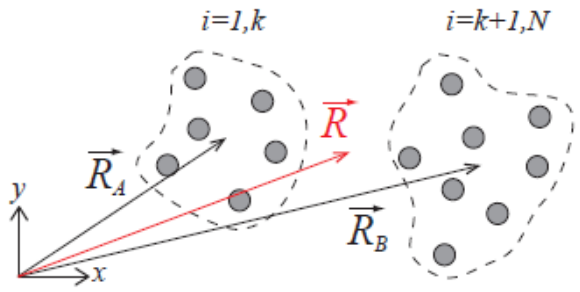
Eksempel



$$\vec{r}_1 = [1,1], \qquad \vec{r}_2 = [3,1],$$
$$\vec{R} = \frac{1}{M}(m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2) = [2,1].$$

1.1 Superposisjonsprinsippet: Grupper av flerpartikkelsystemer

Ofte kan et legeme deles i forskjellige deler der det er lett å finne massesenteret ut fra symmetribetraktninger. For å finne det samlede massesenteret kan vi finne massesenteret til hver del og så regne dem som punktmasser når vi beregner det samlede massesenteret. Dette viser vi lettest ved å se på to samlinger av punktmasser, men igjen kan vi behandle kontinuerlige legemer ved å tenke på dem som samlinger av uendelig mange uendelig små punktmasser.



Vi ser på et system som består av to delsystemer A og B. Da har vi at vektoren til massesenteret er

$$M\vec{R} = \sum_i m_i\vec{r}_i = \sum_{i\in A} m_i\vec{r}_i + \sum_{i\in B} m_i\vec{r}_i = M_A\vec{R}_A + M_B\vec{R}_B$$

der

$$M_A = \sum_{i\in A} m_i, \qquad M_B = \sum_{i\in B} m_i$$

er massene til de to delsystemene og $\vec{R}_A$ og $\vec{R}_B$ er massesentrene til hvert delsystem. Dermed har vi

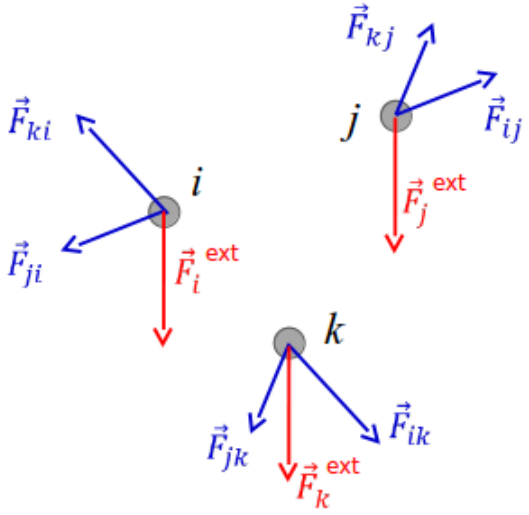
$$\vec{R} = \frac{1}{M}(M_A\vec{R}_A + M_B\vec{R}_B)$$

som er det vil ville finne for massesenteret til to punktmasser.

2 Massesentersetningen

Vi ser på en samling av punktmasser. Massepunkt i har massen m_i og posisjonen $\vec{r}_i$. På massen virker det en ytre kraft $\vec{F}_i^{ext}$. Mellom massepunktene virker det indre krefter, og vi kaller krafta fra punkt j på punkt i for $\vec{F}_{ji}$. Tilsvarende er krafta fra punkt i på punkt j for $\vec{F}_{ij}$, og etter Newtons 3. lov har vi $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Den totale krafta på punkt i er da

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}.$$



Massesenteret har posisjonen

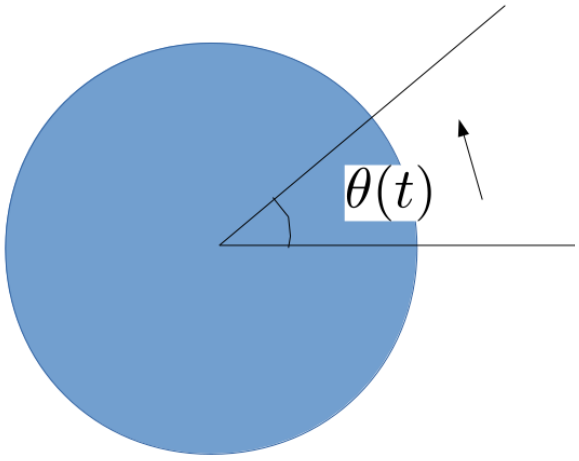
$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

og vi kaller akselerasjonen til massesenteret A. Da er

$$MA = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \vec{F}_i^{ext}.$$

Vi har altså vist at vi har en slags Newtons 2. lov for massesenteret. Merk at dette gjelder selv om de forskjellige massepunktene akselererer i forhold til hverandre. Det trenger altså ikke å være et stivt legeme for at vi kan bruke massesentersetningen.

3 Rotasjon av et stivt legeme om en fast akse



Hvor mye legemet har rotert beskrives av rotasjonsvinkelen $\theta(t)$ i forhold til en gitt referanseretning. På samme måte som for lineær bevegelse definerer vi vinkelfart

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

og vinkelakselerasjon

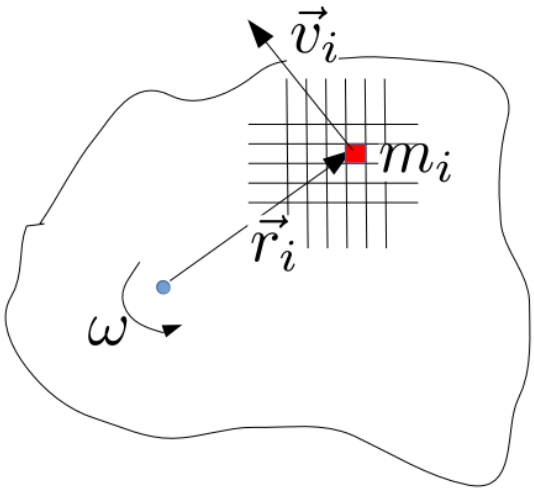
$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

For et punkt i avstanden R fra rotasjonsaksen gjelder at banefarta og baneakselerasjonen er

$$v = R\omega, \qquad a_t = R\alpha.$$

4 Energi i rotasjonsbevegelse

For et legeme som roterer finner vi den kinetiske energien ved å summere opp energien til hver enkelt lille del



Kinetisk energi til et lite element er

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Hvis elementet har posisjonen $\vec{r}_i$ er $v_i = |\vec{v}_i| = r_i\omega$ når $r_i = |\vec{r}_i|$. Den kinetiske energien til hele legemet er da

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

der vi har definert treghetsmomentet

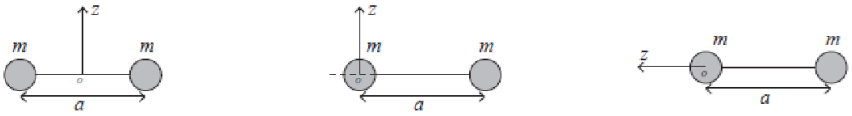
$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{1}$$

Treghetsmomentet avhenger av formen på legemet, massefordelinga og rotasjonsaksen. Men det avhenger ikke av vinkelfarta.

4.1 Treghetsmoment

4.1.1 Eksempel: Et legeme av to partikler

For legemer som består av isolerte punktpartikler kan vi bruke likning (1) direkte. Vi ser på et (litt kunstig) legeme som består av to partikler. Vi antar at hver partikkel er et punkt (selv om det ikke ser slik ut på bildet), og at forbindelsen mellom dem er masseløs men allikevel helt stiv.

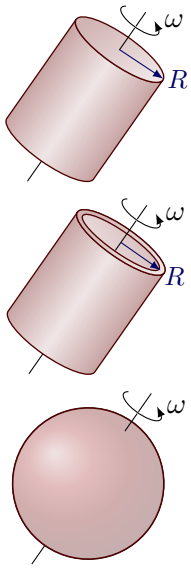


Vi regner ut treghetsmomentet om aksen vist i de tre tilfellene.

$$I_A = 2 \cdot m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2$$
$$I_B = ma^2$$
$$I_C = 0.$$

4.1.2 Kontinuerlige legemer

For kontinuerlige legemer må vi erstatte summen med et integral. Dette kommer i MAT1110, og vi trenger ikke å bry oss om det nå. Men vi kan bruke oppgitte treghetsmoment og intuitivt forstå hvorfor noen er større enn andre. Her er en liten tabell for noen vanlige legemer



$I = \frac{1}{2}MR^2$

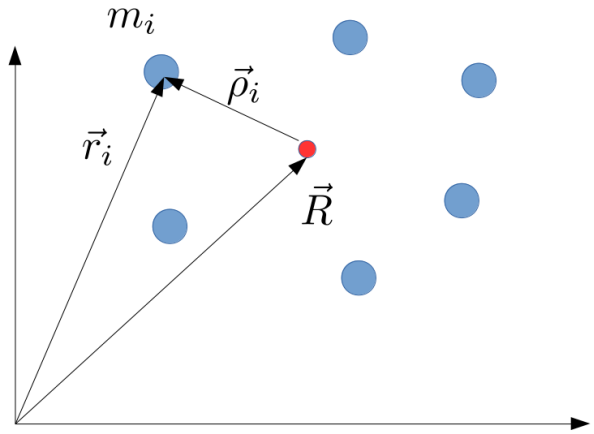
$I = MR^2$

$I = \frac{2}{5}MR^2$

Vi kan forstå at sylinderskallet har størst treghetsmoment fodi all massen har avstanden R fra rotasjonsaksen. For sylinderen er det mye av massen som ligger nærmere aksen, og dermed er treghetsmomentet mindre. Kula har minst fordi her er det en større andel som ligger nær aksen og mindre som ligger langt ute.

4.2 Rotasjon + translasjon

Vi vil finne et uttrykk for energien til et legeme som både roterer og beveger seg translatorisk. Vi starter generelt med en samling massepunkter med massene m_i og posisjonene $\vec{r}_i$.



Den kinetiske energien til hvert masepunkt er da

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2.$$

Massesenteret har posisjonen

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \qquad M = \sum_i m_i.$$

Vi innfører relative posisjoner $\vec{\rho}_i$ slik at

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i, \qquad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}_i.$$

Da har vi

$$\dot{r}_i^2 = \dot{R}^2 + \dot{\rho}_i^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i$$

der $\dot{\rho}_i = |\dot{\vec{\rho}}_i|$. Den totale kinetiske energien blir da

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{R}^2 + \dot{\rho}_i^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i) = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2.$$

Leddet

$$\sum_i m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i = \dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$$

fordi den siste summen beskriver posisjonen til massesenteret relativt til massesenteret, og den er derfor null. For et stivt legeme har vi

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

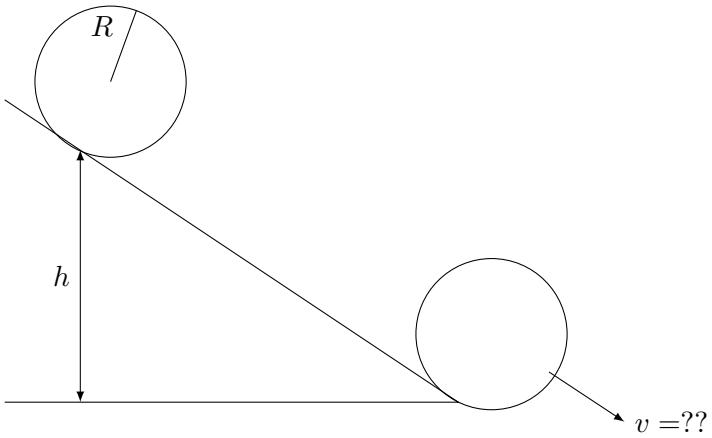
der I er treghetsmomentet til legemet om en akse gjennom massesenteret. Dermed får vi

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Dette viser at den totale kinetiske energien er en sum av translatorisk energi som svarer til bevegelsen av massesenteret og rotasjonsenergi om massesenteret.

4.3 Eksempel: Rulle ned en bakke

Vi vil finne farta til et legeme som ruller ned en bakke.



Vi lar R være radien og M massen til legemet som vi antar er rotasjonssymmetrisk slik at det ruller jevnt. I forelesninga gjorde vi eksperimentet med ei kule (trghetsmoment $I_{kule} = \frac{2}{5}MR^2$), en sylinder ($I_{sylinder} = \frac{1}{2}MR^2$) og et rør ($I_{rør} = MR^2$). Alle har altså treghetsmoment på formen $I = cMR^2$, der c avhenger av formen på legemet. Vi starter i høyden h over bunnen av bakken og slipper legemene fra ro. Det betyr at de har en potensiell energi $U_0 = Mgh$ og kinetisk energi $K_0 = 0$. I bunnen av bakken er $U_1 = 0$ og

$$K_1 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Vi antar at legemet ruller uten å gli, som betyr at $\omega = v/R$. Dermed er

$$K_1 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v^2 = \frac{1}{2}(1+c)Mv^2.$$

Siden bare tyngden gjør arbeid er mekanisk energi bevart, og dermed

$$\frac{1}{2}(1+c)Mv^2 = Mgh.$$

Da blir farta i bunnen

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}.$$