Forelesningsnotater, FYS1100 uke 11
Kraftmoment og spinn

Joakim Bergli

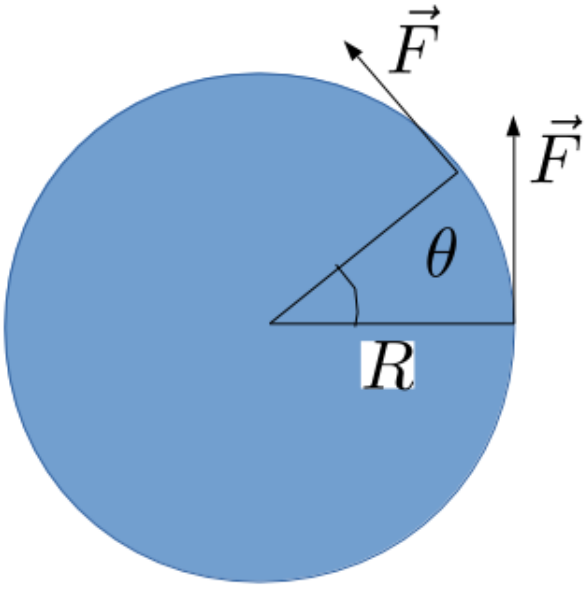
1 Kraftmoment

Vi har lært at treghetsmoment er rotasjonsbevegelsens ekvivalent til masse i den forstand at den kinetiske energien til et legeme med treghetsmoment I som roterer med vinkelfart ω er

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

der I spiller samme rollen som m i uttrykket $\frac{1}{2}mv^2$ for translatorisk kinetisk energi. Men for translasjon sier ikke massen bare noe om mengden energi lagret i bevegelsen, men beskriver også hvor tungt det er å sette bevegelsen igang, dvs. hvor stor kraft $F = ma$ som trengs for å få til en gitt akselerasjon. Dette er ikke urelatert, siden kraften er det som utfører arbeidet som gir endring i energien. Vi kan bruke samme tanke for rotasjon.

Se på et legeme som vi setter i rotasjon med en kraft F som virker over en strekning s.



Hvis krafta virker i avstanden R fra rotasjonsaksen og vi antar at den hele tida skifter retning slik at den ligger parallelt med bevegelsen og vi dermed får maksimalt arbeid vil strekningen være $s = R\theta$. Da er arbeidet lik den tilførte kinetiske energien (vi tenker at vi starter i ro)

$$W = Fs = FR\theta = K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Hvis vi deriverer dette uttrykket med hensyn på tida får vi

$$FR\omega = I\omega\alpha$$

som betyr

$$FR = I\alpha.$$

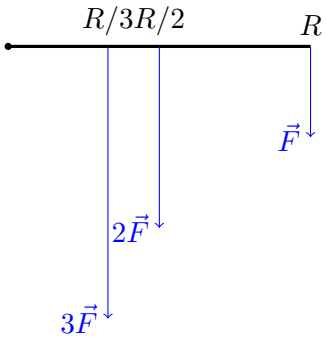
Vi kaller

$$\tau = FR$$

kraftmoment og får at

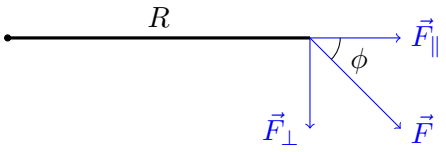
$$\tau = I\alpha.$$

Dette svarer til Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse. På samme måte som kraft er det som skaper akselerasjon er kraftmoment det som skaper vinkelakselerasjon. Vi ser at kraftmomentet avhenger både av krafta og av avstanden til rotasjonsaksen (denne avstanden kaller vi ofte kraftarmen). Dette stemmer med vår daglige erfaring. Tenk deg at du skal åpne ei tung dør, da vil det være lettere dersom du dytter langt fra hengselet, og veldig tungt hvis du dytter nær hengselet slik at kraftarmen blir liten. Her er døra sett ovenfra (hengselet er på venstre enden)



Her gir alle de tre kreftene samme kraftmoment FR, men krafta som kreves er minst ytterst og størst innerst.

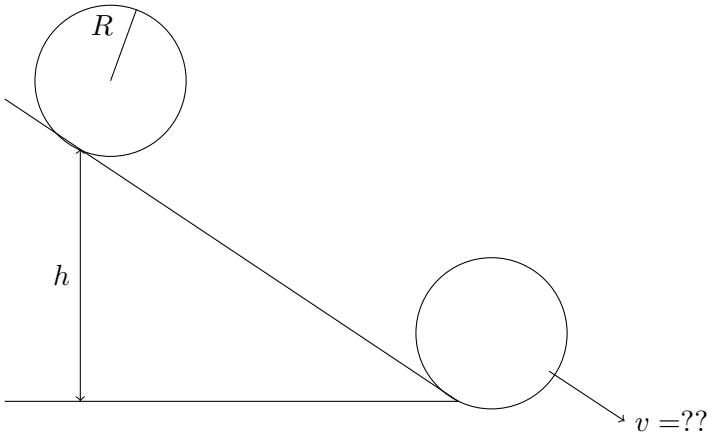
Hvis krafta ikke er vinkelrett på radien må vi ta hensyn til dette. Hvis vi ser døra ovenfra igjen og trekker på skrå ytterst



Det er klart at komponenten $\vec{F}_{\parallel}$ som er paralell med radien (kraftarmen) ikke bidrar til å skape rotasjon, men bare trekker i hengselet. Bare $\vec{F}_{\perp}$ som står vinkelrett på radien skaper rotasjon. Kraftmomentet er derfor mer generelt definert som

$$\tau = F_{\perp}R = FR\sin\phi. \tag{1}$$

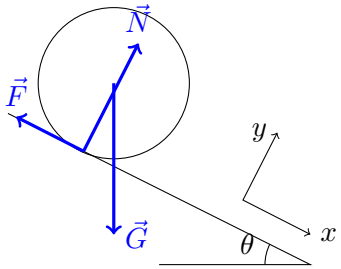
1.1 Eksempel: Trille ned skråplan



I forrige uke gjorde vi et forsøk der vi trillet ei kule, en sylinder og et rør ned et skråplan. Ved å bruke bevaring av mekanisk energi fant vi ut at farta i bunnen var

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}.$$

hvis treghetsmomentet er $I = cMR^2$. Vi kan nå se på det samme ved å finne kreftene som virker og dermed akselerasjonen til hvert legeme. Det er tre krefter som virker, tyngden G, normalkrafta N og friksjonen F.



Vi bruker koordinater parallelt med og vinkelrett på skråplanet og dekomponerer kreftene. Newtons 2. lov i x-retningen blir da

$$Mg\sin\theta - F = Ma$$

Friksjonskrafta sinker akselerasjonen, og vi antar at den er stor nok til at legemet ruller uten å gli. Det innebærer at $v = R\omega$ der v er farta i x-retning og ω er vinkelfarta om massesenteret (rullebetingelsen). Friksjonskrafta er den eneste som har et kraftmoment om massesenteret (G virker i massesenteret og N er parallell med radiusvektoren), og dermed er

$$\tau = FR = I\alpha.$$

Rullebetingelsen innebærer at $a = R\alpha$, og friksjonskrafta er derfor

$$F = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I}{R^2}a = cMa.$$

Setter vi dette inn i Newtons 2. lov har vi

$$Mg\sin\theta - cMa = Ma$$

som gir

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+c}.$$

Sjekk selv at denne akselerasjonen gir samme fart som vi fant forrige uke med energibetraktning.

2 Sammenlikning av lineær- og rotasjonsbevegelse

Vi kan sammenfatte det vi har lært om rotasjon i tabellen under, som klart viser parallellene mellom lineær bevegelse og rotasjonsbevegelse.

Lineær bevegelse	Rotasjonsbevegelse
$x(t)$	$\theta(t)$
$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$
$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
m	I
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
F	τ
$F = ma$	$\tau = I\alpha$
$p = mv$	??

Som vi ser mangler vi fortsatt en analog til bevegelsesmengden. Den kalles spinn, og den skal vi studere nå.

3 Spinn

3.1 Spinn for et stivt legeme

Vi tipper at siden kraftmoment er kraft ganger arm er den størrelsen som svarer til kraft, så er bevegelsesmengde ganger arm det som svarer til bevegelsesmengde, og definerer spinnet som

$$L = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i r_i m_i r_i \omega = I\omega.$$

Dette virker lovende, siden vi allerede vet at I svarer til m og ω til v, og dermed svarer likninga over til $p = mv$. Newtons 2. lov kan formuleres som $F = \frac{dp}{dt}$, og vi regner tilsvarende ut

$$\frac{dL}{dt} = I\alpha = \tau.$$

Vi kan nå komplettere tabellen over

Lineær bevegelse	Rotasjonsbevegelse
$x(t)$	$\theta(t)$
$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$
$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
m	I
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
F	τ
$F = ma$	$\tau = I\alpha$
$p = mv$	$L = I\omega$
$F = \frac{dp}{dt}$	$\tau = \frac{dL}{dt}$

På samme måten som bevegelsesmengden er bevart når det ikke virker noen netto ytre krefter ser vi at spinnet for et stivt legeme som roterer er bevart dersom det ikke virker noen ytre kraftmoment. Vi kan utvide dette til å gjelde også for mer generelle systemer der legemer endrer form eller bevegelsen ikke er en ren rotasjon. Men for å gjøre det må vi definere kraftmoment og spinn mer generelt.

3.2 Spinn i en generell bevegelse: Spinn og kraftmoment som vektorstørrelser

Vi ser tilbake til likning (1). Vi husker at kryssproduktet av to vektorer involverer sinus til vinkelen mellom dem, og definerer

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}.$$

Kraftmomentet er da en vektor som står vinkelrett både på kraftarmen og krafta. For en enkel rotasjon av et stivt legeme blir dette langs rotasjonsaksen. Lengden av denne vektoren er det vi tidligere kalte kraftmoment.

Tilsvarende definerer vi spinnet til en partikkel i vilkårlig bevegelse i forhold til et vilkårlig punkt som

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

Merk at spinnet er definert relativt til et punkt, og at det vil være foskjellig avhengig av hvilket punkt vi velger.

For en samling av punktmasser som beveger seg, muligens uavhengig av hverandre, definerer vi det totale spinnet som

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i.$$

For et stivt legeme som roterer om en fast akse er alltid $\vec{v} \perp \vec{r}$ (her forenkler vi til bare å se på plane legemer der punktet vi regner spinnet om ligger i samme planet slik at $\vec{r}$ er normalt på rotasjonsaksen. For det generelle tilfellet der $\vec{r}$ står på skrå i forhold til rotasjonsaksen må dere vente til FYS1105).

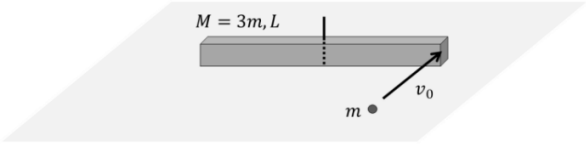
3.3 Bevaring av spinn

Vi kan vise generelt at

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \sum_i \vec{\tau}_i^{ext} = \vec{\tau}^{ext}.$$

Her er $\sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = 0$ siden $\dot{\vec{r}}_i \parallel \vec{p}_i$. Prøv selv å vise hvorfor $\sum_{i,j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = 0$. Vi har altså fortsatt for dette generelle tilfellet at det totale spinnet er bevart dersom det ikke virker noen ytre kraftmomenter.

3.4 Eksempel: Roterende stang



En tynn, homogen stang med masse $M = 3m$ og lengde L er festet horisontalt på et bord med en akse som går gjennom massesenteret. Stangen kan rotere fritt om aksen uten friksjon. Treghetsmomentet til stangen som roterer om sitt massesenter er $I_S = \frac{1}{12}ML^2$. Et prosjektil med masse m skytes horisontalt og vinkelrett på stangen. Prosjektilet, som kan anses som et punkt, treffer enden av stangen med hastighet v_0 og fester seg i stangen. Her er energien ikke bevart siden det er friksjon som stopper prosjektilet i stanga. Bevegelsesmengden er ikke bevart siden stanga er festet med en akse og det der vili virke en ytre kraft. Spinnet er bevart fordi det ikke er noen ytre krefter som har et kraftmoment om aksen. For å finne vinkelfarta til stanga trenger vi treghetsmomentet til det sammensatte legemet av stang + prosjektil. Siden treghetsmomentet finnes ved en sum over alle delene til et legeme kan vi summere bidragene fra stang og prosjektil

$$I_{tot} = \frac{1}{12}ML^2 + m(L/2)^2 = \frac{1}{2}mL^2.$$

Spinnet før prosjektilet treffer er $l = mv_0L/2$ og siden spinnet er bevart må dette også være spinnet etter at prosjektilet har stoppet i stanga $l = I_{tot}\omega$. Dermed er

$$\omega = \frac{mv_0L}{2I_{tot}} = \frac{v_0}{L}.$$

3.5 Eksempel: Stå på dreieskive med lodd i hendene og trekke armene inn

I forelesninga gjorde vi et eksperiment med en person som står på ei dreieskive med lodd i hendene. Loddene trekkes inn, og treghetsmomentet avtar. Siden det ikke er noen ytre kraftmoment om rotasjonsaksen vil spinnet være bevart, og dermed må vinkelfarta øke. For å analysere dette gjør vi noen antagelser som forenkler regninga. Vi tenker at personen har treghetsmoment I_p, at rmene har så liten masse at vi kan se bort fra dem og at loddene hver har massen m. Til å begynne med har de avstanden r_1 fra rotasjonsaksen, og til slutt har de avstanden r_2. Treghetsmomentet i starten er da

$$I_1 = I_p + 2mr_1^2$$

og på slutten

$$I_2 = I_p + 2mr_2^2$$

Hvis vinkelfarta først er ω_1 og så blir ω_2 har vi spinnet før og etter

$$L_1 = I_1\omega_1 = (I_p + 2mr_1^2)\omega_1$$
$$L_2 = I_2\omega_2 = (I_p + 2mr_2^2)\omega_2.$$

Siden spinnet er bevart er $L_1 = L_2$, og dermed

$$(I_p + 2mr_1^2)\omega_1 = (I_p + 2mr_2^2)\omega_2.$$

Vinkelfarta til slutt blir altså

$$\omega_2 = \frac{I_p + 2mr_1^2}{I_p + 2mr_2^2}\omega_1.$$

For å få et begrep om størrelsen på de forskjellige leddene antar vi at personen veier $M = 70$ kg, er $h = 1,75$ m høy og er formet som en sylinder. Siden kroppen har tetthet omtrent 1 kg/l er volumet $V = \pi r^2 h = 70$ l. Dermed er radien $r = \sqrt{V/\pi h}$ = 0,11 m. Da blir treghetsmomentet

$$I_p = \frac{1}{2}Mr^2 = 0,44 \text{ kgm}^2.$$

Hvis armene er $r_1 = 80$ cm lange (fra rotasjonsaksen) or massen til loddene er $m = 5$ kg blir

$$2mr_1^2 = 6,4 \text{ kgm}^2.$$

Det er altså slik at treghetsmomentet i starten er dominert fullstendig av bidraget fra loddene selv om de er mye lettere enn kroppen. Vi antar at loddene ender i samme avstand fra aksen som radian til kroppen, altså $r_2 = r = 0,11$ m. Da blir

$$2mr_2^2 = 0,12 \text{ kgm}^2,$$

altså noe mindre enn kroppens treghetsmoment. Setter vi inn alt får vi

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_p + 2mr_1^2}{I_p + 2mr_2^2} = 12.$$

Vinkelfarta kan altså bli omtrent 12 ganger større.

La oss se på energien før og etter. For å få enklere uttrykk setter vi her $I_p = 0$, som svarer til en uendelig tynn person (du kan regne ut med en endelig verdi for I_p selv). Da er

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1,$$

og kinetisk rotasjonesenergi før og etter

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = mr_1^2\omega_1^2$$
$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = mr_2^2\omega_2^2 = mr_2^2\frac{r_1^4}{r_2^4}\omega_1^2 = K_1\frac{r_1^2}{r_2^2} > K_1.$$

Den kinetiske energien er altså større etter bevegelsen (faktisk ganske mye større). Hvor kommer denne ekstra energien fra? Fordi loddene går i sirkelbane må det virke en sentripetalkraft på dem. Det er vi som holder i loddene som må skape denne krafta. Når vi trekker loddene innover gjør denne krafta et arbeid. Når loddene har avstanden r fra aksen er vinkelfarta

$$\omega = \frac{r_1^2}{r^2}\omega_1$$

og sentripetalkrafta

$$F = mr\omega^2 = mr\frac{r_1^4}{r^4}\omega_1^2 = mr_1^4\omega_1^2\frac{1}{r^3}.$$

Arbeidet som blir gjort er da (ganger med 2 for to lodd, og negativt fortegn fordi krafta er motsatt rettet av r)

$$W = -2\int_{r_1}^{r_2} F dr = -2mr_1^4\omega_1^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^3} = mr_1^4\omega_1^2\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right] = K_2 - K_1.$$

Arbeidet stemmer altså med endringen i energi.