Forelesningsnotater, FYS1100 uke 12
Relativitetsteori

Joakim Bergli

Relativitetsteorien er basert på to postulater

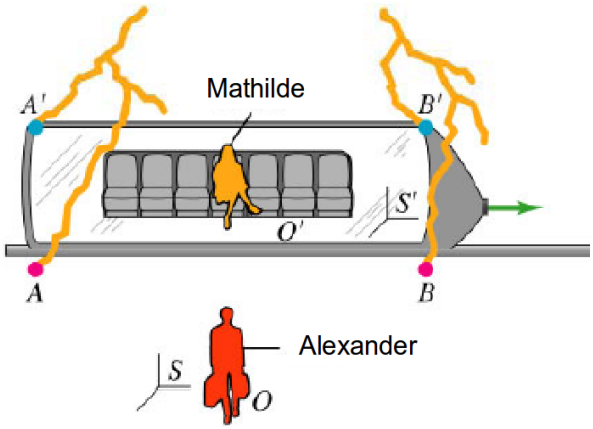
- Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.
- Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer, og er uavhengig av observatørens bevegelse.

Det første er det ikke noe kontroversielt med, det er også det vi tenker i ikke-relativistisk fysikk. Det andre virker i utgangspunktet absurd (men i FYS1120 lærer dere at Maxwells likninger for elektromagnetiske felt stemmer med dette. Det visste Einstein).

Hvis vi skal ha samme lysfart i alle referansesystemer må vi akseptere ganske mange andre ting som ikke stemmer med våre vanlige erfaringer. Vi skal se på noen.

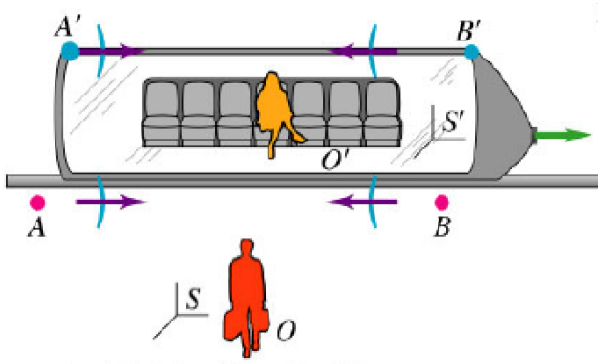
1 Relativitet av samtidighet

Et tog kjører med konstant fart på en rett strekning. En person sitter akkurat midt i toget, mens en annen står på bakken utenfor. To lyn slår ned, ett i forenden av toget og ett i bakenden. Begge lynene forgreiner seg slik at de setter merker både på bakken og på endene av toget. Dette for at vi i ettertid kan gå og kontrollere hvor nedslagene skjedde, slik at det ikke er noen tvil om posisjonene.



Sett fra observatøren på bakken skjer tre ting samtidig: begge lynene slår ned, og midten av toget, der personen sitter, passerer der han står. Han kan etterpå sjekke at lynene slo ned akkurat like langt på hver side, slik at han stod midt i mellom nedslagspunktene. Det er viktig å huske at det vi snakker om her ikke er tidspunktene han ser disse hendelsene, men tidspunktet han mener de faktisk skjedde.

Siden lyset bruker tid på å bevege seg fra lynnedslagene til ham, vil han se at midten av toget passerer først siden dette er nærmere ham, og så ser han lyset fra lynene. Han mener altså at disse hendelsene skjedde samtidig når han tar hensyn til tida lyset har brukt.

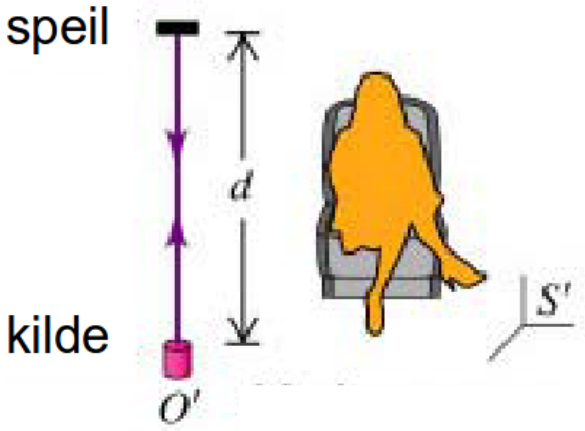


Fortsatt sett fra observatøren på bakken sitt referansesystem vil lyspulsene bevege seg symmetrisk inn mot midtpunktet. Men mens dette skjer flytter toget seg framover, og dermed kommer lyspulsen fra lynet foran på toget til å treffe observatøren i midten først, og den fra bakenden litt etter. Denne rekkefølgen må være den samme for alle observatører, også for den som sitter på midten av toget. Siden hun kan måle at hun sitter akkurat på midten av toget og at lynene faktisk slo ned akkurat på endene konkluderer hun med at lynet foran slo ned før lynet bak.

De to observatørene er altså ikke enige om hva som skjer samtidig.

2 Tidsdilatasjon og lengdekontraksjon

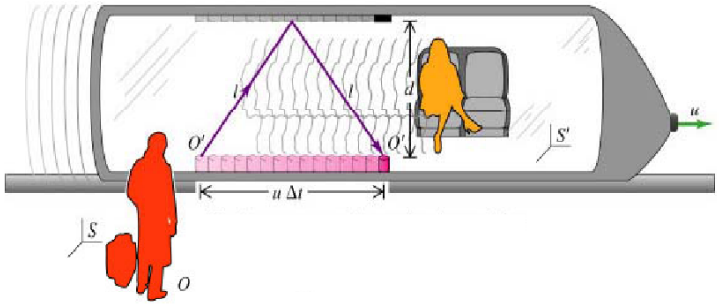
Ikke bare samtidighet, men også lengden på tidsintervaller er forskjellig for forskjelige observatører. En person sitter som før på et tog (system S') med en lyskilde og et speil i avstanden d. En lyspuls sendes fra kilden, reflekteres i speilet og går tilbake til kilden.



Tiden det tar i system S' er

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

En person som står stille utenfor toget (system S) observerer det samme, men siden toget beveger seg må lyset gå på skrå for å komme tilbake til kilden.



Skrålinja har lengden

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Siden lyset går like fort for begge observatører, men strekningen er lengre i S må tida det tar også være lengre. Vi har tida i S er

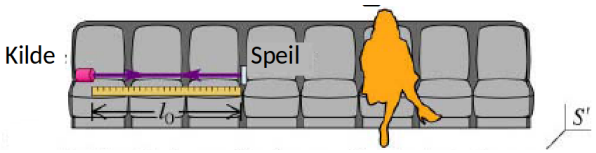
$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Her inngår Δt på høyresiden, og for å få et eksplisitt uttrykk må vi løse for Δt og finner

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Her kaller vi $\Delta t' = \Delta t_0$ for egentiden, siden det er den tiden som er målt i et referansesystem der klokka er i ro. Vi har altså vist at tiden i system S der klokka beveger seg er lengre enn egentiden ($\gamma > 1$). En annen måte å si det på er at klokker i bevegelse går saktere enn klokker i ro. Dette kalles tidsdilatasjon.

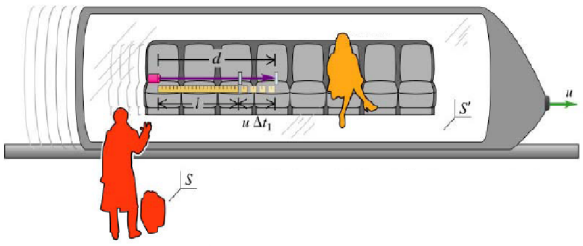
Vi kan gjøre et tilsvarende tankeeksperiment for måling av lengde hvis vi snur kilden og speilet slik at lyset beveger seg parallelt med retningen til toget. I system S' der toget og apparatet er i ro er avstanden mellom kilde og speil $l' = l_0$ som vi kaller hvilelengden.



Tida det tar for lyset å gå fram om tilbake er da

$$\Delta t' = \frac{2l_0}{c}.$$

I system S vil lyset bevege seg en lengre strekning fra kilde til speil, siden speilet beveger seg bortover mens lyset er underveis.



Strekningen lyset beveger seg fra kilde til speil er avstanden l mellom kilde og speil sett i system S pluss strekningen speilet beveger seg mens lyset går fra kilden til speilet

$$d_1 = l + v\Delta t_1$$

der Δt_1 er tida lyset bruker fra kilde til speil. Siden lyset går med lysfarta uansett vet vi også at $d_1 = c\Delta t_1$. Dermed er

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v}.$$

På vei tilbake til kilden får lyset kortere strekning å gå siden kilden beveger seg mot lyset slik at strekningen blir

$$d_2 = l - v\Delta t_2 = c\Delta t_2.$$

Dermed blir

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v}.$$

Den totale tida blir (sjekk regninga selv)

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \gamma^2 \frac{2l}{c}.$$

Fra før vet vi at tidene i de to systemene ikke er like men relatert ved $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Setter vi inn uttrykkene over får vi

$$l = \frac{l_0}{\gamma}.$$

Lengden målt av en som står på bakken er altså mindre enn hvilelengden. Dette kalles lengdekontraksjon.

3 Lorenztransformasjonen

Argumentene over, med lys som reflekteres fram og tilbake av speil i bevegelse virker litt konstruerte, og en kan lure på om det vi kommer fram til gjelder i alle tilfeller. Det er også vanskelig å konstruere tilsvarende argumenter i alle tilfelle, og vi trenger en mer robust generell tilnærming.

Vi har to referansesystemer, S og S', i relativ bevegelse med fart u lags x-aksen. Origo i de to systemene passerer hverandre ved $t = t' = 0$ og ved det tidspunktet sendes det ut en lyspuls som brer seg utover med lysfarta i alle retninger. Siden lysfarta er den samme i begge systemer må vi ha

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2.$$

Siden den relative bevegelsen er i x-retning er $y = y'$ og $z = z'$. Videre ser vi bare på punkter der $y = z = 0$. Vi tipper at

$$x' = \gamma(x - ut), \qquad t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) \tag{1}$$

Her er γ foreløpig en vilkårlig konstant, vi må bestemme den seinere. Da er

$$x'^2 - c^2t'^2 = \gamma^2(x^2 - 2xut + u^2t^2) - c^2\gamma^2(t^2 - 2\frac{u}{c^2}tx + \frac{u^2}{c^4}x^2) = \gamma^2(x^2 + u^2t^2 - c^2t^2 - \frac{u^2}{c^2}x^2).$$

For alle punkter som ligger på lyspulsen er $x^2 = c^2t^2$, og vi ser at da er også $x'^2 = c^2t'^2$. Det viser at likning (1) gir den riktige transformasjonen mellom koordinatene i de to systemene. Denne kalles Lorentztransformasjonen. For å bestemme γ utleder vi tidsdilatasjonen fra Lorentztransormasjonen og krever at den er lik det uttrykket vi fant over.

4 Tidsdilatasjon og lengdekontraksjon igjen

Vi kan finne igjen de vanlige uttrykkene for tidsdilatasjon og lengdekontraksjon ved å bruke Lorentztransformasjonen. Se for eksempel på en klokke i ro i origo i system S'. Vi ser på tida mellom to hendelser

1. Origo i de to systemene passerer hverandre. Denne hendelsen har koordinatene

$$x_1 = x'_1 = 0, \qquad t_1 = t'_1 = 0.$$

2. Klokka viser en bestemt tid Δt_0. Siden klokka ligger i ro i S' er dette egentida til tidsintervallet mellom de to hendelsene. Koordinatene er

$$x'_2 = 0, \qquad t'_2 = \Delta t_0.$$

   Vi finner tidspunktet for denne hendelsen i S

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2) = \gamma\Delta t_0.$$

Siden begge starter tidsmålinga ved hendelse 1 er

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0$$

og vi har dermed vist det vanlige uttrykket for tidsdilatasjon og også funnet riktig verdi for γ.

For å se på lengdekontraksjon er det enda viktigere å huske at Lorentztransformasjonen er en transformasjon mellom koordinater for hendelser, ikke posisjoner. Se på en stav med hvilelengden l_0 som ligger i ro i system S. Vi legger venstre endepunkt i origo og høyre endepunkt i $x = l_0$. Lengden i S er da forskjellen i koordinat mellom de to hendelsene

1. Posisjonen $x_1 = 0$ til venstre endepunkt ved $t_1 = 0$.

2. Posisjonen $x_2 = l_0$ til venstre endepunkt ved $t_2 = 0$.

Dette er hvilelengden l_0 siden staven ligger i ro i S. Med Lorentztransformasjonen kan vi finne koordinatene til disse hendelsene i S'

$$x_1' = 0, \qquad t_1' = 0$$
$$x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) = \gamma l_0, \qquad t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = -\gamma\frac{v}{c^2}l_0.$$

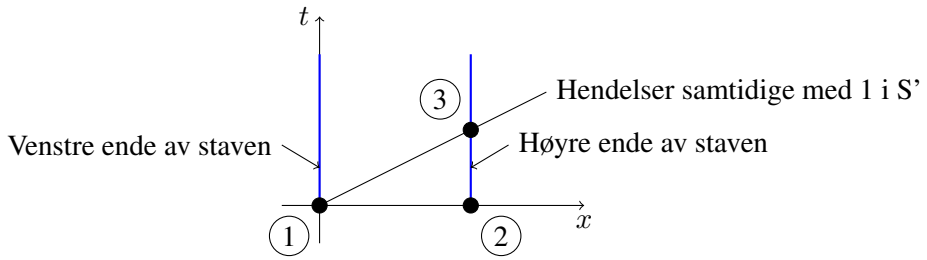
Vi ser at de to hendelsene ikke er samtidige i S' (det kunne vi nok gjettet på forhånd). Dermed er ikke avstanden mellom dem det samme som lengden målt i S'. For å finne lengden må vi sammenlikne samtidige hendelser. Hvilke hendelser er samtidige med hendelse 1 i S'? De med

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = 0$$

som betyr

$$t = \frac{v}{c^2}x.$$

For å få litt oversikt når det er mange hendelser er det nyttig å tegne romtidsdiagrammer



Vi ser at hendelse 3 er den som er der høyre endepunkt av staven er samtidig som venstre endepunkt er i origo i S'. Koordinatene er

$$x_3 = l_0, \qquad t_3 = \frac{v}{c^2}l_0$$
$$x_3' = \gamma(x_3 - vt_3) = \gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})l_0 = \frac{l_0}{\gamma}, \qquad t_3 = 0.$$

Dermed er lengden målt i S'

$$l = \frac{l_0}{\gamma}.$$