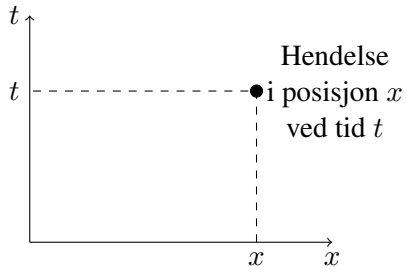
Forelesningsnotater, FYS1100 uke 13
Relativitetsteori

Joakim Bergli

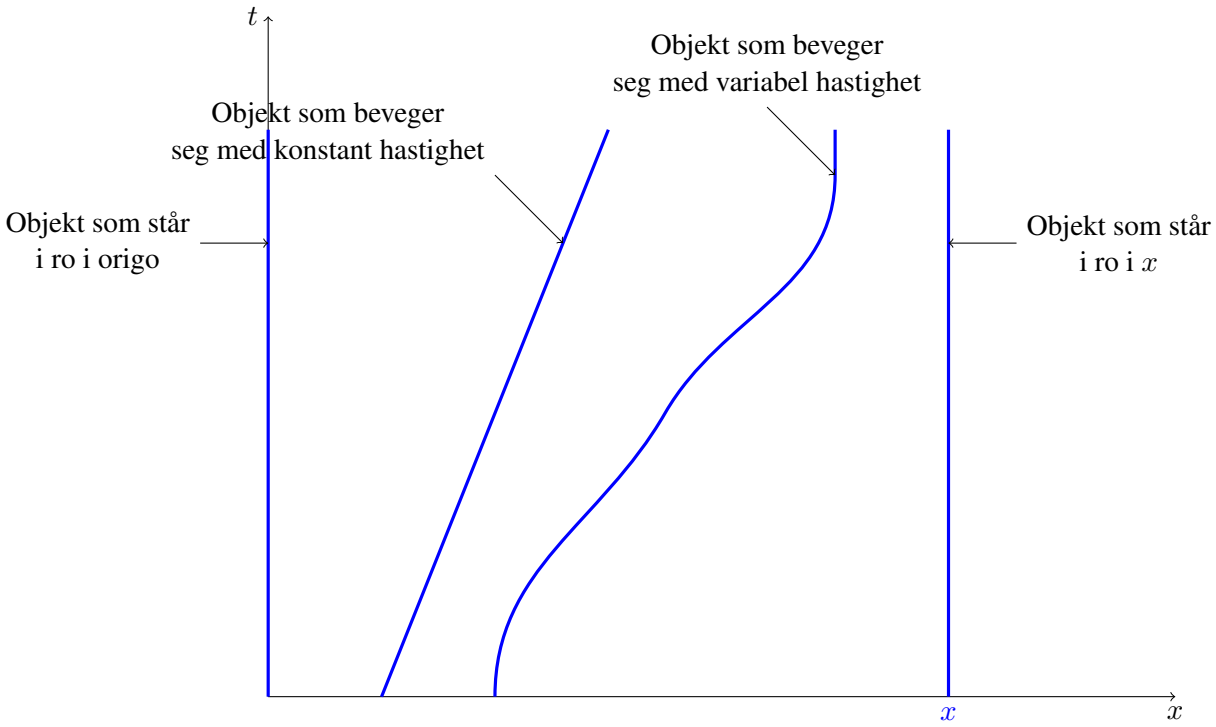
1 Romtidsdiagrammer

For å få et klarere bilde av eksempelet med lyn som slår ned i begge ender av et tog kan vi tegne et romtidsdiagram som viser hendelsesforløpet. I et slikt diagram tegner vi posisjon på den horisontale aksen og tid på den vertikale aksen. Et punkt i et romtidsdiagram representerer en hendelse, dvs noe som skjer på et bestemt sted til en bestemt tid.



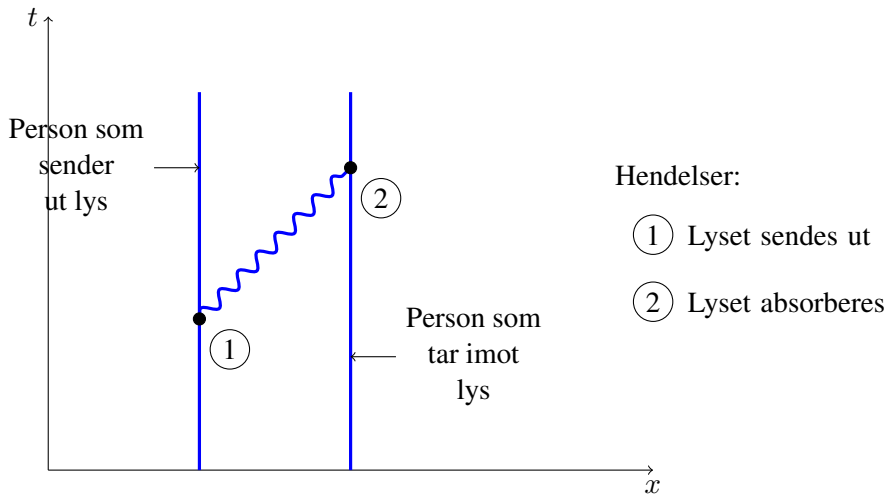
Siden vi er interessert i ting som beeger seg fort, er det vanlig å bruke enheter der lysfarta $c = 1$. Det betyr at vi bruker "lengdeenheter" for tida, der 1 meter tid er den tida lyset bruker på å gå en meter.

Diagrammet viser hendelser, men vi kan se på bevegelsen til et objekt som en samling hendelser, $(x(t), t)$ der $x(t)$ er posisjonen det har ved tida t. Den kurven dette beskriver kaller vi verdenslinja til objektet.



Linjer som går vertikalt rett opp representerer objekter som står stille. Linjer på skrå representerer objekter i bevegelse. Jo mer rett opp, jo saktere beveger den seg, og jo mer på skrå jo større er farta.

Når vi bruker enheter der $c = 1$ betyr det at lysstråler alltid følger linjer med stigningstall ± 1 i romtidsdiagrammer. Vi tegner lysstråler med bølgede linjer. Her er et enkelt eksempel på et romtidsdiagram som viser en persom som sender ut et kort lysblink som seinere tas i mot og absorberes av en annen person. Vi har også markert hendelsene der lyset blir sendt ut og absorbert.

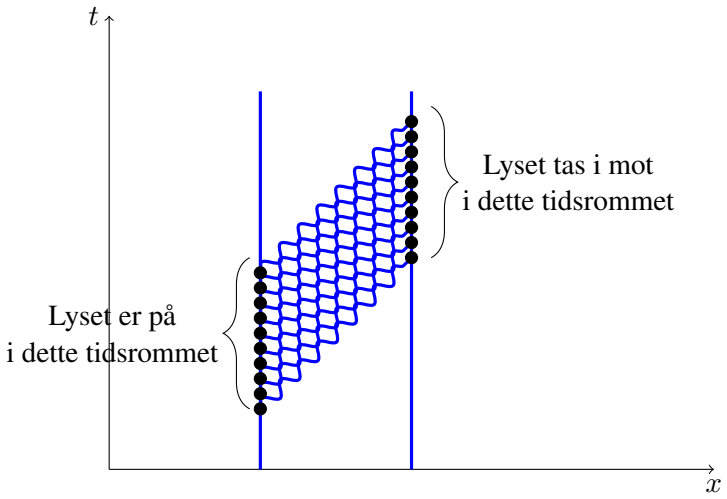


To kommentarer:

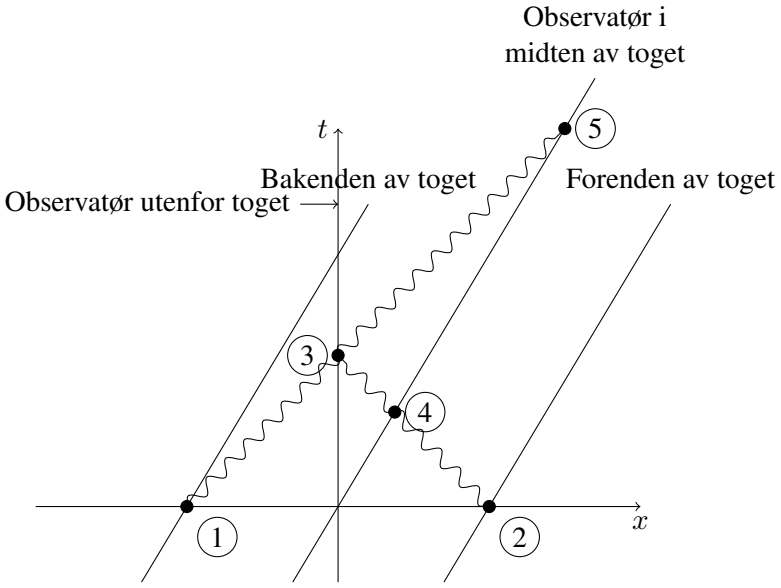
1. Lyset går rett utover langs x-aksen, ikke på skrå i rommet. I todimensjonale romtidsdiagrammer er det bare plass til en dimensjon for rom, slik at vi bare kan representere det som skjer langs en

rett linje. Det at lysstrålen går på skrå i figuren er fordi den beveger seg framover i tid samtidig som den går utover i rom.

2. Det er litt missvisende å kalle det en lysstråle, for det er bare et veldig kort lysblink som sendes ut ved et bestemt tidspunkt. Et lys som står på en lengre tid kan vi tenke på som en følge av mange lysblink etter hverandre, og kunne se noe slik ut



Vi er nå klare til å tegne et romtidsdiagram som representerer tankeeksperimentet der lynet slår ned i begge endene av et tog, og dette observeres både fra en observatør i ro i forhold til bakken (system S) og en observatør i ro i fohold til toget (system S'). Vi tegner diagrammet i koordinatene til system S.



I figuren har vi merket av fem hendelser

(1) Lynet slår ned i bakenden av toget

(2) Lynet slår ned i framenden av toget

(3) Lyset fra begge lynene når observatøren utenfor toget

(4) Lyset fra lynet foran i toget når observatøren midt i toget

(5) Lyset fra lynet bak i toget når observatøren midt i toget

Diagrammet viser hendelser slik de oppfattes av observatøren som står utenfor toget (system S). Det er klart at begge lynene slår ned samtidig (hendelse (1) og (2)), at begge lysstrålene treffer observatøren i $x = 0$ samtidig (hendelse (3)) og at observatøren på toget vil se lyset fra forenden (hendelse (4)) før fra bakenden (hendelse (5)). Men det er ikke så klart hva observatøren på toget vil mene om hvorvidt de to lynene er samtidige eller ikke.

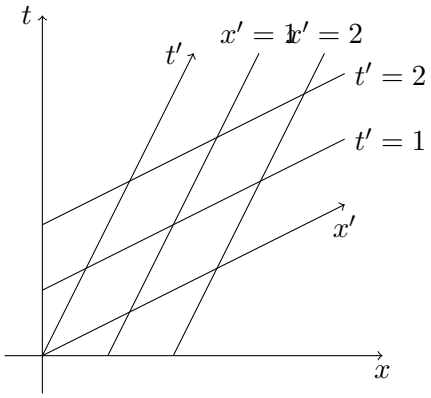
For å se dette må vi se hvor i diagrammet hendelser som er samtidige i system S' ligger. Hvis vi ser på Lorentztransformasjonen er

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x).$$

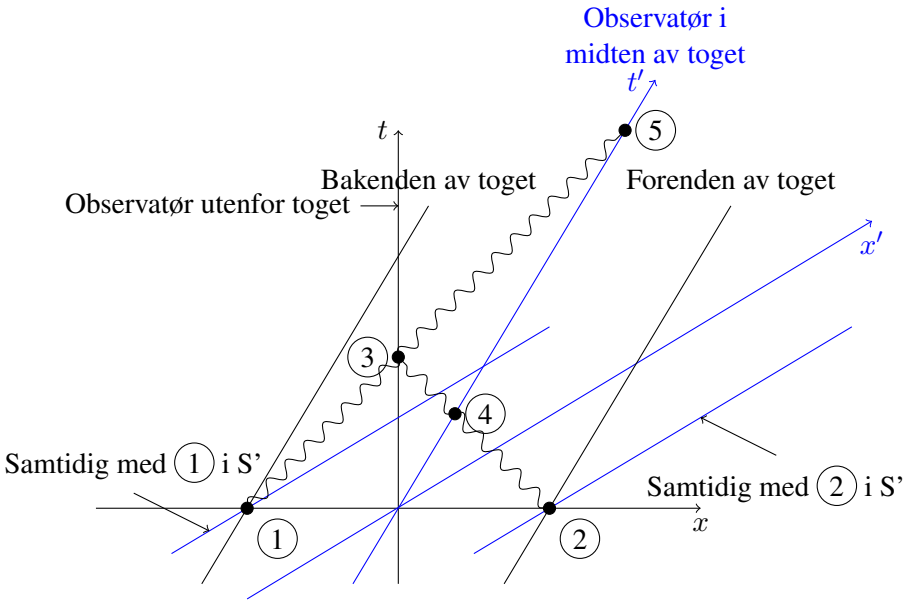
Punkter som er samtidige i S' har samme t', og dermed ligger de på linjene

$$t = \frac{1}{\gamma}t' + \frac{v}{c^2}x.$$

Tilsvarende kan vi gjøre for punkter med samme x', og på den måten kan vi legge inn koordinatsystemet for S' i romtidsdiagrammet for S.



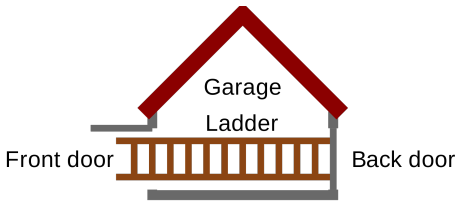
På den måten kan vi tegne inn i diagrammet for toget aksene for system S' som følger toget



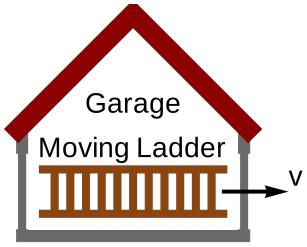
Her kan vi se at hendelse (1) skjer ved en positiv t' og hendelse (2) ved en negativ t'. Hendelse (2) er altså tidligere enn hendelse (1) for S' mens de er samtidige for S.

2 Eksempel: Stige i garasje "paradokset"

Du har en garasje med dør i begge ender og en stige som er litt lengre enn garasjen. Her er en tegning der begge står i ro.

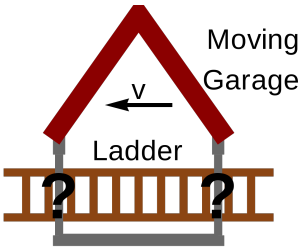


Du mener du kan få hele stigen til å være inni garasjen, ihvertfall en bitteliten stund, hvis du løper fort med den slik at den blir lengdekontrahert. Hvis du da har noen som står klare til å lukke og åpne dørene ettersom det trengs kan vi et øyblikk ha situasjonen som vist her.

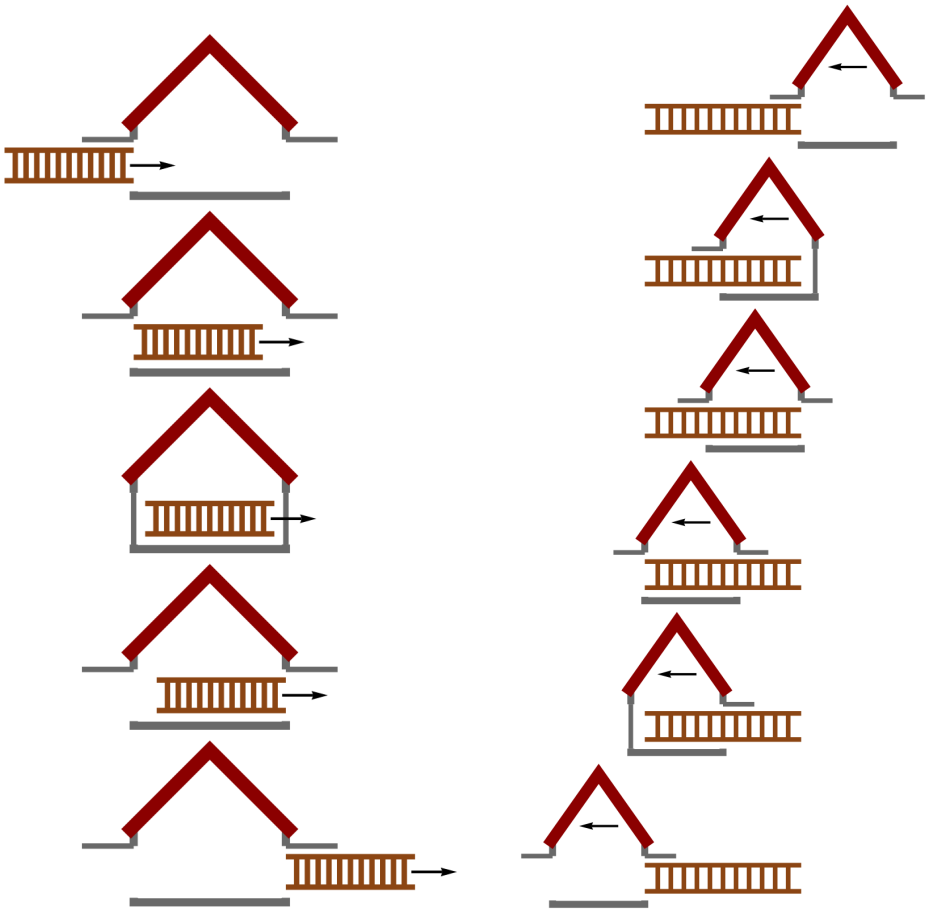


Stigen er jo i rask bevegelse, så døra bak må være netopp lukket og døra foran må åpnes ganske snart for at det ikke skal bli hull i noen av dørene. Men en kort stund bør vi ha hele stigen inni garasjen med begge dørene lukket. Og stigen er ikke i kontakt med noen av dørene noen gang, slik at de ikke blir ødelat på noen måte.

Dette er i et referansesystem der garasjen står i ro og stigen er i bevegelse med farta v, vi kaller det system S. Men vi bør jo kunne beskrive det samme fra et referansesystem, S', der stigen er i ro, og følgelig garasjen i bevegelse med fart $-v$. Men her blir det tilsynelatende krise, for nå er stigen like lang som vanlig, men garasjen kontraheres slik at det virker umulig at stigen kan få plass.



Hvordan kan det som skjer beskrives i system S'? Nøkkelen ligger i relativitet av samtidighet. I system S er begge dørene lukket samtidig, men siden de er på ulike posisjoner i rommet vil hendelser som er samtidige på begge dørene i system S ikke være samtidige i system S'. Her ser vi hele forløpet sett fra begge systemene (S til venstre, S' til høyre)



I S lukkes altså bege dørene samtidig en liten stund mens hele stigen er inne i garasjen. I S' lukkes og åpnes døra til høyre før enden a stigen når dit, men venstre enden av stigen er fortsatt langt utenor venstre dør. Først etter at venstre enden har pasert inn lukkes venstre dør. Dørene er altså aldri lukket samtidig.

Dette ressonnementet virker som en overbevisende forklaring, men ved å bruke Lorentztransformasjonen kan vi vise kvantitativt hva som skjer. For å gjøre det konkret velger vi at hvilelengden til stigen er l_0 = 5,0 m, hvilelengden til garasjen er L_0 = 4,0 m, og den relative farta mellom stigen og garasjen er $v = 0,8c$. Da blir

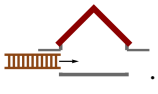
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1,67.$$

De kontraherte lengdene til stigen (i S) og garasjen (i S') er da

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = 3,0 \text{ m} \qquad L = \frac{L_0}{\gamma} = 2,4 \text{ m}.$$

Vi har altså $l < L_0$ slik at stigen får plass i garasjen i S, men selfølgelig $l_0 > L$ slik at stigen ikke får plass i S'.

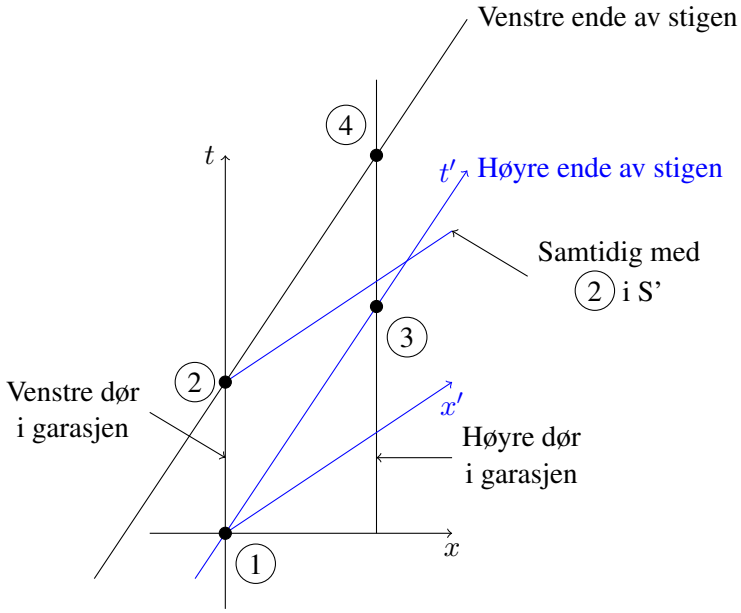
Vi ser på fire hendelser

(1) Høyre ende av stigen passerer venstre dør .

(2) Venstre ende av stigen passerer venstre dør .

(3) Høyre ende av stigen passerer høyre dør .

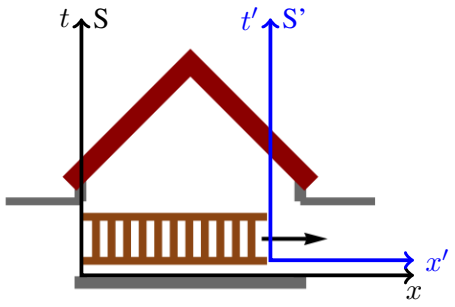
(4) Venstre ende av stigen passerer høyre dør .



Vi definerer koordinatsystemene ved at hendelse 1 har koordinater

$$(x_1, t_1) = (x_1', t_1') = (0, 0).$$

Det betyr at origo for S ligger i venstre dør på garasjen, og origo for S' ligger i høyre ende av stigen



Vi kan da regne ut koordinatene til de andre hendelsene

Hendelse 2:

$$x_2 = 0, \qquad t_2 = \frac{l}{u} = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) = -\gamma l = -l_0 = -5 \text{ m}.$$
$$t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = \frac{l_0}{u} = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Hendelse 3:

$$x_3 = L_0 = 4 \text{ m}, \qquad t_3 = \frac{L_0}{u} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

$$x_3' = \gamma(x_3 - vt_3) = -\gamma(L_0 - v\frac{L_0}{u}) = 0.$$
$$t_3' = \gamma(t_3 - \frac{v}{c^2}x_3) = \frac{L}{u} = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s} < t_2'.$$

Hendelse 4:

$$x_4 = L_0 = 4 \text{ m}, \qquad t_4 = t_2 + \frac{L_0}{u} = \frac{l_0}{\gamma u} + \frac{L_0}{u}.$$

$$x_4' = \gamma(x_4 - vt_4) = -\gamma(L_0 - v\frac{L_0}{u} + \frac{L_0}{u}) = -l_0.$$
$$t_4' = \gamma(t_4 - \frac{v}{c^2}x_4) = t_3' + \frac{l_0}{u}.$$

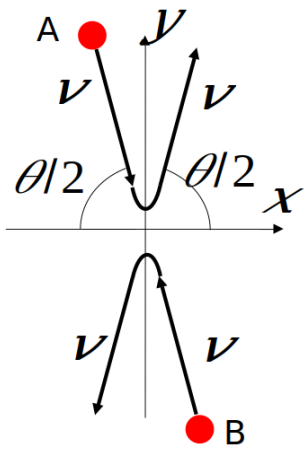
Det viktigste vi leser ut av dette er at $t_3' < t_2'$ som stemmer med det vi ressonerte oss fram til over: I S' er det slik at hendelse 3 skjer før hendelse 2.

3 Relativistisk driv

For ikke-relativistisk bevegelse har vi uttrykket for driv

$$p = mv$$

Vi skal vise at vi må endre dette uttrykket i relativitetsteori. Vi ser på en elastisk kollisjon mellom to partikler som i utgangspunktet har lik masse og motsatte hastigheter.

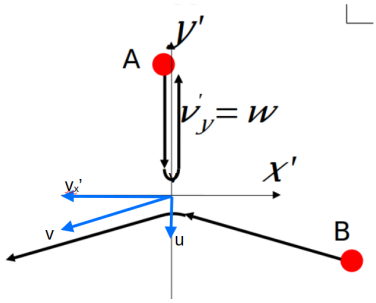


Vi tipper at driv fortsatt er i samme retning som hastighetsvektoren, dvs at

$$\vec{p} = m_v \vec{v}$$

Her har vi kalt proporsjonalitetsfaktoren m_v for å minne oss om at den er en funksjon av farta, og at den bør bli lik massen når $v \ll c$ (m_v kalles ofte relativistisk masse). Vi vil bestemme m_v ved å kreve at driv fortsatt er bevart i kollisjoner

La oss se på kollisjonen i et referansesystem S' der den ene partikkelen beveger seg vertikalt ned, og så opp igjen med fart w. Den andre partikkelen her da en horisontal fart v'_x og en vertikal fart u.



Endringen i driv for den øverste partikkelen er da

$$\Delta p_A = 2m_w w.$$

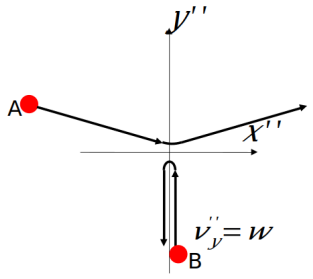
For den nederste partikkelen er driv i x-retning bevart, mens endringen i driv i y-retning er

$$\Delta p_B = 2m_v u$$

der v er farta til partikkel B i system S. Siden totalt driv er bevart er

$$m_w w = m_v u.$$

For å relatere u til w skifter vi til referansesystem S" som beveger seg mot venstre med farta v'_x i forhold til S'



Partiklene bytter roller, og nå går B rett opp og ned med farta w, mens A beveger seg med fart v. Sammenhengen mellom w og u i system S' er alts åden samme som sammenhengen mellom y-komponentene til farta til A i system S' og S". For å finne denne tenker vi på partikkel A fra kollisjonsøyeblikket (t'=0). Posisjonen (i rom og tid) til A i S' er da

$$t' \qquad x' = 0 \qquad y' = wt'.$$

Tilsvarende koordinater i S" er

$$t'' = \gamma(t' + \frac{v'_x}{c^2}x') = \gamma t' \qquad y'' = y'$$

(x'' trenger vi ikke og $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_x'^2/c^2}}$). Farta i y-retning er da

$$u = \frac{y''}{t''} = \frac{w}{\gamma}.$$

som gir

$$m_w = \frac{m_v}{\gamma}.$$

For å finne sammenhengen vi ønsker tar vi grensa der $w \to 0$. Da blir $v'_x \approx v$ og

$$m_0 = m_v\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Dermed er

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

4 Relativistisk energi

Vi regner ut arbeidet som skal til for å akselerere et legeme med massen m til farta v. Dette er akkurat det samme som vi gjorde for å finne uttrykket $K = \frac{1}{2}mv^2$ for en ikke-relativisktisk bevegelse, bare at vi må bruke det nye relativistiske uttrykket for bevegelsesmengde, $p = \gamma mv$.

$$W = \int F ds = \int \frac{dp}{dt} ds = \int v dp = \gamma m v^2 - \int \gamma m v dv = \gamma m v^2 + \frac{1}{2} m c^2 \int w^{-1/2} dw = \gamma m c^2 + C.$$

Her er gjorde vi først delvis integrasjon og så substitusjonen $w = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ (sjekk regninga selv). Integrasjonskonstanten besetemmer vi ut fra at arbeidet er null når farta er null, som gir $C = -mc^2$. Dermed har vi det relativistiske uttrykket for kinetisk energi

$$K = \gamma m c^2 - mc^2.$$

Vi ser at den kinetiske energien er differansen mellom to ledd, som vi tolker som den totale energien etter og før akselerasjonen. Dvs. at den totale energien er

$$E = \gamma m c^2$$

og at når farta er null har vi hvileenergien (eller masseenergien)

$$E = mc^2.$$

Vi kan også sjekke at for lav fart ($v \ll c$) gjelder tilnærmet det vanlige uttrykket for kinetisk energi. Vi Taylorutvikler

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots$$

og får dermed

$$K = \gamma m c^2 - mc^2 \approx (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots) mc^2 - mc^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \cdots .$$