Forelesningsnotater, FYS1100 uke 2

Joakim Bergli

1 Sammenhengen mellom posisjon, fart og akselerasjon

En partikkel beveger seg langs ei linje, med posisjonen $x(t)$ gitt som en funksjon av tiden t. Da er farta

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

og akselerasjonen

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ofte har vi bruk for å gå motsatt vei, og kjenner akselerasjonen og vil finne farta og posisjonen. Da er

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt' \tag{1}$$

og

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')dt'. \tag{2}$$

Her er $v_0 = v(0)$ farta og $x_0 = x(0)$ posisjonen ved $t = 0$.

2 Eksempler

2.1 Fallskjermhopp

Du hopper i fallskjerm og trekker i snoren når du er 5000 m over bakken. Deretter faller du med konstant hastighet på 20 m/s. Hvor lang tid tar det før du treffer bakken?

Vi definerer et koordintasystem med y-aksen vertikalt oppover. Vi lar $y = 0$ svare til bakkenivået. Det betyr at ved tida $t = 0$ er posisjonen $y(0) = y_0 = 5000$ m. Du beveger deg med konstant hastighet $v_0 = -20$ m/s, som er negativ fordi den er i motsatt retning av den valgte positive retningen for y-aksen. Posisjonen som funksjon av tida er da

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(t')dt' = y_0 + \int_0^t v_0 dt' = y_0 + v_0 t.$$

Du treffer bakken ved tida T (legg merke til at vi bruker et eget symbol for hvert bestemte tidspunkt og andre størrelser), og siden dette svarer til $y = 0$ har vi

$$y(T) = y_0 + v_0 T = 0$$

som gir at

$$T = -\frac{y_0}{v_0} = -\frac{5000 \text{ m}}{-20 \text{ m/s}} = 250 \text{ s} \approx 2,5 \cdot 10^2 \text{ s}.$$

2.2 Bevegelse med konstant akselerasjon

Du står øverst på en klippe og kaster en ball oppover fra et punkt 4,0 m over bakken med en hastighet på 10 m/s. Tyngdeakselerasjon er g = 9,8 m/s^2. Vi ser bort fra luftmotstand. Hva er den maksimale høyden til ballen? Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken?

Vi definerer y-aksen vertikalt oppover, og har dermed at akselerasjonen er konstant $a = -g$. Negativ fordi den er motsatt i forhold til valgt positiv retning. Initialbetingelsene er $y(0) = y_0 = 4,0$ m og $v(0) = v_0 = 10$ m/s. Da har vi at

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt' = v_0 - gt.$$

Det høyeste punktet er ved tida t_h slik at

$$v(t_h) = v_0 - gt_h = 0$$

som vi løser og finner

$$t_h = \frac{v_0}{g}.$$

Legg merke til at vi ikke regner ut dette numerisk siden vi ikke er bedt om å finne denne tida. Vi beholder heller uttrykket og setter det inn seinere. Høyden ved tida t finner vi fra

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(t')dt' = y_0 + \int_0^t (v_0 - gt')dt' = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{3}$$

Den maksimale høyden er

$$y(t_h) = y_0 + v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} \approx 9,1 \text{ m}.$$

For å finne tida t_b den når bakken går vi tilbake til det generelle uttrykket (3). t_b må være den tida som gjør at dette uttrykket blir null

$$y(t_b) = y_0 + v_0 t_b - \frac{1}{2}gt_b^2 = 0.$$

Løsningen til denne likninga er

$$t_b = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g} = \begin{cases} 2,38 \text{ s} \\ -0,34 \text{ s} \end{cases}.$$

Vi får to løsninger, den positive er den som svarer til den situasjonen vi tenker på. Den negative er den tida ballen måtte passert bakken på vei opp for å komme til høyden y_0 med farta v_0 ved tida $t = 0$.

2.3 To biler

To biler kjører på en rett vei. Den første kjører med konstant fart, 80 km/t. Den andre står i ro i et kryss. Idet den første bilen passerer kjører den andre inn på veien, og akselererer med konstant akselerasjon. Hvor stor må akselerasjonen være for at den akkurat skal ta igjen den første bilen ved neste kryss som er 1,2 km unna?

Vi kaller farta til den første bilen $v_1 = 80$ km/t. Farta til den andre bilen kaller vi $v_2(t)$ med initalbetingelsen $v_2(0) = 0$. Akselerasjonen til bil 2 er a_2, og vi velger koordinatakse slik at origo er i krysset. Det betyr at begge bilene er i posisjon $x = 0$ vet $t = 0$. Posisjonene til de to bilene blir da

$$x_1(t) = v_1 t$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

Vi kaller posisjonen de skal komme til samtidig x_s = 1,2 km, og tidspunktet de er der t_s. Da er

$$x_1(t_s) = x_2(t_s) = x_s,$$

som betyr at

$$x_s = v_1 t_s \qquad \text{og} \qquad x_s = \frac{1}{2} a_2 t_s^2.$$

Den første likninga gir

$$t_s = \frac{x_s}{v_1}$$

som vi kan sette inn i den andre og få

$$x_s = \frac{1}{2} a_2 \frac{x_s^2}{v_1^2}.$$

Dermed får vi

$$a_2 = \frac{2v_1^2}{x_s}.$$

3 Numerisk integrasjon

Vi tar utgangspunkt i at fart er derivert av posisjon

$$v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

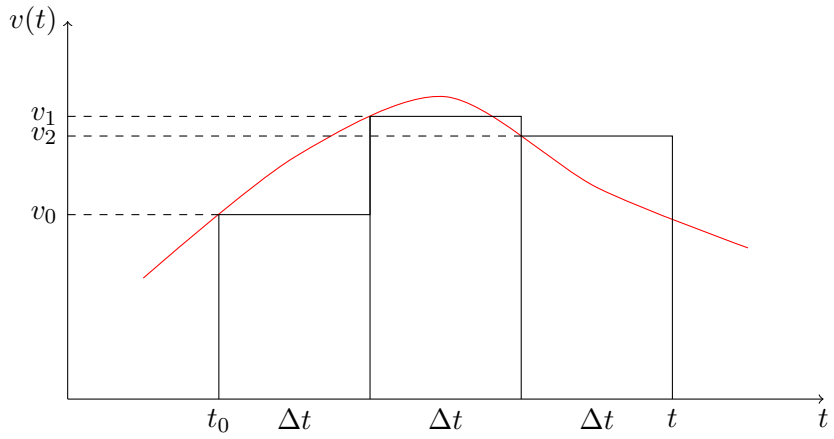
For å gå andre veien integrerer vi begge sider med hensyn på t fra starttida t_0 til sluttida t_1

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dt} dt = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} dx = x(t_1) - x(t_0).$$

Det er vanlig å kalle $x(0) = x_0$ og bytte ut t_1 med t som variabel for sluttida. For å ikke få to variable med samme symbol bytter vi da t i integrasjonen med t' og får

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'. \tag{4}$$

Vi kan få en bedre forståelse av dette uttrykket dersom vi går tilbake til definisjonen av integralet i form av en sum av mange smale rektangler (i grensa der antallet rektangler går mot uendelig og bredden mot null).



Arealet til det første rektanglet er

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t.$$

Dette er strekningen man beveger seg om man har den konstante farta v_0 i tida Δt. Tilsvarende er

$$\Delta x_2 = v_1 \Delta t.$$

strekningen vi beveger oss med den kosntante farta v_1 i tid Δt og så videre. Vi kan altså tenke oss at istedenfor at farta endres kontinuerlig gjør den plutselige hopp på slutten av hvert tidsintervall og er konstant i hvert intervall. Hvis vi starter i $x(t_0) = x_0$ er da posisjonen ved tida t

$$x(t) \approx x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots . \tag{5}$$

der hvert ledd er forflytningen i det tilsvarende tidsintervallet. Uttrykket (4) kommer altså fra den vanlige formelen for bevegelse med konstant fart, hvis vi buker den på mange korte tidsintervaller etter hverandre, men lar farta variere fra intervall til intervall.

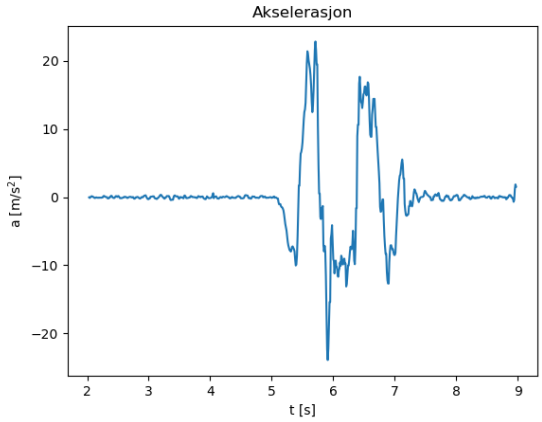
Samme tankegang kan vi også bruke for å forstå hvordan farta er integralet av akselerasjonen. Ikke bare gir dette en fin måte å tenke på kontinuerlig varierende akselerasjon og fart, men vi kan bruke det som utgangspunkt for å regne ut fart og posisjon hvis vi har målt akselerasjonen. Med mobiltelefon er det lett å måle akselerasjon, og vi får da en liste med målte verdier ved forskjellige tidspunkter. Vi får altså direkte bare verdiene for diskrete punkter, og kan anta at den ikke forandrer seg fra et tidspunkt til det neste. Det betyr at vi får en sum av mange små endringer som i likning (5). Vi kommer tilbake til dette seinere når vi har lært litt mer programmering, her tar vi bare et eksempel.

3.1 Eksempel: Akselerasjon i et hopp

Med mobiltelefonen har vi målt akselerasjonen som funksjon av tida i et vertikalt hopp. Det gir data i form av samsvarende verdier for akselerasjon og tid

t [s]	a [m/s^2]
$t_0 = 2.031461180$	$a_0 =$ -0.2216758728
$t_1 = 2.041458746$	$a_1 =$ -0.3029756546
$t_2 = 2.051456146$	$a_2 =$ -0.2310571671
$t_3 = 2.061453679$	$a_3 =$ -0.09466075897
$\vdots$	$\vdots$

Grafen for den målte akselerasjonen er



Hvis vi tenker at akselerasjonen er konstant i hvert tidsintervall kan vi regne ut farta ved slutten av hvert intervall hvis vi vet den i starten av intervallet. I dette eksampelet kan vi anta at $v_0 = v(t_0) = 0$ siden vi stod i ro før vi hoppet. Da er

$$v_{i+1} = v_i + a_i(t_{i+1} - t_i)$$

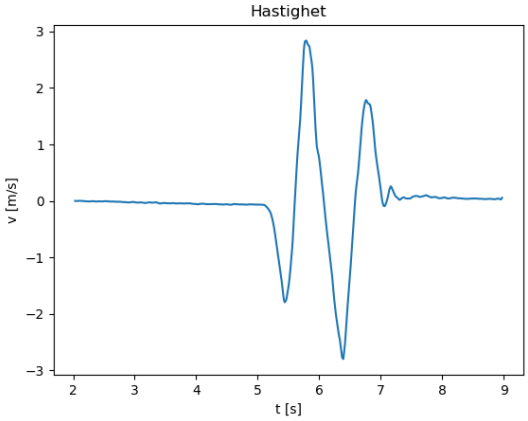
Her har vi antatt at akselerasjonen er konstant lik a_i i hele intervallet fra t_i til t_{i+1}. Vi kunne like godt brukt a_{i+1} (eller gjennomsnittet av de to).

Tilsvarende kan vi finne posisjonen

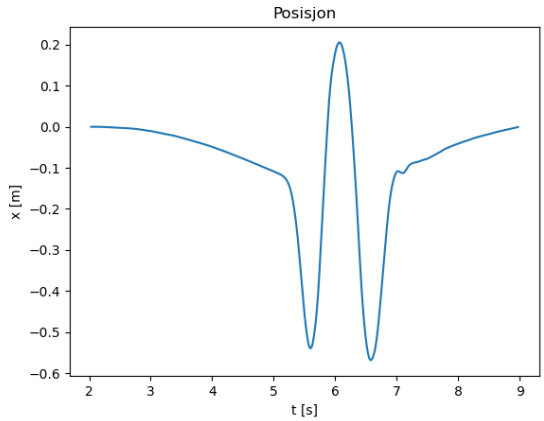
$$x_{i+1} = x_i + v_{i+1}(t_{i+1} - t_i)$$

Her har vi antatt at farta er v_{i+1} i hele intervallet, og igjen kunne vi også brukt v_i. I denne situasjonen er det ikke noen spesiell grunn til å velge den ene eller den andre verdien, men når vi seinere skal løse differensiallikninger numerisk kan det påvirke resultatet. vi skal komme tilbake til dette seinere.

Hvordan kan vi da finne ut hvor høyt personen hoppet? Vi integrerer en gang og finner farta.



Så integrerer vi en gang til og finner posisjonen.



Vi skal lære hvordan vi koder dette seinere, men her er programmet som gjør integralene og plotter grafene for dem som vil se på det

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Starter med tomme lister for t og a
a = []
t = []

# Leser data fra fil
with open("akselerasjonUnderHopp.txt", "r") as infile:
    for line in infile:
        ls = line.split()
        t.append(float(ls[0]))
        a.append(float(ls[1]))

# Lager tomme arrays for v og x
n = len(t)
v = np.zeros(n)
x = np.zeros(n)

#Integrerer numerisk for å finne fart og posisjon
for i in range(len(t)-1):
    dt = t[i+1]-t[i]
    v[i+1] = v[i] + a[i]*dt
    x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt

plt.plot(t,a)
plt.title("Akselerasjon")
plt.xlabel(r't [s]')
plt.ylabel(r'a [m/s$^2$]')
plt.savefig('akselerasjon.png')
plt.clf()
plt.plot(t,v)
plt.title("Hastighet")
plt.xlabel(r't [s]')
plt.ylabel(r'v [m/s]')
plt.savefig('fart.png')
plt.clf()
plt.plot(t,x)
plt.title("Posisjon")
plt.xlabel(r't [s]')
plt.ylabel(r'x [m]')
plt.savefig('posisjon.png')
plt.show()
```