Forelesningsnotater, FYS1100 uke 4

Joakim Bergli

1 Fall med luftmotstand

Vi ser på en ball som faller vertikalt nedover, og vi tar hensyn til luftmotstanden. Vi antar for enkelhets skyld at luftmotstanden er proporsjonal med farta, selv om vi vet at dette ikke er realistisk (for støvkorn kan det være reelt, og for ting som ikke er for store som synker i vann). Vi velger positiv retning nedover, og har to krefter som virker: Tyngden mg i positiv retning, og luftmotstanden $F_L = kv$ i negativ retning. Da er Newtons 2. lov

$$ma = mg - kv.$$

For å finne hvordan farta varierer med tida bruker vi at akselerasjonen er den deriverte av farta. Dermed har vi

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{1}$$

Dette er et eksempel på en differensiallikning (som vi ofte forkortet kaller en difflikning). Den sier at den deriverte av funksjonen $v(t)$ er et uttrykk som inneholder den samme funksjonen. Til forskjell fra vanlige likninger, der løsningen er et tall, er det altså en ukjent funksjon vi skal finne når vi har en difflikning. Hvordan kan vi løse denne likninga? Vi deler begge sider med uttrykket på høyre side og får

$$\frac{1}{g - \frac{k}{m}v}\frac{dv}{dt} = 1.$$

Begge sider av denne likninga er funksjoner av t, og hvis de to funksjonene er like, må også integralet av dem være like. Så vi må ha at

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v}\frac{dv}{dt}dt = \int dt.$$

Integralet på høyre side er av den typen vi kan løse ved å skifte integrasjonsvariabel (integrasjon ved substitusjon). Dermed får vi

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v}dv = \int dt.$$

Begge disse integralene kan vi løse og få

$$-\frac{m}{k}\ln(g - \frac{k}{m}v) = t + C$$

der C er en integrasjonskonstant. Selvfølgelig får vi en ubestemt konstant i begge integralene, men vi kan flytte den ene over til andre siden og kombinere dem, så uttrykket over er helt generelt. Vi kan så løse for v

$$\ln(g - \frac{k}{m}v) = -\frac{k}{m}(t + C)$$
$$g - \frac{k}{m}v = Ae^{-\frac{k}{m}t}$$

Her er $A = e^{-\frac{k}{m}C}$, men siden C er en vilkårlig konstant kan vi like godt si at A er en vilkårlig (positiv) konstant. Vi finner da at

$$v(t) = \frac{m}{k}(g - Ae^{-\frac{k}{m}t}). \tag{2}$$

Her har vi skrevet $v(t)$ for v for å minne oss selv på at det er en funksjon av t vi har funnet. Egentlig burde vi ha skrevet $v(t)$ hele veien, men vi forkorter det ofte til v og husker på at det er en funkjon av t for å gjøre uttrykkene mer oversiktelige.

Alle funksjoner på formen (2) passer i likninga (1) (som du lett kan sjekke ved å derivere), uansett hvilken verdi vi velger for A. For å finne den løsninga som svarer til en gitt situasjon trenger vi å vite verdien av funksjonen ved et bestemt tidspunkt. Dette kalles en initialbetingelse. For eksempel kan vi tenke at vi slipper ballen fra ro ved tida $t = 0$. Det betyr at farta $v(0) = 0$. Hvis vi setter inn i løsnigna vår har vi

$$v(0) = \frac{m}{k}(g - A) = 0,$$

som må bety at $A = g$. Dermed har vi at løsninga som starter i ro blir

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

2 Separable differensiallikninger

Likninga i eksempelet over er et eksempel på en type differensiallikninger som vi kaller separable likninger. Her forklarer vi generelt hvordan vi går fram for å løse slike.

En difflikning for funksjonen $x(t)$ er separabel hvis den kan skrives på formen

$$q(x)\dot{x} = p(t),$$

der $q(x)$ og $p(t)$ er vilkårlige funksjoner. Den kan da løses ved å integrere begge sider mhp t og bruke substitusjon på venstre side

$$\int q(x)dx = \int p(t)dt$$

Hvis begge disse integralene lar seg løse får vi

$$Q(x) = P(t) + C$$

der $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$ og C er en integrasjonskonstant som må bestemmes fra initialbetingelsen $x(t_0) = x_0$. Denne likninga må løses hvis vi skal ha et eksplisitt uttrykk for $x(t)$.

Integrasjonskonstanten C kan vi finne ved å sette inn for initialbetingelsen $x(t_0) = x_0$, og vi finner at

$$C = Q(x_0) - P(t_0).$$

Setter vi dette inn i løsninga har vi

$$Q(x) = P(t) + Q(x_0) - P(t_0),$$

eller

$$Q(x) - Q(x_0) = P(t) - P(t_0).$$

Vi ser at dette er lik

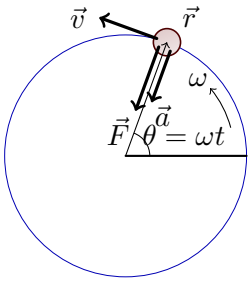
$$\int_{x_0}^{x} q(x')dx' = \int_{t_0}^{t} p(t')dt'.$$

Ofte vil vi derfor bruke disse bestemte integralene direkte og initalbetingelsen er allerede tatt hensyn til.

Her er det viktig å være klar over at de aller fleste difflikninger ikke kan løses på noen enkel måte som gir oss en forme for den uklente funksjonen. Det finners endel typer likninger som vi kan løse, og for hver type en framgangsmåte som gir oss løsninga. Men som oftest er det ikke mulig, og vi vil da gjerne løse den numerisk på en datamaskin. Dette kommer vi til å se mer på neste uke.

3 Sirkelbevegelse

Sentripetalakselerasjon har dere lært om på videregående. Vi husker at om et legeme går i en sirkel med radius r og konstant banefart v er sentripetalakselerasjonen rettet inn mot sentrum i sirkelen og har størrelsen $a = \frac{v^2}{r}$. Dette er egentlig alt vi trenger, og det kan brukes i andre sammenhenger også, hvis vi bare lærer noen ekstra ting.



1. Ofte vil vi bruke vinkelfart (som også kalles vinkelfrekvens) istedenfor banefart. Generelt er vinkelfarta

   $$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

   på samme måte som at farta er $v = \frac{dx}{dt}$. Hvis banefarta er konstant er vinkelfarta også det, og vinkelen som er tilbakelagt er $\theta = \omega t$. Sammenhengen mellom vinkelfart og banefart er $\omega = v/r$, og dermed kan vi skrive sentripetalakselerasjonen på to måter

   $$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

2. Dersom banefarta ikke er konstant vil akselerasjonsvektoren ha en komponent langs banen i tillegg til sentripetalakselerasjonen. Sentripetalakselerasjonen er fortsatt gitt ved samme formel så lenge vi bruker banefarta (eller vinkelfarta) ved det tidspunktet vi er interessert i.

3. Dersom banen ikke er en sirkel, men en annen krum kurve kan vi fortsatt bruke samme uttrykk, men for radien må vi sette inn radien i den sirkelen som krummer akkurat like mye som banen i det punktet vi ser på.

4 Ekstra: Fall med luftmotstand i dimensjonsløse variable

Dette avsnittet er ikke sentralt for resten av kurset, og kan leses av de som er spesielt interesserte. I mange tilfeller vil det å innføre dimensjonsløse variable gjøre det enklere å få oversikt over hvor mange uavhengige parametre som bestemmer løsningen av et problem, og forenkle analysen både ved analytiske og numeriske beregninger.

4.1 Dimensjonsløse variable

Vi ser først på det enkleste tilfellet der $F = kv$. Vi tenker at vi starter med å slippe en gjenstand fra ro slik at den faller vertikalt nedover. Vi velger origo der den slippes fra og positiv retning nedover. Newtons andre lov er da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Dermed er

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{3}$$

I denne likninga har vi tre parametre som påvirker løsninga: g, m og k. Vi ser med en gang at det bare er forholdet k/m som betyr noe, men det er fortsatt slik at det er to parametre g og k/m som bestemmer løsninga. Vi skal se hvordan vi kan relatere løsningene for forskjellige parameterverdier til hverandre slik at alle løsningene egentlig er skalerte versjoner av en enkelt generell formel. Vi skriver om

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}\left(\frac{gm}{k} - v\right).$$

Vi ser at kombinasjonen $v_T = \frac{gm}{k}$ har enhet m/s (sjekk det) som den må for at vi kan regne ut differansen $v_T - v$. Dette er altså en karakteristisk fart som er relevant for problemet. Vi kan forstå hva den betyr hvis vi ser hva som skjer når et legeme beveger seg med denne farta. Setter vi inn $v = v_T$ på høyre side ser vi at $\frac{dv}{dt} = 0$ og farta kommer da ikke til å forandre seg med tida. Vi kaller v_T terminalfarta og det er den farta der luftmotstanden er like stor som tyngdekrafta. Vi ser på forholdet k/m som har enhet $[k/m]$ = 1/s (sjekk det). Det betyr at det er en karakteristisk tidsskala i problemet $t_0 = m/k$.

t_0 og v_T er de naturlige tids- og hastighetsskalaene i problemet, og vi kan måle tida i enheter av t_0 og farta i enheter av v_T. Det betyr at vi definerer de dimensjonsløse variablene

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0} \qquad \bar{v} = \frac{v}{v_T}.$$

Uttrykt i disse variablene blir likning (3)

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = 1 - \bar{v}. \tag{4}$$

Denne likninga har ingen parametre, og beskriver da den generelle formen på løsninga $\bar{v}(\bar{t})$.

4.2 Løsning av en separabel differensiallikning

Likning (4) er en separabel difflikning. Vi løser den ved å omforme til

$$\frac{1}{1-\bar{v}}\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = 1$$

og så integrere begge sider med hensyn på $\bar{t}$

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{1-\bar{v}'}\frac{d\bar{v}'}{d\bar{t}'}d\bar{t}' = \int_0^{\bar{t}} d\bar{t}'.$$

Her har vi byttet navnet på variabelen $\bar{t}$ til $\bar{t}'$ inne i integralet og definert $\bar{v}' = \bar{v}(\bar{t}')$. I integralet på venstre side gjør vi så integralsjon ved substitusjon og skifter integrasjonsvariabelen til $\bar{v}'$

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{1}{1-\bar{v}'}\frac{d\bar{v}'}{d\bar{t}'}d\bar{t}' = \int_0^{\bar{v}} \frac{1}{1-\bar{v}'}d\bar{v}' = [-\ln|1-\bar{v}'|]_0^{\bar{v}} = -\ln|1-\bar{v}|.$$

Dermed har vi at

$$-\ln|1-\bar{v}| = \bar{t}$$

som gir

$$\bar{v} = 1 - e^{-\bar{t}}.$$

Vi kan nå sette inn de vanlige variablene igjen og får

$$v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$