Forelesningsnotater, FYS1100 uke 6

Joakim Bergli

1 Taylorpolynomer/Taylorrekker

Hvis vi har en funksjon $f(x)$ er det ofte nyttig å erstatte den med et polynom som ligner så mye som mulig på funksjonen i nærheten av et bestemt punkt x_0. Når vi sier at polynomet ligner mener vi at det har samme verdi, derivert, andrederivert osv som funksjonen. Vi vil altså finne et polynom

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots a_n(x - x_0)^n$$

slik at

$$T_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$
$$T_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$
$$T_n''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0)$$

og så videre. Det er ganske lett å se at

$$T_n^{(k)}(x_0) = k!a_k = f^{(k)}(x_0)$$

slik at vi kan finne koeffisientene

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Legg merke til at vi kan regne ut koeffisienten a_k uten å fjenne noen av de foregående og uten å vite hvor mange vi har tenkt å regne ut (dvs uten å kjenne n). Det betyr at om vi har regnet ut n-te gradspolynomet $T_n(x)$ og trenger en mer nøyaktig tilnærming, kan vi legge til høyere ordens ledd etter behov. Vi trenger derfor ikke å bestemme oss for n på forhånd, men skriver

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots . \qquad (1)$$

I grensa når vi tar med uendelig mange ledd og får ei uendelig rekke vil denne ofte bli en eksakt representasjon av funksjonen $f(x)$. Om vi stopper etter et endelig antall ledd blir det bare tilnærmet lik funksjonen i nærheten av x_0. Man kan finne ut noe om når slike rekker konvergerer (nærmer seg en bestemt verdi når antall ledd økes) og om feilen om i stopper etter n ledd. Dette vil dere lære om i MAT1100 seinere i semesteret.

2 Taylorrekker for noen vanlige funksjoner

2.1 $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

Vi kan regne ut

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(x_0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(x_0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(x_0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & f'''(x_0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f(n)(x) = e^x & f(n)(x_0) = 1. \end{array}$$

Dermed er

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots . \tag{2}$$

2.2 $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(x_0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(x_0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(x_0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(x_0) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ f(n)(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\cos(x) & n \text{ partall} \\ (-1)^{(n+1)/2}\sin(x) & n \text{ oddetall} \end{cases} & f(n)(x_0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & n \text{ partall} \\ 0 & n \text{ oddetall} \end{cases} . \end{array}$$

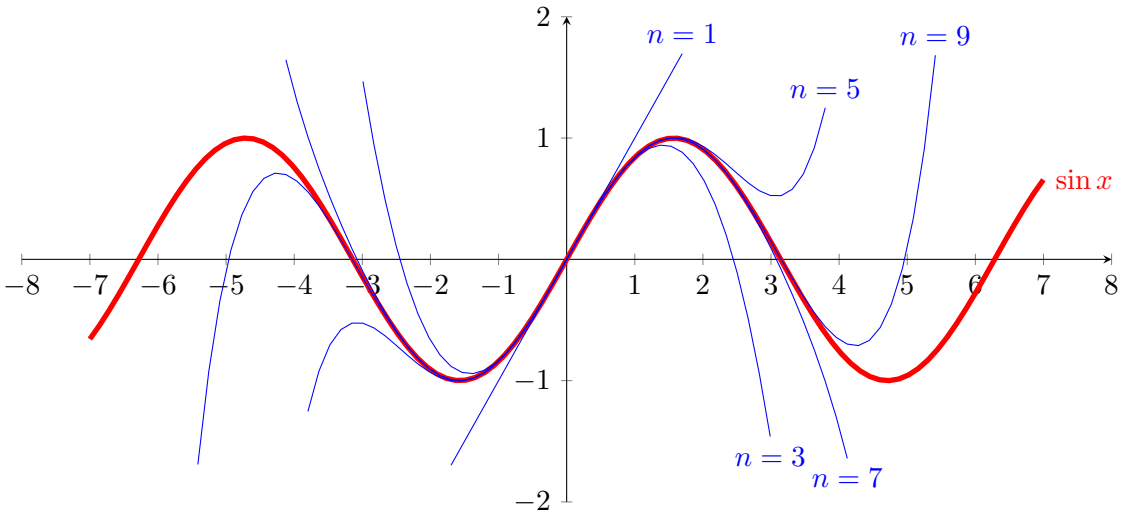
Dermed er

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots . \tag{3}$$

Tilsvarende kan vi finne (sjekk selv!) at

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots . \tag{4}$$

Under har vi plottet $\sin x$ sammen med de første Taylorpolynomene (n er graden til de forskjellige polynomene).



Vi ser at jo større grad polynomet har, jo lengre klarer det å følge sinusfunksjonen.

2.3 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$ (geometrisk rekke)

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{1-x} & f(x_0) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} & f'(x_0) = 1 \\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} & f''(x_0) = 2 \\ f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4} & f'''(x_0) = 3! \\ \vdots & \vdots \\ f(n)(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} & f(n)(x_0) = n!. \end{array}$$

Så da har vi at

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots . \tag{5}$$

Rekka på høyre side kalles ei geometrisk rekke.

3 Eksempel: Potensiell energi nær jorda

Vi har to uttrykk for potensiell energi i tyngdefeltet. Nær jorda, når vi kan tenke oss at tyngdekrafta er konstant er den potensielle energien

$$U_1(h) = mgh$$

der h er høyden over bakkenivå. Hvis vi beveger oss høyt, slik at vi må ta hensyn til at tyngdekrafta avtar med høyden, har vi potensiell energi

$$U_2(r) = -\frac{GMm}{r}$$

der M er jordmassen og r avstanden fra jordsenteret. Det siste uttrykket er mer generelt, og burde inneholde det første som et spesialtilfelle. For å sammenlikne dem må vi ta hensyn til at det er ulike nullpunkt, så vi må ha at

$$U_1(h) = U_2(r) - U_2(r_0)$$

der r_0 er jordradien, og dermed $h = r - r_0$ eller $r = r_0 + h$. Vi skriver om

$$U_2(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{r_0 + h} = -\frac{GMm}{r_0}\frac{1}{1 + h/r_0} = -\frac{GMm}{r_0}\frac{1}{1+a}$$

der vi har definert $a = h/r_0$. Vi er interessert i situasjonen der $h \ll r_0$ slik at $a \ll 1$. Legg merke til at vi har skrevet om uttrykket slik at vi har en dimensjonsløs liten parameter a. Når vi skal rekkeutvikle skal det alltid være i potenser av en dimensjonsløs størrelse. Ellers gir det ikke mening å si at noe er lite, det må alltid være at noe er lite i forhold til noe annet. I dette tilfellet er høyden h liten i forhold til jordradien r_0. Taylorrekka er (sjekk dette selv ved å bruke (1) eller (5))

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots$$

Vi får da at

$$U_2(r) = -\frac{GMm}{r_0}\left[1 - \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 + \cdots\right] = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMm}{r_0^2}h - \frac{GMm}{r_0^3}h^2 + \cdots$$

Om vi definerer potensiell energi relativt til bakkenivå, men fortsatt tar hensyn til at tyngdekrafta varierer med høyden er da den potensielle energien

$$U(h) = U_2(r) - U_2(r_0) = \frac{GMm}{r_0^2}h - \frac{GMm}{r_0^3}h^2 + \cdots .$$

Hvis vi definerer $g = \frac{GM}{r_0^2}$ er

$$U(h) = mgh - mgh\frac{h}{r_0} + \cdots .$$

Vi ser altså at når $h \ll r_0$ kan vi få tilbake det vanlige uttrykket mhg, og vi kan også anslå hvor mye feil det blir om vi erstatter det eksakte uttrykket $U(r)$ med dette (mer om feil i Taylorpolynomer kommer etter hvert i MAT1100).

4 Ofte kan vi forenkle regninga ved å kombinere kjente rekker

Det generelle uttrykket (1) kan i prinsippet alltid gi oss så mange ledd i Taylorrekka som vi ønsker. Men ofte kan det være komplisert å derivere flere ganger, og vi kan mange ganger finne de første leddene ved å kombinere rekker vi kjenner fra før for de vanligste funksjonene. Her er noen eksempler

4.1 $f(x) = e^{ax}$, $x_0 = 0$

Et enkelt eksempel er hvis vi har $f(x) = e^{ax}$. Da setter vi inn ax i rekka (2) for e^x og får

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \cdots .$$

4.2 $f(x) = \frac{1}{1-x^7}$, $x_0 = 0$

Hvis vi skal rekkeutvikle $f(x) = \frac{1}{1-x^7}$ rundt $x_0 = 0$ kan vi bruke Taylors formel direkte. Dette er veldig komplisert og ikke praktisk. Jeg regnet ut (med pc) de første deriverte

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x^7} \\
f'(x) &= \frac{7x^6}{(1-x^7)^2} \\
f''(x) &= \frac{98x^{12}}{(1-x^7)^3} + \frac{42x^5}{(1-x^7)^2} \\
f'''(x) &= \frac{2058x^{18}}{(1-x^7)^4} + \frac{1764x^{11}}{(1-x^7)^3} + \frac{210x^4}{(1-x^7)^2} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{57624x^{24}}{(1-x^7)^5} + \frac{74088x^{17}}{(1-x^7)^4} + \frac{22344x^{10}}{(1-x^7)^3} + \frac{840x^3}{(1-x^7)^2}
\end{aligned}$$

Her bruker vi notasjonen $f^{(n)}(x)$ for n ganger derivert. Vi ser

1. at dette fort blir veldig komplisert, og sjansene for at vi regner feil er store.
2. at alle leddene i alle deriverte vi har regnet ut så langt har x i en potens i telleren, så $f^{(n)}(0) = 0$ for de vi har regnet ut.
3. at potensen til x i siste leddet i hver derivert ser ut til å gå ned med en for hver derivert. Dermed kan vi mistenke at $f^{(7)}(0) \neq 0$.

Hvis vi isteden setter $u = x^7$ ser vi at

$$f(x) = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots = 1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \cdots .$$

4.3 $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$, $x_0 = 0$

Her bruker vi likning (5) (geometrisk rekke) og (4) (sinusfunksjonen).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sin x} &= 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots \\
&= 1 + x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots)^2 + \cdots \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \cdots .
\end{aligned}$$

4.4 $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$, $x_0 = 0$

Dette siste eksempelet er en advarsel om at ting kan gå galt om man ikke tenker seg om. Hvis vi følger samme framgangsmåte som forrige eksempel, bare bytter ut sinus med cosinus (likning (3)) får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\cos x} &= 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cdots \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots)^2 + \cdots \\ &= 3 - \frac{3}{2}x^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Men dette er bare tull. Siden $\cos 0 = 1$ vil $f(x)$ divergere for $x = 0$ og ikke bli 3 som vi regnet ut. Hva har gått galt? I første likhetstegnet har vi brukt den geometriske rekka som konvergerer når $\cos x < 1$ og som gir gode resultater hvis $\cos x \ll 1$. Dette går altså ikke bra når x er nær null, og svaret blir ikke riktig. En riktig rekke er (se om du kan vise dette)

$$\frac{1}{1-\cos x} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \cdots .$$

Vi ser at det første leddet divergerer når $x \to 0$ akkurat som $f(x)$. Men dette er ikke en Taylorrekke, og vi kommer ikke til å studere slike rekker i FYS1100.