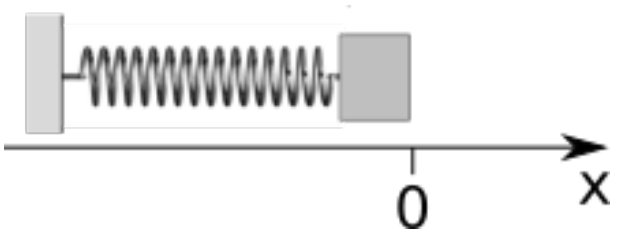
Forelesningsnotater, FYS1100 uke 7

Joakim Bergli

1 Harmonisk oscillator

Vi vil analysere en kloss med massen m festet til ei fjær med fjærkonstant k. Vi tenker at klossen kan bevege seg horisontalt uten friksjon, slik at den eneste krafta som påvirker den horisontale bevegelsen er fjærkrafta.



Om vi lar klossen ha posisjonen x og origo være i likevektsposisjonen til klossen (der fjæra verken er strukket eller presset sammen) er fjærkrafta $F = -kx$. Her er det negativt fortegn fordi krafta vil virke i motsatt retning av den retningen klossen har beveget seg til. Newtons 2. lov er da

$$ma = -kx,$$

som blir til differensiallikninga

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1}$$

når vi husker at akselerasjonen er den andrederiverte av posisjonen med hensyn på tid. Vi kaller dette en andreordens differensiallikning siden den inneholder en andrederivert. Vi liker ofte å skrive den om til

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2}$$

Et system beskrevet av denne likninga kaller vi ofte en harmonisk oscillator. Husk hva en slik differensiallikning betyr: Vi har en ukjent funksjon $x(t)$ og må finne en som passer i likninga. I dette tilfellet altså en som er slik at o mvi deriverer to ganger får vi tilbake samme funksjon multiplisert med $-\omega^2$. Husker vi dervasjonsreglene er det lett å gjette to mulige løsninger

$$x_1(t) = A\cos\omega t$$
$$x_2(t) = B\sin\omega t.$$

Det vi mener her er at om vi setter inn x_1 eller x_2 for x i (2) kommer likninga til å stemme. Her er $\cos\omega t = \cos(\omega t)$ men vi dropper ofte parentesen hvis det er opplagt at det er produktet ωt vi skal regne cosinus av.

Likninga (2) kalles en lineær homogen difflikning, som betyr at alle leddene har enten funksjonen $x(t)$ eller en av de deriverte i seg. Det er altså ikke noen ledd som bare er en funksjon av t. Slike likninger har den egenskapen at summen av to løsninger er en ny løsning. Dette er lett å se om vi definerer $x = x_1 + x_2$ og prøver å regne ut

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = -\omega^2(x_1 + x_2) = -\omega^2 x.$$

Dette gir oss den mest generelle løsninga

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{3}$$

der de to konstantene A og B må tilpasses initialbetingelsene.

Eksempel 1

Hvis vi trekker loddet til siden og så slipper det fra ro i posisjonen x_0 må vi ha initialbetingelsene

$$x(0) = x_0, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 0. \tag{4}$$

Hvis vi setter inn $t = 0$ i løsninga, likning (3), får vi

$$x(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A.$$

Dermed må $A = x_0$ for å stemme med (4). Vi får også

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

og dermed

$$\frac{dx}{dt}(0) = B\omega = 0$$

som betyr $B = 0$. I dette tilfellet får vi altså løsninga

$$x(t) = x_0\cos\omega t.$$

Eksempel 2

Hvis vi trekker loddet til siden i posisjonen x_0 og så dytter det i gang med startfart v_0 blir initialbetingelsene

$$x(0) = x_0, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = v_0. \tag{5}$$

Hvis vi igjen setter inn $t = 0$ i likning (3) får vi

$$x(0) = A = x_0$$

som før. Men nå blir

$$\frac{dx}{dt}(0) = B\omega = v_0$$

og dermed $B = \frac{v_0}{\omega}$. Løsninga blir da

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

For å få en løsning med initalbetingelsene (5) må vi altså kombinere sinus og cosinusfunksjonene.

2 Harmonisk oscillator med dempning

Svingninger som aldri dør ut er ikke så veldig realistisk. Det vanlige er at det er en eller annen form for motstand mot bevegelsen. Mest fordi det gir oss en likning vi klarer å løse valger vi en slags luftmotstand som er proposjonal med farten, $F_L = -cv = -c\frac{dx}{dt}$. Da blir differensiallikninga

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} \tag{6}$$

som vi kan skrive om til

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \gamma = \frac{c}{m}. \tag{7}$$

Her er det ikke like opplagt som for likning (2) hvordan vi skal finne mulige løsninger. Men det finnes et lite triks som gjør at vi kan fine to løsninger lett (og som vi skal se egentlig er det samme som vi brukte over). Vi kan gjette på at løsningen er

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

for en ukjent konstant λ, og så finne hvilken λ som gjør at det stemmer. La oss sette inn

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Vi ser at siden ekspoentialfunksjonen alltid kommer tilbake når vi deriverer den får alle leddene samme faktor $e^{\lambda t}$ som vi da kan forkorte bort. Da står vi igjen med

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0.$$

Legg merke til at dette ikke er en differensiallikning mer, men en helt vanlig andregradslikning for λ. Vi kaller den den karakteristiske likninga for likning (7). Som alle andregradslikninger har den to løsninger

$$\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}. \tag{8}$$

Dermed har vi to mulige løsninger

$$e^{\lambda_+ t} \qquad \text{og} \qquad e^{\lambda_- t}.$$

Som for likning (2) gjelder at summen av to løsninger er en mulig løsning, dermed er den generelle løsninga

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}.$$

Tilfelle 1: $\gamma < 2\omega$

Vi fokuserer først på tilfellet der det er liten motstand slik at $\gamma < 2\omega$ Da blir det et negativt tall under kvadratrota i likning (8), og vi definerer $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2/4}$ og kan da skrive

$$\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm i\bar{\omega}.$$

Løsninga kan da skrives som

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[Ae^{i\bar{\omega}t} + Be^{-i\bar{\omega}t}\right] \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[(A+B)\cos\bar{\omega}t + i(A-B)\sin\bar{\omega}t\right] \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[C\cos\bar{\omega}t + D\sin\bar{\omega}t\right] \end{aligned}$$

Der C og D er vilkårlige konstanter siden A og B er det. Noen kommentarer:

- Vi ser at selv om vi gjettet på en løsning i form av en eksponensialfunksjon fikk vi løsninger med sinus- og cosinusfunkjsoner. Dette fordi λ ble kompleks, og eksponensialfunksjonen med imaginære argumenter gir sinus- og cosinusfunkjsoner. Vi kunne altså brukt denne metoden på likning (2) over, og fått samme resultat som før (det er jo den samme likninga som (7) bare med $\gamma = 0$).
- Selv om $D = i(A - B)$ ser ut til å være imaginær vil både C og D bli reelle hvis initialbetingelsene er det. Det er A og B som blir komplekse.
- $\bar{\omega}$ er frekvensen for svingningene, som blir redusert i forhold til den opprinnelige ω. Men frekvensen er fortsatt uavhengig av amplituden.
- Denne metoden fungerer for alle likninger som er lineære (dvs at alle ledd er lineære i x eller deriverte av x), homogene (som betyr at alle ledd inne holder x eller deriverte av x) og har konstante koeffisienter (som betyr at γ og ω ikke er funksjoner av tid).

En slik kombinasjon av sinus- og cosinusfunksjoner med samme frekvens kan vi skrive om på en nyttig måte. Vi definerer $E = \sqrt{C^2 + D^2}$ og har da at

$$x(t) = Ee^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\frac{C}{E}\cos\bar{\omega}t + \frac{D}{E}\sin\bar{\omega}t\right]$$

Vi kan da se at

$$\left(\frac{C}{E}\right)^2 + \left(\frac{D}{E}\right)^2 = \frac{C^2}{C^2+D^2} + \frac{D^2}{C^2+D^2} = 1.$$

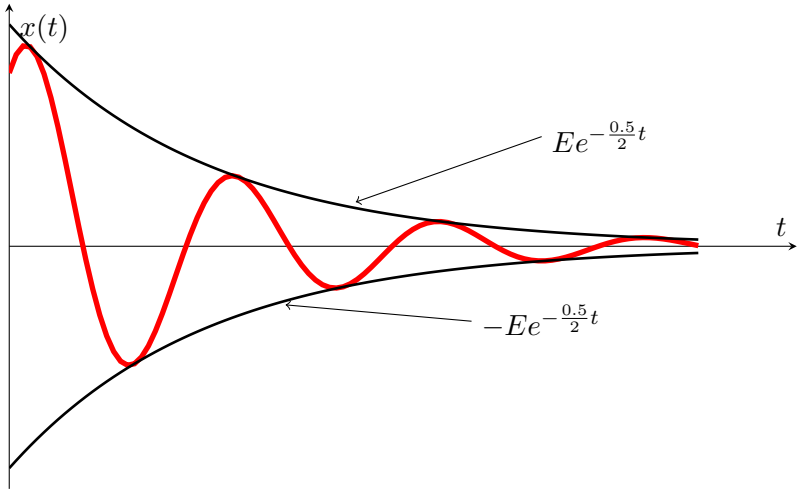
Det betyr at vi kan finne en vinkel ϕ slik at

$$\cos\phi = \frac{C}{E}, \qquad \sin\phi = \frac{D}{E}, \qquad \tan\phi = \frac{D}{C}.$$

Da blir

$$x(t) = Ee^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\bar{\omega}t\cos\phi + \sin\bar{\omega}t\sin\phi\right] = Ee^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\bar{\omega}t - \phi)$$

der vi bruker at $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Dermed har vi vist at en kombinasjon av sinus- og cosinusfunksjoner med samme frekvens kan skrives som en cosinusfunksjon med samme frekvens, men med en faseforskyvning og en justert amplitude. Det gjør det lett å skissere formen på løsninga, den blir generelt slik

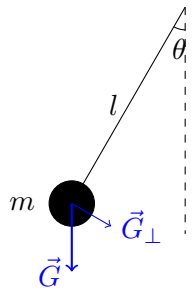


Fysisk gir det mening at om vi har motstand mot bevegelsen blir det fortsatt svingninger men med en redusert frekvens og med en amplitude som avtar med tida. Til slutt vil bevegelsen stoppe opp.

Tilfelle 2: $\gamma > 2\omega$ Her får vi reelle verdier for $\lambda_\pm$, og løsningen blir en sum av to eksponensialfunksjoner. Det betyr at motstanden er så stor at bevegelsen stopper opp uten å skifte retning noen gang, svingningene stopper opp før første halve periode. Ellers løser vi på samme måte som over. Det eneste vi ikke kan håndtere er dersom $\gamma = 2\omega$ og dermed $\lambda_+ = \lambda_-$. Vi får da ikke to løsninger som vi kan kombinere for å finne den generelle løsninga. Dette skal vi ikke se på i FYS1100, men jeg tror dere lærer det i MAT1100.

3 Pendel

Vi vil studere bevegelsen til en enkel pendel med lengden l og massen m.



Hvis θ er vinkelen mellom vertikalen og snora vil vi altså finne hvordan denne varierer med tida, dvs funksjonen $\theta(t)$. For å finne den riktige difflikninga dekomponerer vi tyngden parallelt med og vinkelrett på snora. Det er komponenten $mg\sin\theta$ vinkelrett på snora som gir baneakselerasjonen, og dermed er

$$ma_\perp = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

Det gir at

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta = -\omega^2\sin\theta, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Denne difflikninga er ikke lineær siden den har et ledd $\sin\theta$ som ikke er lineart i θ. Slike likninger er vanskelige å løse, og vi har ikke lært noen metoder som kan bukes på ikke-lineære andreordens likninger (men noen førsteordens likninger kan være separable og dermed løsbare selv om de ikke er lineære).

Men hvis θ er liten kan vi bruke Taylorutvikling og tilnærme sinusfunksjonen med et polynom

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

Når θ er liten nok vil alle leddene uten det første bli mye mindre enn dette, og vil tilnærmer $\sin\theta \approx \theta$. Vi får da den lineære likninga

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

som er den samme som (2) som vi allerede har løst og som har den generelle løsninga

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

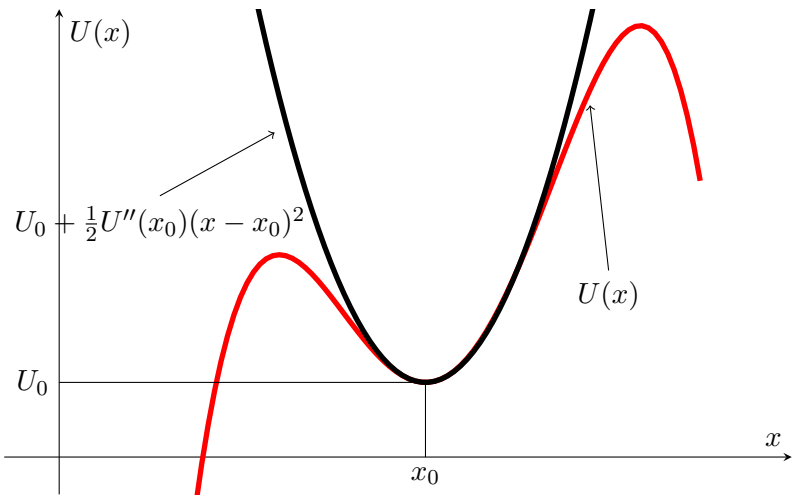
En ting vi kan lese ut av dette er perioden T til svingningene. Siden cosinusfunksjonen har periode 2π vil en periode svare til at $\omega T = 2\pi$ som betyr at perioden er

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Denne vil stemme for svingninger med små utslag, men hvis utslaget blir stort vil perioden bli lengre.

4 Små svingninger

Eksempelet med pendelen kan generaliseres til små svinginger om et stabilt likevektspunkt i andre tilfeller også. Hvis vi har ei kraft som har et nullpunkt ved $x = x_0$ og dette er et minimumspunkt for den tilsvarende potensielle energien $U(x)$ er x_0 et stabilt likevektspunkt.



Vi kaller den potensielle energien i likevektspunktet $U(x_0) = U_0$. Krafta er generelt gitt som

$$F = -U'(x).$$

Nær x_0 kan vi bruke Taylorpolynomet til andre orden

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

(hvorfor er førstegradsleddet null?) og krafta er tilsvarende

$$F \approx -U''(x_0)(x - x_0).$$

Dermed er

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F \approx -\frac{U''(x_0)}{m}(x - x_0).$$

Vi lar $y = x - x_0$ være avviket fra likevektsposisjonen og har da

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{U''(x_0)}{m}y = -\omega^2 y, \qquad \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}.$$

Vi får igjen tilbake likning (2) som vi allerede har løst. Små svingninger omkring et likevektspunkt vil alltid kunne behandles på denne måten.