# Diskusjonsoppgaver uke 6

Diskusjonsoppgaver i gruppetimen for smågrupper (3-4 personer).

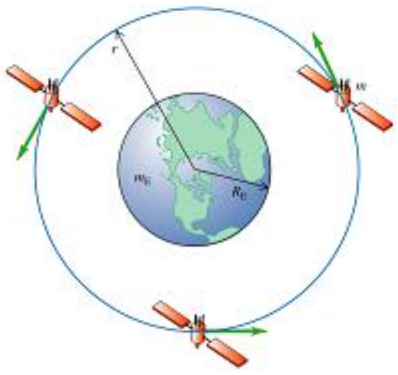
### D6.1 Pil og bue

Du skyter med pil og bue vertikalt opp. Når er den potensielle energien til pilen størst? Gjør det en forskjell om du tar med luftmotstanden eller ikke?

**Løsning:** Hvis vi ser bort fra luftmotstanden virker bare to krefter: en fjærkraft fra buen og gravitasjon. Før du slipper buen løs har pilen potensiell energi fra fjærkraften og ingen potensiell energi fra gravitasjon. I øyeblikket hvor pilen mister kontakt med buen er den kinetiske energien størst, mens potensiell energi fra fjærkraften er null. Pilen har fått bare en liten potensiell energi fra gravitasjon. I høyeste punkt på banen har pilen ingen kinetisk energi og bare potensiell energi fra gravitasjon. Siden alle krefter er konservative er den mekaniske energien bevart: den potensielle energien fra gravitasjon er like stor som den potensielle energien fra fjærkraften i utgangspunkt. Hvis vi tar hensyn til luftmotstanden gjelder ikke dette lenger. Luftmotstanden er fartsavhengig og ikke konservativ. Luftmotstanden gjør negativt arbeid på pilen, og den potensielle energien fra gravitasjon i det høyeste punktet er mindre enn den potensielle energien fra fjærkraften i starten.

### D6.2 Satellitt i bane

En satellitt beveger seg i en sirkelbane om Jorda. I løpet av en periode gjør gravitasjonskraften fra Jorda



a) Et positivt arbeid på satellitten.

b) Et negativt arbeid på satellitten.

c) Et positivt arbeid i en del av banen, og et negativt arbeid i resten av banen.

d) Null arbeid på satellitten under hele bevegelsen.

**Løsning:** Det siste svaralternativet er riktig. Satellitten går på en sirkelbane, dvs. den har konstant fart $v$ og den samme avstanden $r$ fra sentrum av Jorda hele tiden. Så den har hele tiden den samme potensielle energien og den samme kinetiske energien. Fra arbeid-energiteoremet:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Siden $v_0 = v_1$, er arbeidet null. Man kan også argumentere med at gravitasjonskraften hele tiden er normalt på hastighetsvektor, slik at prikkproduktet $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$.

## D6.3 Elliptisk bane

Dersom satellitten i oppgaven over hadde beveget seg på en elliptisk bane rundt Jorda, ville da svaret blitt annerledes?

**Løsning:** Ja, i en elliptisk bane vil det være annerledes. Gravitasjon er en konservativ kraft, og mekanisk energi er bevart. Men den potensielle energien forandrer seg ettersom satellittens avstand $r$ fra brennpunktet i ellipsen ikke lenger er konstant:

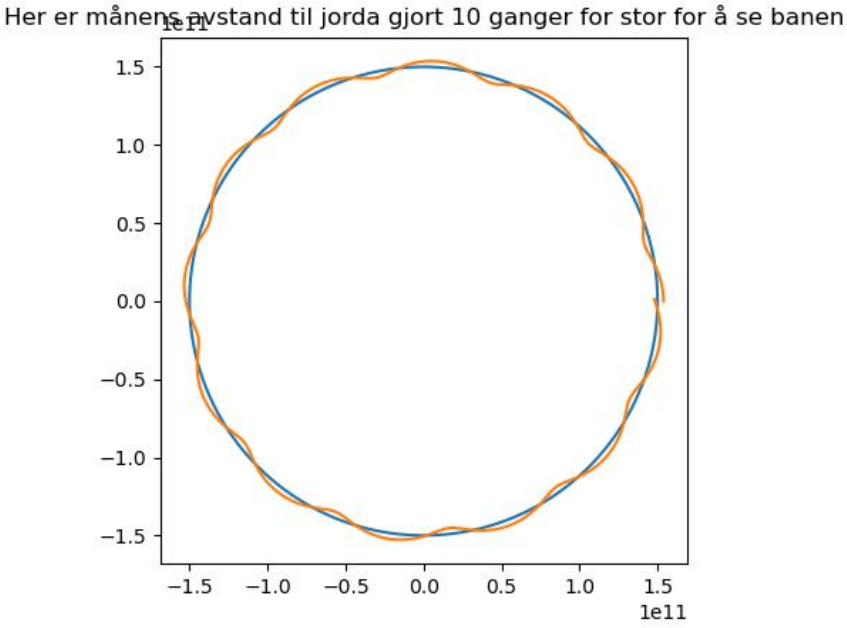
$$U(\vec{r}) = -\gamma\frac{mM}{r},$$

hvor $\gamma$ er gravitasjonskonstanten, $m$ er satellittmassen og $M$ er massen til Jorda. Dermed vil også den kinetiske energien forandre seg (øker når potensiell energi minker og omvendt). Dermed gjør gravitasjonskraften et positivt arbeid i en del av banen, og et negativt arbeid i resten av banen. Hvis vi ser på en hel periode, er summen av arbeidet gravitasjonen gjør lik null. I et gitt punkt på banen vil satellitten ha samme fart, og dermed $K_1 - K_0 = 0$.

## D6.4 Månen

a) Månen går i tilnærmet sirkelbane omkring jorda, og jorda går i tilnærmet sirkelbane omkring sola. Tegn banen til månen i et kordinatsystem der sola ligger i ro i origo.

**Løsning:**




b) Sammenlikn jordas og solas tyngdekraft på månen. Hva har det å si for krumningen av banen du tegnet i a)?

**Løsning:** La $R_j = 1,5 \cdot 10^{11}$ m være avstanden fra sola til jorda og $R_m = 3,84 \cdot 10^8$ m være avstanden fra jorda til månen. Massen til sola er $M_s = 2 \cdot 10^{30}$ kg, til jorda er $M_j = 6 \cdot 10^{24}$ kg og til månen $M_m$. Tyngdekrafta på månen fra jorda er

$$F_j = G\frac{M_j M_m}{R_m^2}$$

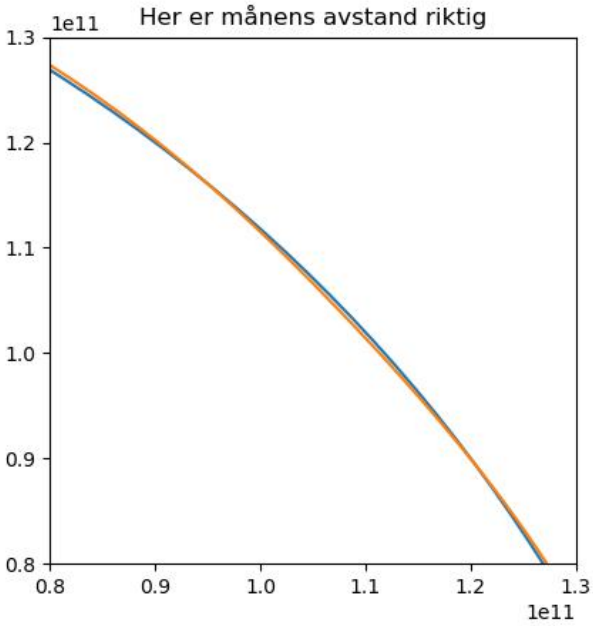
og tyngdekrafta på månen fra sola er

$$F_s = G\frac{M_s M_m}{R_j^2}$$

Her har vi tilnærmet satt avstanden fra sola til månen lik avstanden fra sola til jorda. Vi kan sammenlikne de to kreftene ved å regne ut forholdet

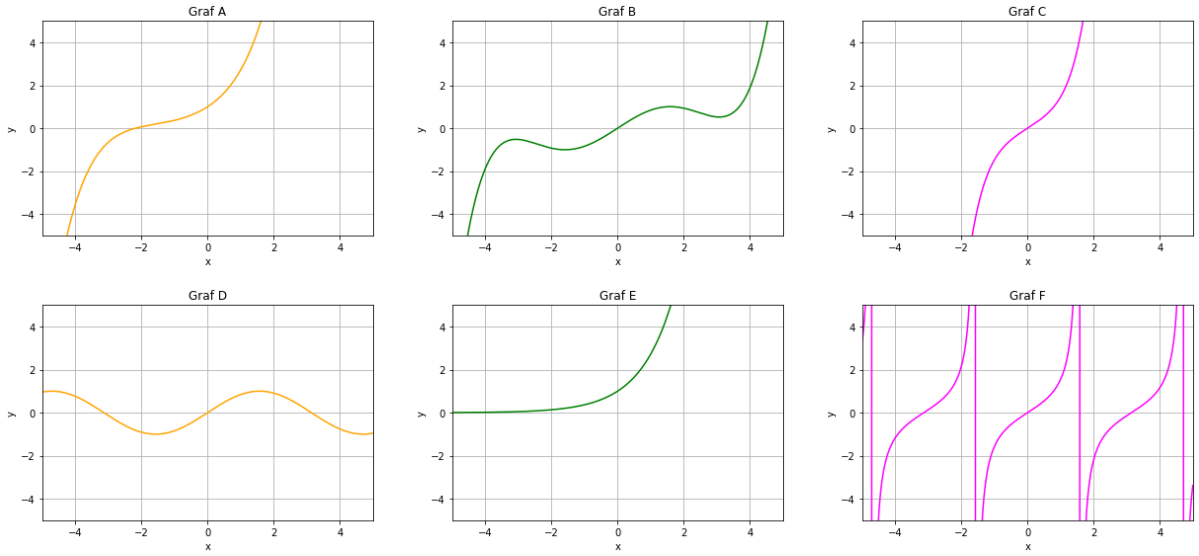
$$\frac{F_s}{F_j} = \frac{M_s R_m^2}{M_j R_j^2} = 2,2.$$

Tyngdekrafta fra sola er altså omtrent dobbelt så stor som den fra jorda. Hvorfor rives ikke månen bort fra jorda? Det betyr at månens bane alltid krummer innover mot sola. I figuren i a) ser det ut som at banen krummer utover når månen er nærmest sola, men dette er fordi vi måtte gjøre avstanden mellom jorda og månen kunstig stor for å se den. I et virkelig plot vil banen alltid krumme mot sola, som vi kan se på dette plottet der månebanen er tegnet riktig. **Løsning:**




## D6.5 Taylorpolynomer

Graf A-C er Taylorutviklinger av orden 5 rundt $a = 0$, mens graf D-F viser de faktiske funksjonene. Grafer med samme farge er ikke nødvendigvis korresponderende funksjoner.




a) Identifisér hvilke grafer som viser

(1) $\sin(x)$

(2) $e^x$

(3) $\tan(x)$

Bruk stikkord som asymptote, konvergere/divergere, periodisk og ekstremalpunkt(er) når dere argumenterer.

**Løsning:**

(1) En sinuskurve er periodisk, og har ingen asymptoter. Den har dessuten nullpunkter i $n\pi$, og ekstremaler i $n\pi/2$. Vi kan se at graf D er periodisk, og har de korrekte null- og ekstremalpunktene. Graf D må derfor være $\sin(x)$. Graf B likner på én periode av $\sin(x)$ i intervallet $x \in (-2,2)$, og har også de korrekte null- og ekstremalpunktene i dette intervallet. Derfor må graf B være Taylorutviklingen.

(2) $e^x$ vokser eksponentielt, og har ingen ekstremalpunkter. Dessuten skal grafen krysse $y$-aksen i $y = 1$. Grafen vil konvergere mot 0 på den negative $x-$aksen, og divergere på den positive. Graf E må derfor være $e^x$. På intervallet $x \in (-2,2)$ likner graf A svært mye på $e^x$ ved å konvergere mot 0 før $x = 0$ og så divergere etterpå. Denne grafen må derfor være Taylorutviklingen.

(3) $\tan(x)$ er en periodisk funksjon, med asymptoter for $x = n\pi/2$. Graf F må derfor være $\tan(x)$. Ingen av Taylorutviklingene er periodiske med asymptoter, men vi kan se at graf C oppfører seg svært likt som $\tan(x)$ innenfor intervallet $x \in (-2,2)$. Grafen er symmetrisk om 0, og ser ut til å ha svakt skrå asymptoter ved de ønskede $x$-verdiene. Graf C må derfor være Taylorutviklingen.

b) Hvilke sentrale egenskaper ved funksjonene klarer Taylorutviklingene å gjenskape i intervallet $x \in (-2,2)$?

**Løsning:** Generelt vil alltid Taylorutviklingen få riktig verdi for funksjonen i punktet man utvikler rundt.

(1) Gjenskaper den periodiske formen, og får med null- og ekstremalpunkter

(2) Får frem den eksponentielle veksten

(3) Gjenskaper asymptotene og nullpunktet

c) Hvilke egenskaper virker det vanskelig å gjenskape, dersom man ser på hele intervallet som grafene er tegnet på?

**Løsning:** Generelt vil funksjoner som ikke er polynomer være vanskelige å gjenskape eksakt dersom man ikke har med veldig mange ledd.

(1) Grafen ser ikke periodisk ut utenfor intervallet $x \in (-2,2)$, men dersom man tar med flere ledd i rekken vil man få med flere perioder

(2) Grafen divergerer mot $-\infty$ utenfor $x \in (-2,2)$, i stedet for å konvergere mot 0 som ønsket. $e^x$ skal egentlig ikke krysse $x$-aksen, noe Taylorutviklingen gjør

(3) Utviklingen er ikke periodisk, og uansett hvor mange ledd man tar med av rekken så vil man fortsatt kun få med én periode av funksjonen

d) Hvorfor kan man ikke utvikle $\ln(x)$ rundt $a = 0$?

**Løsning:** Man kan ikke rekkeutvikle $\ln(x)$ om punktet $a = 0$ grunnet at $\ln(x)$ er udefinert i $a$. Dersom vi skriver ut rekken så ser vi også at alle ledd av orden større enn 0 har 0 i nevneren, noe som gjør at leddene blir udefinert.

---

## Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

### D6.6 Reise i solsystemet

Hvilken av planetene i solsystemet er det vanskeligst å reise til?

**Løsning:** Merkur. Vi sammenlikner enerigen i sirkelbane i forskjellige avstander fra sola. Fra jorda er det størst forandring til Merkur.

### D6.7 Hvordan bruke raketten mest effektivt?

Du skal sende en romsonde bort fra jorda. Raketten du har har akkurat litt for lite drivstoff til å klare dette, derfor må du bruke en hjelperakett som bare kan være på i en kort tid i tillegg. Når er det best å bruke hjelperaketten?

**Løsning:** Det er best å bruke hjelpemotoren i starten. Hvis vi venter må hovedmotoren tilføre potensiell energi til dristoffet i hjelpemotoren, og denne energien er ikke til nytte fordi den ikke blir gitt til romsonden. Jo lettere vi kan gjøre raketten tidlig, jo bedre for å få stor fart.