Oppgavesett uke 1

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

TDS 1.1 Tykke ark

Estimér tykkelsen til siden i en typisk lærebok. Hva slags antakelser må du bruke for å komme frem til estimatet ditt?

Løsning: Legg sammen flere sider i boka, slik at du får en lett målbar 'bunke". For eksempel ble 20 sider av en valgt lærebok målt til å være 2mm tykke. Hver side er da 2mm/20=0.1mm=10^{-4}m tykk. Her antas det at det ikke er noe luft mellom sidene, og at boka var et perfekt rektangel. Dersom man bøyer boka, vil lengden man måler bli større. Dessuten må linjalen ligge helt flatt mot åpningen av boka for at målingen skal bli nøyaktig.

Her er det mange mulige fremgangsmåter, hovedpoenget med denne oppgaven er å reflektere rundt måling, estimater og antakelser.

TDS 1.2 Over dammen

En amerikaner kommer til UiO på utveksling, og har med seg badevekt, kjøkkenvekt og linjaler som ikke bruker det metriske SI-systemet. Hjelp hen med å konvertere de følgende størrelsene til SI-enheter.

a) 2.5 inches, når 1 inch er 25.44mm

b) 5 feet, når 1 foot er 12 inches

c) 12 miles, når 1 mile er 5280 feet

d) 3 ounces, når 1 ounce er cirka 28.35g

e) 92 pounds, når 1 pound er 16 ounces

f) Hva kan være konsekvensene av å bruke feil enhetssystem i fysikk? Søk gjerne opp NASAs Mars Climate Orbiter for å få et eksempel fra virkeligheten.

Løsning:

a) $2.5\,\text{in} = 2.5 \cdot 25.44\,\text{mm} = 6.36\,\text{cm}$

b) $5\,\text{ft} = 5\dot{1}2 \cdot 25.44\,\text{mm} = 1.5264\,\text{m}$

c) 12 miles, når 1 mile er 1.6 km $12\,\text{mi} = 12 * 1.6\,\text{km} = 19.2\,\text{km}$

d) $3\,\text{oz} = 85.05\,\text{g}$

e) 92 pounds, når 1 pound er 16 ounces $92\,\text{lb} = 92 \cdot 16 \cdot 28.35\,\text{g} = 41.7312\,\text{kg}$

f) Konsekvensen er regnefeil, som enten kan skje ved at man glemmer å konvertere over til riktig enhet, eller at man konverterer feil.

TDS 1.3 Flere enheter

a) Et batteri er oppgitt til å ha en spenning på 0.00005 MV. Skriv om dette slik at spenningen er oppgitt med 2 gjeldende siffer.

b) Jupiter har en gjennomsnittlig radius på omlag 7000000000 cm. Konverter dette til kilometer. Dersom du vil kan du også konvertere det til enheten AU (astronomical units).

c) Bruk for eksempel Google til å finne ut hva enheten elektronvolt (eV) er, og finn ut hvordan man konverterer fra Joule til elektronvolt. Hvorfor tror du det er nyttig å ha enheten elektronvolt?

Løsning:

a) 50 V

b)

$$7000000000\,\text{cm} = 7 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5}\,\text{km} = 7 \cdot 10^4\,\text{km}.$$

Deretter skrives det om til astronomiske enheter:

$$1\,\text{km} = 6.68458712 \cdot 10^{-9}\,\text{Au} \Rightarrow 7.00 \cdot 10^4\,\text{km} = 7.00 \cdot 10^4 \cdot 6.68458712 \cdot 10^{-9}\,\text{AU} \approx 4.67 \cdot 10^{-4}\,\text{AU}.$$

c) Elektronvolt (eV) er en måleenhet for energi, mer spesifikt energien til et stillestående elektron akselerert av en potensialforskjell på 1 V i vakuum. En elektronvolt kan konverteres til Joule ved å bruke at

$$1\,\text{eV} = 1.602176634 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Grunnen til at man bruker elektronvolt for energi er fordi den passer veldig godt for små verdier (f.eks. elektron-overganger i et atom). Man vil nødig bruke Joule for å måle små verdier siden det er veldig tungvint. Videre var enheten også nyttig siden energien til en partikkel med ladning q som blir akselerert gjennom en spenningsforskjell V er $E = qV$. Dermed ble det nyttig å bruke enheten elektronvolt for partikler med ladning i enheter av elektronladningen.

TDS 1.4 Sjekk alltid enheter!

Sjekk at enhetene på begge sider av likhetstegnet stemmer.

a)

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1}$$

hvor tettheten ρ har enheter kg/m^3, massen m har enheten kg og volumet V har enheten m^3.

Løsning: Dimensjonen på høyre side av likhetstegnet er bestemt av $\frac{m}{V}$, som har benevning $\frac{kg}{m^3}$. Vi ser dermed at likhetstegnet holder mtp dimensjon.

De neste likningene kommer du til å bli bedre kjent med utover i semesteret. Kan du bruke enhetene til å identifisere hver variabel som en fysisk størrelse?

b)

$$v = at \tag{2}$$

$[v]$ har enheter m/s, $[a]$ har enheter m/s^2 og $[t]$ har enheten s.

Løsning: Vi ser igjen på høyre side av likhetstegnet, hvor vi har $a \cdot t$ med benevning $\frac{m}{s^2} \cdot s = \frac{m}{s}$. Dette kjenner vi igjen som benevningen til fart, så begge sidene har samme dimensjon.

c)

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2 \tag{3}$$

$[s] = \text{m}$, $[v] = \text{m/s}$, $[t] = \text{s}$ og $[a] = \text{m/s}^2$.

Løsning: Her ser vi at venstre side av likhetstegnet har benevning m siden vi snakker om strekning. Høyresiden består av to ledd, hvor vi dropper eventuelle dimensjonsløse konstanter ettersom de ikke gir et bidrag til dimensjonen av leddene. Vi ser på det første leddet vt, det har da dimensjon $\frac{m}{s} \cdot s = m$, mens det andre leddet er $at^2 = \frac{m}{s^2}s^2 = m$. Så vi ser at begge leddene har samme dimensjon som venstre side av likhetstegnet.

TDS 1.5 Gravitasjon

Bruk likningen for gravitasjonskraft under til å finne enhetene til Newtons gravitasjonskonstant G.

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{4}$$

Enhetene til de relevante størrelsene er $[F] = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$, $[m] = \text{kg}$, $[M] = \text{kg}$ og $[r] = \text{m}$.

Løsning: Vi begynner med å se på likning 4 og løser for G.

$$F = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow G = F\frac{r^2}{mM}$$

Deretter ser vi på dimensjonen av G:

$$\Rightarrow [G] = \frac{kg \cdot m}{s^2} \frac{m^2}{kg^2} = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$\Rightarrow [G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Øvingsoppgaver

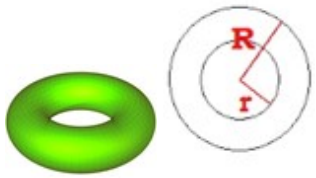
Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 1.1 Tung luft?

Hvor mye veier jordas atmosfære?

Løsning: Jordas radius er ca $r = 6000$ km $= 6 \cdot 10^6$ m. Det gir overflatearealet $A = 4\pi r^2 = 5 \cdot 10^{14}$ m^2. Trykket ved overflaten er ca 1 kg/cm^2 eller 10^4 kg/m^2, slik at massen til atmosfæren er $5 \cdot 10^{18}$ kg.

G 1.2 Smultring



En torus er det matematiske uttrykket når man snakker om formen til en smultring. Volumet til en torus kan bli uttrykt som en funksjon av den indre r og den ytre radiusen R av torusen (dvs distansen fra senteret til den indre og den ytre kanten). Bruk dimensjonsanalyse til å avgjøre hvilke av de følgende likningene som kan være den korrekte likningen for volumet av en torus? Kan du finne den riktige formelen ved å analysere grensetilfeller i tillegg til enheter?

a) $V = (2\pi R)(\pi r^2)$

b) $V = \frac{\pi^2}{4}(R+r)(R-r)^2$

c) $V = \pi R r$

d) $V = \frac{\pi^2}{4}(Rr)^2$

Løsning: Her er det viktig å bruke dimensjonsanalyse for å se om enhetene til formelen er m^3, siden vi vil finne volum. Radius er målt i meter, dvs at vi må ha en multiplikasjon av radius 3 ganger. Siden vi har 2 ulike radier så er det flere måter dette kan skje på. Alternativ (a) er proporsjonal med $R \cdot r^2$ så den har riktig enheter $m \cdot m^2 = m^3$, alternativ (b) har også riktige enheter, ettersom hverken summing eller subtrahering kan endre på enheten $(m) \cdot m^2 = m^3$. Alternativ (c) kan ikke være riktig

siden den kun multipliserer radius 2 ganger, noe som gir oss $m \cdot m = m^2$ som vi vet at er benevningen for areal. Alternativ (d) kan heller ikke være riktig, ettersom man får $(m \cdot m)^2 = m^4 \neq m^3$.

Det betyr at alternativene med riktig enhet er a) og b).

For å bestemme hvilken av dem som er riktig kan vi se på grensetilfellet der $r \to R$. Da blir jo hele torusen en tynn sirkel, og volumet må gå mot null. Dette ser vi at skjer i alternativ b), men ikke i alternativ a). Altså er det bare alternativ b) som kan være riktig.

G 1.3 Rekkevidden til krefter

Det finnes fire fundamentale krefter i fysikk: gravitasjonskraften, den sterke kraften, den elektromagnetiske kraften og den svake kraften. Vi skal her se på hvordan man kan tilnærme rekkevidden til en kraft ved dimensjonsanalyse. Det er ikke viktig at du forstår hvorfor formelen blir slik, ettersom det er noe komplisert. Vi vil finne rekkevidden $[R] = \text{m}$ ved å bruke massen til partiklene som overfører kraften. Massen har enheter $[M] = \text{kg}$, lyshastigheten $[c] = \text{m/s}$ og Plancks konstant $[h] = \frac{\text{m}^2\text{kg}}{\text{s}}$. Kan du finne en formel for R ved å bruke massen, lyshastigheten og Plancks konstant med dimensjonsanalyse?

Løsning: Det vi først burde gjøre her er å se hva vi skal fram til, altså begynne med et utgangspunkt for så å lage formelen ved dimensjonsreduksjon. Vi skal fram til noe som har en lengdedimensjon, altså meter (m). Vi begynner med å se på hva som skjer hvis rekkevidden er proporsjonal med Plancks konstant:

$$R \propto h \Rightarrow [R] = m \propto [h] = \frac{\text{m}^2\text{kg}}{\text{s}}$$

hvor tegnet $\propto$ betyr "Vi ser da at vi har en fartsenhet samt en masseenhet for mye, altså $[R] = \text{m} \cdot \frac{m}{s} \cdot \text{kg}$ så vi deler på fart og masse og får

$$\Rightarrow R = \frac{h}{mc}.$$

Igjen sjekker vi dimensjonen

$$[R] = \frac{m^2 kg}{s} \cdot \frac{s}{m} \cdot \frac{1}{kg} = \text{m}.$$

Vi ser at enhetene på begge sider av likhetstegnet er de samme og med det har vi funnet en formel som vi kan bruke for å tilnærme rekkevidden til de fire fundamentale kreftene i fysikk!

$$R = \frac{h}{mc}.$$

G 1.4 Omløpstid til planeter (litt vanskelig)

Newtons gravitasjonslov sier at tyngdekrafta mellom to legemer (punktmasser) med massene M og m i avastanden r er

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

der G er gravitasjonskonstanten.

a) Bestem enhetene til alle størrelsene som inngår i likninga.

b) Vi vil finne et uttrykk for omløpstida til en planet som funksjon av avstanden fra sola. Identifiser de fysiske størrelsene som kommer til å påvirke omløpstida.

Løsning: Vi lar massen til sola være M og til planeten m og antar at planeten går i en sirkelbane med radien R. Omløpstida må være en funksjon av M, G, R og muligens m. For $m \ll M$ tipper vi at m ikke har noe å si. Et annet argument for dette er at vi vet at tyngdekrafta er proporsjonal med m, og dermed blir akselerasjonen til planeten uavhengig av m. Dette gjelder bare så lenge vi kan anta at sola ikke beveger seg på grunn av planeten, altså hvis $m \ll M$.

c) Bruk dimensjonsanalyse til å finne et uttrykk for omløpstida. Som alltid ved dimensjonsanalyse kan vi ikke finne det eksakte uttryket, bare hvordan svaret avhenger av dimensjonsfulle størrelser.

Løsning: Vi har at

$$T = \sqrt{\frac{R^3}{MG}}$$

er den eneste kombinasjonen av de størrelsene som inngår som gir enhet sekund. Dette er Keplers tredje lov.

Hvis vi er usikre på om vi kan droppe m i lista over relevante størrelser kan vi bare konkludere at

$$T = \sqrt{\frac{R^3}{MG}} f\left(\frac{m}{M}\right)$$

der $f\left(\frac{m}{M}\right)$ er en vilkårlig funksjon av det dimensjonsløse forholdet $\frac{m}{M}$. Hvis m påvirker omløpstida vil denne funksjonen ikke være en konstant. Men vi kan være ganske sikre på at $f(0)$ ikke er 0 (veldig lette planeter går ikke uendelig fort rundt) eller ∞ (veldig små planeter bruker ikke uendelig lang tid rundt sola). Dermed vet vi at Keplers lov gjelder for små planeter. Seinere skal vi lære hvordan vi løser dette problemet eksakt for sirkulære baner, og da kan vi finne funksjonen $f\left(\frac{m}{M}\right)$.

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 1.5 Bølgefart for vannbølger

Det er to ulike fysiske prosesser som bidrar til overflatebølger på vann. I denne oppgave skal vi studere hvordan bølgefarta avhenger av bølgelengden for disse bølgene. Vi skal i hele oppgava anta at vannet er tilstrekkelig dypt til at vi ikke trenger å ta hensyn til at bølgene påvirkes av bunnen. Vi skal også anta at bølgene ikke har for stor amplitude (bølgehøyde). Dette betyr at bølgefarten ikke avhenger av amplituden (hvorfor skal dere lære om seinere).

a) For lange bølger er det i hovedsak tyndekrafta som får bølgene til å bre seg, og vi kan se bort fra andre krefter. Disse bølgene kalles for tyngdebølger. Lag en liste over de fysiske størrelsene som kan tenkes å påvirke bølgefarta. Finn enhetene til alle disse størrelsene, og bruk dimensjonsanalyse til å finne et uttrykk for bølgefart som funksjon av bølgelengde.

Løsning: Relevante størrelser:

Tyngdeakselerasjonen	g	$[g] = \text{m/s}^2$
Bølgelengden	λ	$[\lambda] = \text{m}$

$$v_t = \sqrt{g\lambda}.$$

b) For kortere bølger vil vannets overflatespenning også påvirke bølgene, og for tilstrekkelig korte bølger vil denne være den viktigste krafta, og vi kan se bort fra tyngdekrafta. Bølgene kalles da kapillærbølger. Overflatespenninga er beskrevet ved en størrelse σ med enheten $[\sigma] = \text{N/m}$ (kraft per lengde av et snitt gjennom overflata). For vann er denne $\sigma = 78.2$ mN/m. Lag en liste over de fysiske størrelsene som kan tenkes å påvirke bølgefarta. Finn enhetene til alle disse størrelsene, og bruk dimensjonsanalyse til å finne et uttrykk for bølgefart som funksjon av bølgelengde.

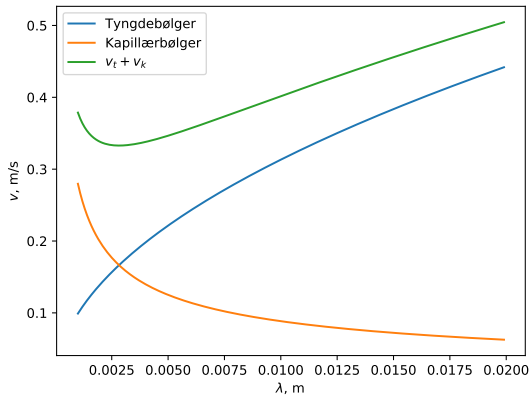
Løsning: Relevante størrelser:

Overflatespenning	σ	$[\sigma] = \text{N/m} = \text{kg/s}^2$
Bølgelengden	λ	$[\lambda] = \text{m}$
Tettheten	ρ	$[\rho] = \text{kg/m}^3$.

$$v_k = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\lambda}}.$$

c) For bølger av middels bølgelengde (hva som er middels avhenger av hvilken væske, vi finner et tilnærmet uttrykk snart) vil begge kreftene være viktige. Det er mulig å studere dette i detalj, men vi skal prøve å finne ut så mye som mulig uten å gjøre dette. Siden det er to krefter som bidrar kan vi gjette at bølgefarta blir summen av bølgefartene for de to mekansimene hver for seg (eventuelt kunne vi tenke oss å ta gjennomsnittet). Tegn en graf som viser bølgefartene til tyngdebølger og kapillærbølger som funksjoner av bølgelengden. Tegn også inn summen av de to bølgefartene.

Løsning:



d) Grafen du har for summen av bølgefartene bør ha et minimum ved en bestemt bølgelengde, som er de bølgene som beveger seg saktest. Finn et tilnærmet uttrykk for denne bølgelengden ut fra uttrykkene du har for bølgefartene.

Løsning: Vi kan derivere uttrykket for $v = v_t + v_k$. Siden vi uansett ikke har kontroll på numeriske faktorer, trenger vi ikke å huske på disse når vi deriverer heller

$$\frac{dv}{d\lambda} \approx \sqrt{g}\lambda^{-1/2} - \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\lambda^{-3/2}.$$

Setter vi dette lik 0 og løser med hensyn på λ finner vi

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

e) Finn det samme uttrykket direkte ved dimensjonsanalyse.

Løsning: Vi har disse størrelsene

Tyngdeakselerasjonen	g	$[g] = \text{m/s}^2$
Overflatespenning	σ	$[\sigma] = \text{N/m} = \text{kg/s}^2$
Tettheten	ρ	$[\rho] = \text{kg/m}^3$.

Den eneste kombinasjonen av disse som gir enheten lengde er

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

f) For overflatebølger på vann, hvor lang er denne bølgelengden? Dette er "middels lange" bølger på vann, og om vi kan se på bare tyngdekraft eller bare overflatespenning avhenger av hvordan bølgelengden er i forhold til denne.

Løsning: Med $g = 9.81$ m/s^2, $\rho = 10^3$ kg/m^3 og $\sigma = 78.2$ mN/m blir

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 2,8 \text{ mm}.$$

En fysisk realistisk beregning av kreftene som virker gir en ekstra faktor 2π i bølgelengden, slik at det riktige svaret er ca 1.7 cm.

G 1.6 Caesars siste pust

Julius Caesar ble myrdet av en gruppe senatorer i året 44 f.k. Estimer hvor mange molekyler av Ceasars siste pust du trekker inn hver gang du puster.