Oppgavesett uke 2

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa. Tor Ole Odden har også laget programmeringsoppgaver ved hjelp av nettsiden Trinket.io, se "Uke 2: Introduksjon til Trinket". Disse anbefaler vi at dere jobber med hjemme før gruppetimen.

TDS 2.1 Posisjon, hastighet og akselerasjon

Posisjonen til en partikkel kan beskrives ved

$$x(t) = A\cos\omega t$$

der A og ω er konstanter. Hva blir hastigheten og akselerasjonen for denne partikkelen?

Løsning: Vi deriverer posisjonen mhp. tid for å finne hastigheten, og så deriverer vi hastigheten mhp. tid for å finne akselerasjonen:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t)$$
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

TDS 2.2 Elektron i boks

Et elektron skytes inn i en boks med et elektrisk felt slik at elektronet akselereres. Akselerasjonen i boksen er $a = 2000$ m/s^2. Boksen er $l = 1.00$ m lang og elektronet kommer inn i boksen med hastighet $v_0 = 100$ m/s. Hva er hastigheten til elektronet når det forlater boksen?

Løsning: For konstant akselerasjon a kan vi bruke bevegelsesligningene:

$$v(t) = v_0 + at \tag{1}$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

Vi vil finne $v(t)$ i det tidspunktet hvor elektronet forlater boksen. Vi bruker ligning (1) for å finne tiden t, som vi så setter inn i ligning (2) og løser for v:

$$t = \frac{v(t)-v_0}{a} \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}a\frac{(v-v_0)^2}{a^2} + v_0\frac{v-v_0}{a}$$
$$\Rightarrow 2a(x-x_0) = v^2 - 2vv_0 + v_0^2 + 2vv_0 - 2v_0^2 = v^2 - v_0^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x-x_0)}$$

Med initialbetingelser $x_0 = 0.00$ m, $x = 1.00$m, $v_0 = 100$ m/s og $a = 2000$ m/s^2, får vi at $v = \sqrt{14000} m/s = 118$m/s.

TDS 2.3 En bil og en motorsykkel på landeveien

En bil kjører med konstant hastighet på 20.0 m/s og passerer en motorsykkel som er i ro. I det øyeblikket hvor bilen kjører forbi begynner motorsykkelen å kjøre med konstant akselerasjon, i samme retning som bilen. Motorsykkelen kjører forbi bilen etter 200 m.

a) Hvor stor akselerasjon har motorsykkelen?

b) Hva er hastigheten til motorsykkelen når den kjører forbi bilen?

Løsning:

a) Vi definerer tidspunktet når bilen kjører forbi motorsykkelen som $t = 0$ s og definerer tilsvarende posisjon $x_{\text{bil}}(t = 0) = x_{\text{ms}}(t = 0) = 0$ m. Vi har da initialbetingelsene

$$x_{\text{bil}}(0) = 0\text{m}, \qquad x_{\text{ms}}(0) = 0\text{m}, \qquad v_{\text{ms}}(0) = 0\text{m/s}$$

Bilen kjører med konstant hastighet $v_{\text{bil}} = 20$ m/s. Posisjonen til bilen er gitt ved $x_{\text{bil}}(t) = x_{\text{bil}}(0) + v_{\text{bil}}t = v_{\text{bil}}t$. Motorsykkelen kjører med konstant akselerasjon, som gir

$$v_{\text{ms}}(t) = v_{\text{ms}}(0) + a_{\text{ms}}t = a_{\text{ms}}t$$
$$x_{\text{ms}}(t) = x_{\text{ms}}(0) + v_{\text{ms}}(0)t + \frac{1}{2}a_{\text{ms}}t^2 = \frac{1}{2}a_{\text{ms}}t^2$$

Motorsykkelen kjører forbi bilen ved en tid t_1:

$$x_{\text{ms}}(t_1) = x_{\text{bil}}(t_1) = 200\text{m}$$

Vi finner tiden t_1 fra $x_{\text{bil}}(t_1) = v_{\text{bil}}t_1 = 200$ m:

$$t_1 = \frac{x_{\text{bil}}(t_1)}{v_{\text{bil}}} = \frac{200\text{m}}{20\text{m/s}} = 10\text{s}$$

Vi finner akselerasjonen til motorsykkelen, a_{ms}, fra $x_{\text{ms}}(t_1) = \frac{1}{2}a_{\text{ms}}t_1^2 = 200$ m:

$$a_{\text{ms}} = \frac{2x_{\text{ms}}(t_1)}{t_1^2} = \frac{400\text{m}}{(10\text{s})^2} = 4.00\text{m/s}^2$$

b) Vi finner hastigheten ved å bruke akselerasjonen vi fant i forrige oppgave:

$$v_{\text{ms}}(t_1) = a_{\text{ms}}t_1 = 40.0\text{m/s}.$$

Øvingsoppgaver

G 2.1 Posisjon, fart og akselerasjon

Farten til en partikkel varierer kvadratisk med tiden etter formelen

$$v(t) = \frac{1}{2}At^2$$

hvor A er en konstant med enhet m/s^3. Bevegelsen starter ved $t = 0$ s og $x = 0$ m.

a) Hva blir akselerasjonen og den tilbakelagte veilengden som funksjon av tiden?

b) Anta at $A = 3$ m/s^3. Hvor stor er akselerasjonen ved $t_1 = 2$ s og ved $t_2 = 5$ s, og hvor stor er gjennomsnittsakselerasjonen i tidsintervallet fra t_1 til t_2?

c) Tegn grafene til $x(t)$, $v(t)$ og $a(t)$. Bruk gjerne Python eller et annet numerisk verktøy til dette.

Løsning:

a) Akselerasjonen finner vi ved å derivere uttrykket for hastigheten:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = At$$

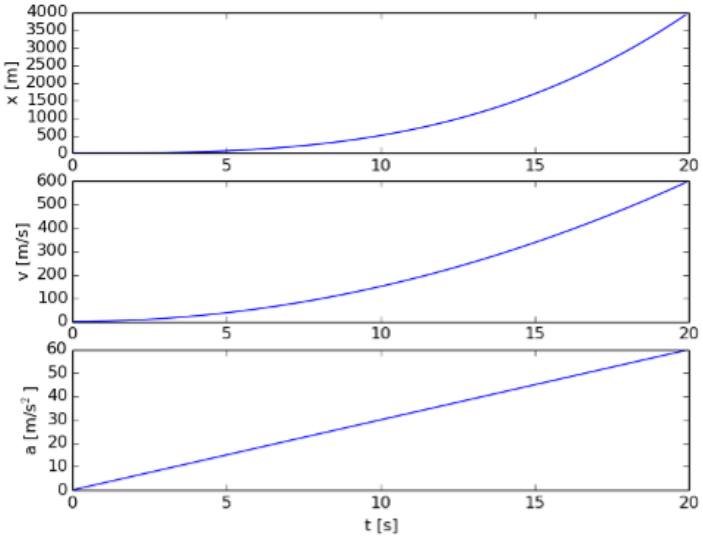
og den tilbakelagte veilengden finnes ved integralet av hastigheten:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t)dt = \frac{1}{6}At^3$$

b) $a(t_1) = 6\text{m/s}^2$, $a(t_2) = 15\text{m/s}^2$. Gjennomsnittsakselerasjonen kan finnes ved

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = 10.5\text{m/s}^2$$

c) $x(t)$ øverst, $v(t)$ i midten, $a(t)$ nederst.



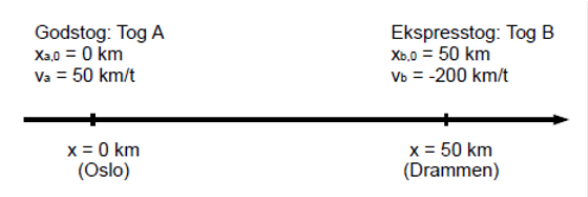
G 2.2 To tog

Et godstog kjører fra Oslo til Drammen i 50 km/t. Et ekspresstog kjører fra Drammen til Oslo i 200 km/t. Begge togene starter på det samme tidspunktet. Avstanden mellom Oslo og Drammen er 50 km.

a) Når møtes togene?

b) Hvor langt fra Oslo møtes togene?

Løsning:



Vi har $x_a(t) = v_a t$ og $x_b(t) = x_{b0} + v_b t$.

a) Togene møtes når $x_a(t) = x_b(t)$. Ved å sette bevegelseslikningene deres lik hverandre og løse med hensyn på t finner man

$$t = \frac{x_{b0}}{v_a - v_b} = \frac{50\text{km}}{250\text{km/t}} = 0.2\text{t} = 12\text{min}$$

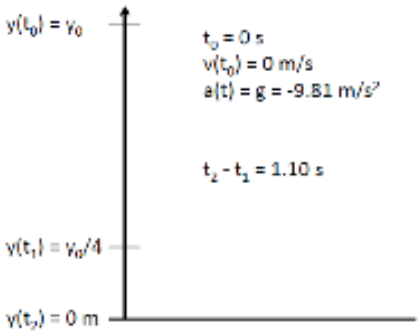
b) Ta utgangspunkt i tog A som drar fra Oslo og løs likningen med tiden som ble funnet i a. Da får man at $x_a(0.2\text{t}) = 10\text{km}$ fra Oslo.

G 2.3 Stein som faller

En mann ser en stein falle fra en klippe langt unna og måler at steinen bruker 1,1 s på å falle den siste fjerdedelen av avstanden til bakken. Du kan se bort ifra luftmotstanden. Hvor høy er klippen?

Hint: Hvis t_1 er tidspunktet steinen passerer den siste fjerdedelen av høyden, og t_2 er tidspunktet steinen treffer bakken, sett opp bevegelseslikningene for $y(t_1)$ og $y(t_2)$. Løs deretter likningssettet $t_2 - t_1 = 1.1$ s.

Løsning:



Vi har at $y(t) = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$. Vi løser likningen for t_1 og t_2:

$$y(t_1) = y_0 + \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{y_0}{4} \Rightarrow t_1 = \sqrt{-\frac{3y_0}{2g}}$$

$$y(t_2) = y_0 + \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = \sqrt{-\frac{2y_0}{g}}$$

Vi vet at $t_2 - t_1 = 1.1\text{s}$, og setter inn uttrykkene vi fant for t_1 og t_2:

$$\sqrt{-\frac{2y_0}{g}} - \sqrt{-\frac{3y_0}{2g}} = 1.1\text{s} \Rightarrow y_0 = \left(\frac{1.1\text{s}}{\sqrt{-\frac{2}{g}} - \sqrt{-\frac{3}{2g}}}\right)^2 = 330.7\text{m}$$

G 2.4 Basketball (bevegelse i to dimensjoner)

Du kaster en basketball som forlater hånden din med en hastighet med størrelse 9.4 m/s og en vinkel $\theta = 60°$ i forhold til bakken (horisontal retning). Du scorer fra 7.0 m avstand og kurven henger i 3.5 m høyde. Du kan ignorere luftmotstand.

a) Hva er akselerasjonen til ballen i horisontal (x) og vertikal (y) retning?

Løsning: Ingen kraft i horisontal retning gir $a_x = 0$ m/s^2, kun gravitasjon i vertikal retning gir $a_y = -g$.

b) Finn et uttrykk for posisjonen og hastigheten til ballen som funksjon av tid.

Løsning: Initialbetingelser ved tiden $t_0 = 0.0$ s: $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} = y_0\hat{j}$ hvor vi definerer $x_0 = 0.0$ m. Vi må dekomponere hastighetsvektor i x- og y-retning. Vi har fått oppgitt at absoluttverdien av hastigheten er $v_0 = 9.4$ m/s, og utgangsvinkelen er $\theta = 60°$. Initialbetingelsene våre blir:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta,$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta.$$

Med enhetsvektorer får vi da :

$$\vec{v}_0 = v_0\cos\theta\hat{i} + v_0\sin\theta\,\hat{j} = \frac{1}{2}v_0\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\hat{j}.$$

Bevegelsen i horisontal retning er gitt ved:

$$v_x(t) = \frac{1}{2}v_0,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}v_0 t.$$

Bevegelsen i vertikal retning er gitt ved:

$$v_y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt,$$

$$y(t) = y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Med enhetsvektorer:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j},$$
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j},$$

med komponentene gitt i uttrykkene over.

c) Fra hvilken høyde kastet du ballen?

Løsning: Vi kjenner posisjonen til ballen når den treffer kurven og skal finne posisjon i starten av bevegelsen. Først finner vi tiden t_1 når ballen treffer kurven:

$$x(t_1) = \frac{1}{2}v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2x(t_1)}{v_0} = 1.49 \text{ s}.$$

Vi vet at kurven er i posisjon $y(t_1) = 3.5$ m over bakken, vi løser for y_0 og får:

$$y_0 = y(t_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 = 2.3 \text{ m}.$$

d) Hva er hastigheten når ballen treffer kurven?

Løsning: Vi setter inn i bevegelsesligningene:

$$v_x(t_1) = \frac{1}{2}v_0 = 4.7 \text{ m/s}.$$

$$v_y(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt_1 = -6.5 \text{ m/s}.$$

$$\vec{v}(t_1) = (4.7\hat{i} - -6.5\hat{j}) \text{ m/s}.$$

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 2.5 Kaste ball

Hva er den største vinkelen med horisontalen du kan kaste en ball med slik at den hele tiden beveger seg bort fra deg (dvs avstanden mellom deg og ballen øker hele tida)?

Løsning: Hvis ballen kastes fra origo vil posisjonen ved tida t være

$$\vec{r} = [v_0 \cos\theta t, v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2]$$

der v_0 er startfarta og θ vinkelen mellom fartsvektoren og horisontalen i startøyeblikket. Ballen slutter å fjerne seg fra startpunktet hvis fartsvektoren

$$\vec{v} = [v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta - gt]$$

ved et tidspunkt står vinkelrett på posisjonsvektoren

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = v_0^2 t - \frac{3}{2}v_0 g \sin\theta t^2 + \frac{1}{2}g^2 t^3 = 0$$

$t = 0$ er en triviell løsning for da er $\vec{r} = 0$. For alle andre t kan vi forkorte bort t og står igjen med en andregradslikning

$$v_0^2 - \frac{3}{2}v_0 g \sin\theta t + \frac{1}{2}g^2 t^2 = 0$$

som har løsninga

$$t = \frac{\frac{3}{2}v_0 g \sin\theta \pm \sqrt{\frac{9}{4}v_0^2 g^2 \sin^2\theta - 2v_0^2 g^2}}{g^2}.$$

Hvis den aldri skal slutte å fjerne seg fra startpunktet må det ikke finnes noen løsninger for reelle t, som betyr at det underrottegnet må være negativt. Det gir at

$$\sin^2\theta < \frac{8}{9} \qquad \text{eller} \qquad \theta < 70{,}5^\circ.$$

G 2.6 Lat gresshoppe

En trestamme med diameteren 20 cm ligger på bakken. En lat gresshoppe vil hoppe over stokken. Finn den minste farten den kan hoppe med (se bort fra luftmotstand).

Løsning: Vi kaller radien til stokken r, farten idet gresshoppa hopper v_0, farten på det høyeste punktet i banen v_t og høyden på det høyeste punktet h. Det er klart at den banen som gir minst v_0 må tangere sylinderen, og dette kan skje enten bare i ett punkt på toppen, eller i to punkter symmetrisk på hver side. Hvis den bare tangerer på toppen må krumningen der ikke være større enn krumningen til sylinderen, og for den minimale v_0 må den være lik. Det vil si at tyngden akkurat gir stor nok sentripetalakselerasjon til å følge en sirkel med radien r:

$$g = \frac{v_t^2}{r}.$$

Energibevaring gir at

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + 2mgr.$$

Dermed er minste startfart

$$v_0^2 = 5gr. \tag{3}$$

For en bane som har et toppunkt høyere enn $2r$, og som tangerer symmetrisk på vei opp og ned kan vi tenke oss at vi starter på toppen med horisontal hastighet v_t. Posisjon som funksjon av tid er da

$$x = v_t t$$
$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{g}{2v_t^2}x^2 = h - kx^2$$

For at banen skal holde seg på utsida av stokken må

$$x^2 + (y-r)^2 \geq r^2$$

Hvis vi setter inn og regner ut betyr det at

$$k^2x^4 + (2kh - 2kr - 1)x^2 + h^2 - 2hr \geq 0$$

Dette er en andregradslikning for x^2, og den har reelle løsninger hvis det som kommer under rottegnet i løsningen er positivt:

$$(2kh - 2kr - 1)^2 - 4k^2h(h - 2r) \geq 0.$$

Banen tangerer hvis dette uttrykket er lik 0, dvs

$$2k(h - r) - 1 = 2k\sqrt{h(h - 2r)}$$

Vi setter inn for k og får

$$v_t^2 = g\left[h - r - \sqrt{h(h - 2r)}\right].$$

Startfarten er da fra energibevaring

$$v_0^2 = v_t^2 + 2gh = g\left[3h - r - \sqrt{h(h - 2r)}\right]. \tag{4}$$

Vi må finne den høyden som gir minimum:

$$\frac{dv_0^2}{dh} = g\left[3 - \frac{h - r}{\sqrt{h(h - 2r)}}\right] = 0,$$

som har løsningen

$$h = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1\right) r.$$

Vi setter dette inn i (4) og får den minste startfarten

$$v_0^2 = 2(1 + \sqrt{2})gr$$

Vi sammenlikner med (3), og ser at den gav høyere startfart. Det er altså best å ha et toppunkt som ligger høyere enn toppen av stokken, og tangere den på vei opp og ned.