Oppgavesett uke 4

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

Tor Ole Odden har også laget programmeringsoppgaver ved hjelp av nettsiden Trinket.io, se "Uke 4: Sirkelbevegelse og Numerisk Løsning av Diff-Likninger". Disse anbefaler vi at dere jobber med hjemme før gruppetimen.

TDS 4.1 Noen difflikninger

Finn løsningen til de følgende differensiallikningene. *Hint: Husk logaritmereglene.*

a) $\frac{dy}{dx} = 3xy$ som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 4$.

b) $\frac{dy}{dx} + y = 2$ med initialbetingelsen $y(0) = 8$.

c) $\frac{dy}{dx}x = y^2$ med initialbetingelsen $y(2) = 6$.

d) $x\frac{dy}{dx} + 2x^2y = 5xy$ med initialbetingelsen $y(3) = 3$.

TDS 4.2 Tog i sving

Et tog kjører med konstant fart på 200 km/t gjennom en 90°-sving som er del av en sirkel med radius R.

a) Finn et uttrykk for akselerasjonen til toget.

b) Hvor stor må R minst være slik at akselerasjonen er mindre enn 0.10 g, hvor g = 9.8 m/s^2?

c) Hvor lang tid bruker toget for å kjøre gjennom svingen?

TDS 4.3 Jorda roterer

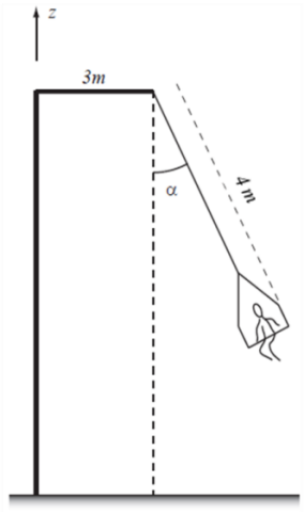
Jordens radius er R = 6378 km. Du står på ekvator.

a) Hva er farten din gjennom verdensrommet på grunn av jordens rotasjon om sin egen akse?

b) Hvor stor er din akselerasjon på grunn av denne rotasjonen? Hvor stor er din akselerasjon i forhold til tyngdeakselerasjonen g?

TDS 4.4 Karusell

Du sitter på en karusell og beveger deg i en horisontal sirkel. Setet ditt henger i et 4.0 m lang kjede som er festet på en 3.0 m lang horisontal stang, som vist i figuren. Massen til kjedet er neglisjerbar i forhold til din masse. Mens karusellen roterer med konstant vinkelhastighet er vinkelen mellom kjedet og vertikalen 30°. Hva er vinkelhastigheten?

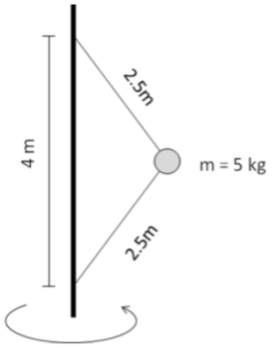


Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 4.1 Kule i snorer

En masse $m = 5$kg er festet til en stav med to snorer som vist i figuren.



Når systemet roterer med vinkelhastighet ω så er snordraget i den øvre snoren $F_1 = 100$N.

a) Hva er snordraget F_2 i den nedre snoren?

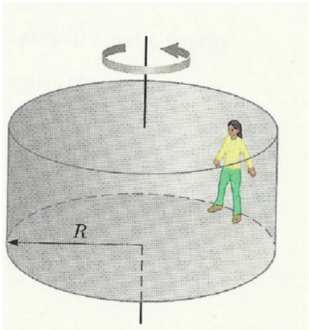
b) Finn perioden T til rotasjonsbevegelsen.

c) Finn vinkelhastigheten ω i det tilfellet hvor snordraget i den nedre snoren er F_2=0.

d) Hva skjer når vinkelhastigheten er lavere enn i oppgave c?

G 4.2 I en roterende sylinder

Du står med ryggen mot den indre veggen av en vertikal sylinder med radius $R = 3.0$ m. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom deg og veggen er $\mu_s = 0.20$. Sylinderen begynner å rotere og gulvet faller bort.



a) Tegn et frilegemediagram av kreftene som virker på deg etter at gulvet er tatt bort.

b) Hvilken vinkelhastighet må sylinderen ha slik at du ikke faller ned?

G 4.3 Kaffekopp

Differensiallikninger finner vi ikke bare i mekanikk, men i alle deler av fysikken. Metodene vi bruker for å løse dem er derfor nyttige i mange sammenhenger. Her er et eksempel fra termofysikk.

Vi har en varm kopp med kaffe som starter med temperaturen $T_k(0) = 90°\text{C}$. Koppen står i et rom med konstant temperatur $T_r(0) = 20°\text{C}$.

a) Hvordan vil temperaturen T_k til kaffekoppen endre seg ettersom tiden går? Hvilken temperatur vil koppens temperatur nærme seg når tiden går mot uendelig $T(t \to \infty)$?. Her forventes det kun en kvalitativ beskrivelse, ingen matematiske formler.

b) Newtons avkjølingslov sier at endringen i temperatur til et legeme er proporsjonal med forskjellen mellom temperaturen til legemet og dets omgivelser. Velg den differensiallikningen under dere mener beskriver endringen i koppens temperatur over tid.

$$(1)\ \frac{dT_k}{dt} = -k(T_k - T_r), \quad (2)\ \frac{dT_k}{dt} = -k(T_k + T_r), \quad (3)\ \frac{dT_k}{dt} = -kT_k$$

(*Hint: Hva må endringen være når tiden går mot uendelig?*)
Vi har introdusert en proporsjonalitetskonstant k som kalles varmeoverføringskoeffisienten. Den avhenger av systemet man ser på.

c) Vis at løsningen til differensiallikningen er på formen

$$T_k = T_r + \eta e^{-kt} \tag{1}$$

hvor η er en integrasjonskonstant og t er tiden som har gått i sekunder. Finn verdien til η ved å bruke initialbetingelsene i begynnelsen av oppgaven. For å finne k trenger dere også å vite at kaffekoppens temperatur etter 5 minutter er $T_k(300\,\text{s}) = 78°$ C.

d) Kan løsningen vi fant for differensiallikningen brukes for å beskrive kaffekoppens temperatur for $t < 0$? Argumenter for svaret ditt.

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 4.4 Over lysfarta?

Projeksjonseffekter kan lure deg til å tro at astrofysiske objekter beveger seg fortere enn lyset. Vi ser på en kvasar som sender ut gass med en fart v i en retning ϕ i forhold til siktelinja mellom oss og kvasaren. Projisert på himmelen ser gassen ut til å bevege seg med en vinkelfart $\omega = v_t/D$ der v_t er den tilsynelatende hastigheten og D er avstanden fra jorda til kvasaren. Finn et uttrykk for v_t uttrykt ved v og ϕ og vis at for noen verdier av v og ϕ blir v_t større enn lysfarta. Kan du forklare med ord hvorfor dette kan skje? Kan du tenke på noen tilleggsobservasjon du kunne gjøre for å finne den sanne farta v?