Oppgavesett uke 4

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

Tor Ole Odden har også laget programmeringsoppgaver ved hjelp av nettsiden Trinket.io, se "Uke 4: Sirkelbevegelse og Numerisk Løsning av Diff-Likninger". Disse anbefaler vi at dere jobber med hjemme før gruppetimen.

TDS 4.1 Noen difflikninger

Finn løsningen til de følgende differensiallikningene. *Hint: Husk logaritmereglene.*

a) $\frac{dy}{dx} = 3xy$ som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 4$.

Løsning:

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = 3xdx$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int 3xdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \frac{3}{2}x^2 + A$$

Da får vi at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x) = Ce^{\frac{3}{2}x^2}$$

med $C = e^A$ en ny konstant.

Videre bruker vi initialbetingelsen for å finne den spesifikke løsningen

$$y(0) = 4 = Ce^0$$

$$C = 4$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = 4e^{\frac{3}{2}x^2}$$

b) $\frac{dy}{dx} + y = 2$ med initialbetingelsen $y(0) = 8$.

Løsning:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad dy = (2-y)dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{2-y} = dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{2-y} = \int dx$$

På venstre side utfører vi substitusjonen $u = 2 - y$:

$$\Rightarrow \qquad -\int \frac{du}{u} = x + A \qquad \Rightarrow \qquad -\ln u + A = x + B$$

$$\ln \frac{1}{u} + A = x + B \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{u} = e^{x+B-A} = Ce^{x}$$

$$\Rightarrow \qquad u = De^{-x}$$

$$\Rightarrow \qquad 2 - y = De^{-x}$$

$$\Rightarrow \qquad y = 2 - De^{-x}$$

Vi finner den spesifikke løsningen ved å bruke initalbetingelsen.

$$y(0) = 8 = 2 - De^{-0}$$

$$D = -6$$

Vi får da at løsningen blir

$$y(x) = 2 + 6e^{-x}$$

c) $\frac{dy}{dx}x = y^2$ med initialbetingelsen $y(2) = 6$.

Løsning:

$$\frac{dy}{dx}x = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{y} = \ln(x) - C$$

$$y = \frac{1}{C - \ln x}$$

Da har vi den generelle løsningen for differensiallikningen. Vi finner den spesifikke ved å bruke initialbetingelsene

$$y(2) = 6 = \frac{1}{C - \ln 2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{6} = C - \ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{6} + \ln 2$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{6} + \ln 2 - \ln x}$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = \frac{6}{1 + 6\ln \frac{2}{x}}$$

d) $x\frac{dy}{dx} + 2x^2y = 5xy$ med initialbetingelsen $y(3) = 3$.

Løsning: Her begynner vi med å forenkle uttrykket. Vi deler likningen på $1/x$ og får

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 5y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = y(5-2x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = (5-2x)dx$$

Deretter integrerer vi

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int (5-2x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = 5x - x^2 + A$$

hvor A er en konstant. Dermed får vi at den generelle løsningen er ($C = e^A$)

$$y(x) = Ce^{5x-x^2}$$

Vi finner så den spesielle løsningen:

$$y(3) = 3 = Ce^6 \qquad \Rightarrow \qquad C = 3e^{-6}$$

Løsningen blir da

$$y(x) = 3e^{5x-x^2-6}$$

TDS 4.2 Tog i sving

Et tog kjører med konstant fart på 200 km/t gjennom en 90°-sving som er del av en sirkel med radius R.

a) Finn et uttrykk for akselerasjonen til toget.

b) Hvor stor må R minst være slik at akselerasjonen er mindre enn 0.10 g, hvor g = 9.8 m/s^2?

c) Hvor lang tid bruker toget for å kjøre gjennom svingen?

Løsning:

a) Farten til toget er konstant. Derfor har vi ingen akselerasjon i tangential retning. Sentripetalakselerasjon: $a_N = \frac{v^2}{R}$

b)

$$a_N = \frac{v^2}{R} \leq \frac{g}{10} \qquad \Rightarrow \qquad R \geq \frac{10v^2}{g} = 3.2\text{km}$$

c)

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\pi R}{2v} = 89\text{s}$$

TDS 4.3 Jorda roterer

Jordens radius er $R = 6378$ km. Du står på ekvator.

a) Hva er farten din gjennom verdensrommet på grunn av jordens rotasjon om sin egen akse?

b) Hvor stor er din akselerasjon på grunn av denne rotasjonen? Hvor stor er din akselerasjon i forhold til tyngdeakselerasjonen g?

Løsning:

a)

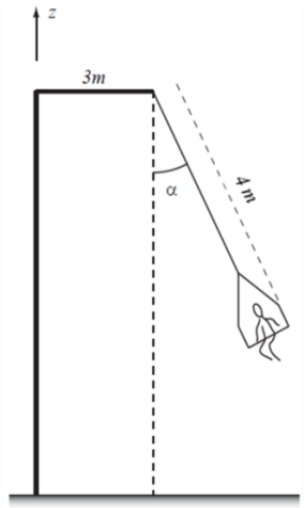
$$v = R\omega = R\frac{2\pi}{T} = 463.8\text{m/s}$$

b) På ekvator beveger du deg på en sirkelbane med radius R. Sentripetalakselerasjon:

$$a = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = 0.034\text{m/s}^2 = \frac{g}{291}$$

TDS 4.4 Karusell

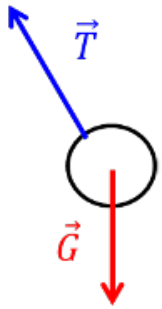
Du sitter på en karusell og beveger deg i en horisontal sirkel. Setet ditt henger i et 4.0 m lang kjede som er festet på en 3.0 m lang horisontal stang, som vist i figuren. Massen til kjedet er neglisjerbar i forhold til din masse. Mens karusellen roterer med konstant vinkelhastighet er vinkelen mellom kjedet og vertikalen 30°. Hva er vinkelhastigheten?



Løsning:

Du beveger deg på en sirkelbane med radius $R = 3\text{m} + 4\text{m}\sin 30^\circ = 5\text{m}$. Det er ingen bevegelse i vertikal retning, så $T\cos\alpha - mg = 0$. Resulterende kraft i horisontal retning holder deg på en sirkelbane: $T\sin\alpha = mR\omega^2$.

$$\tan\alpha = \frac{R\omega^2}{g} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}\tan\alpha} = 1.1\text{rad/s}$$

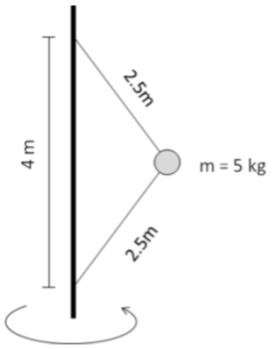


Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 4.1 Kule i snorer

En masse $m = 5$kg er festet til en stav med to snorer som vist i figuren.



Når systemet roterer med vinkelhastighet ω så er snordraget i den øvre snoren $F_1 = 100$N.

a) Hva er snordraget F_2 i den nedre snoren?

b) Finn perioden T til rotasjonsbevegelsen.

c) Finn vinkelhastigheten ω i det tilfellet hvor snordraget i den nedre snoren er F_2=0.

d) Hva skjer når vinkelhastigheten er lavere enn i oppgave c?

Løsning:

a) Vi bruker Pythagoras for å finne radius i sirkelbevegelsen:

$$R = \sqrt{(2.5\text{m})^2 - (2\text{m})^2} = 1.5\text{m}$$

Vi finner vinkelen mellom aksen og snoren som:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1.5\text{m}}{2\text{m}}\right) = 36.9^\circ$$

Det gjelder for begge snorene. Det er ingen bevegelse i vertikal retning:

$$F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha - mg = 0$$

Vi kjenner til snordraget F_1 i den øvre snoren, som dermed gir

$$F_2 = F_1 - \frac{mg}{\cos\alpha} = 38.7\text{N}$$

b) Nettokraften i horisontal retning tvinger massen på en sirkelbane:

$$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = mR\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{(F_1+F_2)\sin\alpha}{mR}} = 3.33\text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.89\text{s}$$

c) Vi bruker uttrykket fra oppgave a:

$$F_1 = F_2 + \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = 61.3\text{N}$$

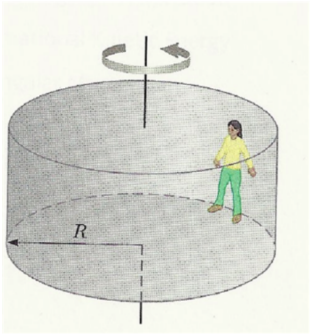
og uttrykket fra oppgave b for å finne vinkelhastigheten:

$$\omega = \sqrt{\frac{F_1 \sin\alpha}{mR}} = 2.21\text{rad/s}$$

d) Hvis vinkelhastigheten er lavere enn i oppgave c, så blir vinkelen α mindre. Den øvre snoren forblir stram, men ikke den nedre.

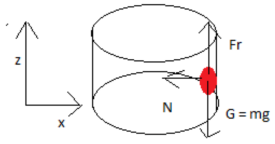
G 4.2 I en roterende sylinder

Du står med ryggen mot den indre veggen av en vertikal sylinder med radius $R = 3.0$ m. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom deg og veggen er $\mu_s = 0.20$. Sylinderen begynner å rotere og gulvet faller bort.



a) Tegn et frilegemediagram av kreftene som virker på deg etter at gulvet er tatt bort.

Løsning: Vi har normalkraft $\vec{N}$ fra veggen på personen, tyngdekraft $\vec{G}$, og statisk friksjonskraft F_r.



b) Hvilken vinkelhastighet må sylinderen ha slik at du ikke faller ned?

Løsning: Det skal ikke være noen bevegelse i vertikal retning. Newtons andre lov i vertikal retning gir:

$$F_r - G = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_r = mg.$$

Normalkraften er årsak til sentripetalakselerasjonen og gjør at du holder deg på en sirkelbane:

$$N = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2.$$

For at du ikke skal skli ned må friksjonskraften være mindre en maks verdi for statisk friksjon:

$$F_r = mg \leq F_{r,max} = \mu_s N = \mu_s mR\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} = 4.0 \text{ s}^{-1}.$$

G 4.3 Kaffekopp

Differensiallikninger finner vi ikke bare i mekanikk, men i alle deler av fysikken. Metodene vi bruker for å løse dem er derfor nyttige i mange sammenhenger. Her er et eksempel fra termofysikk.

Vi har en varm kopp med kaffe som starter med temperaturen $T_k(0) = 90°\text{C}$. Koppen står i et rom med konstant temperatur $T_r(0) = 20°\text{C}$.

a) Hvordan vil temperaturen T_k til kaffekoppen endre seg ettersom tiden går? Hvilken temperatur vil koppens temperatur nærme seg når tiden går mot uendelig $T(t \to \infty)$?. Her forventes det kun en kvalitativ beskrivelse, ingen matematiske formler.

Løsning: Kaffekoppens temperatur vil synke, og den vil konvergere mot romtemperaturen ettersom tiden går mot uendelig.

b) Newtons avkjølingslov sier at endringen i temperatur til et legeme er proporsjonal med forskjellen mellom temperaturen til legemet og dets omgivelser. Velg den differensiallikningen under dere mener beskriver endringen i koppens temperatur over tid.

$$(1)\ \frac{dT_k}{dt} = -k(T_k - T_r), \qquad (2)\ \frac{dT_k}{dt} = -k(T_k + T_r), \qquad (3)\ \frac{dT_k}{dt} = -kT_k$$

(*Hint: Hva må endringen være når tiden går mot uendelig?*)
Vi har introdusert en proporsjonalitetskonstant k som kalles varmeoverføringskoeffisienten. Den avhenger av systemet man ser på.

Løsning: Den riktige differensiallikningen er (1). Den sier at forskjellen mellom legeme og omgivelse, altså $T_k - T_r$, er proporsjonal med endringen til T_k. Denne proporsjonaliteten blir beskrevet matematisk med proporsjonalitetskonstanten k. Derfor blir riktig differensiallikning

$$\frac{dT_k}{dt} = -k(T_k - T_r)$$

siden den beskriver matematisk det Newtons avkjølingslov sier.

Dersom man bruker hintet så kan man også argumentere for at endringen i kaffekoppens temperatur burde gå mot null ettersom tiden går mot uendelig, siden den konvergerer mot temperaturen til omgivelsene (endringen blir mindre ettersom tiden går). Denne endringen får vi da fra alternativ (1):

$$\lim_{T_k \to T_r} \frac{dT_k}{dt} = -\lim_{T_k \to T_r} k(T_k - T_r) = 0$$

c) Vis at løsningen til differensiallikningen er på formen

$$T_k = T_r + \eta e^{-kt} \tag{1}$$

hvor η er en integrasjonskonstant og t er tiden som har gått i sekunder. Finn verdien til η ved å bruke initialbetingelsene i begynnelsen av oppgaven. For å finne k trenger dere også å vite at kaffekoppens temperatur etter 5 minutter er $T_k(300\,\mathrm{s}) = 78^\circ$ C.

Løsning:

$$\frac{dT_k}{dt} = -k(T_k - T_r)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dT_k}{T_k - T_r} = -k\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{T_k(0)}^{T_k} \frac{dT_k'}{T_k' - T_r} = -\int_0^t k\,dt'$$

$$\Rightarrow \qquad \ln\left|\frac{T_k - T_r}{T_k(0) - T_r}\right| = -kt$$

Da får vi at løsningen er

$$T_k(t) = T_r + (T_k(0) - T_r)e^{-kt}.$$

Dermed finner vi at $\eta = T_k(0) - T_r = 70^\circ$C. Setter vi inn for η får vi

$$T_k(t) = 20^\circ\mathrm{C} + 70^\circ\mathrm{C}e^{-kt}$$

Videre finner vi k. Vi vet at $T_k(300\mathrm{s}) = 78^\circ$C, så

$$78^\circ\mathrm{C} = 20^\circ\mathrm{C} + 70^\circ\mathrm{C}e^{-k\cdot 300\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow \qquad k = -\frac{1}{300\mathrm{s}}\ln\left(\frac{58}{70}\right)$$

$$k = 6.26 \cdot 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$$

Da får vi at den spesielle løsningen for vårt system er

$$T_k(t) = 20°\text{C} + 70°\text{C}e^{-6.26\cdot10^{-4}\text{s}^{-1}t}$$

d) Kan løsningen vi fant for differensiallikningen brukes for å beskrive kaffekoppens temperatur for $t < 0$? Argumenter for svaret ditt.

Løsning: For $t < 0$ vil løsningen beskrive hvordan temperaturen i kaffekoppen gikk ned fra kokepunktet til varmen ved $t = 0$. Matematisk er det ikke noe i veien for å bruke løsningen for vilkårlige negative t. Men fysisk er det ikke noe mening i løsningen når temperaturen går over kokepunktet. Dette er fordi de fysiske prosessene forandrer seg da, og differensiallikninga beskriver ikke lengre det som skjer.

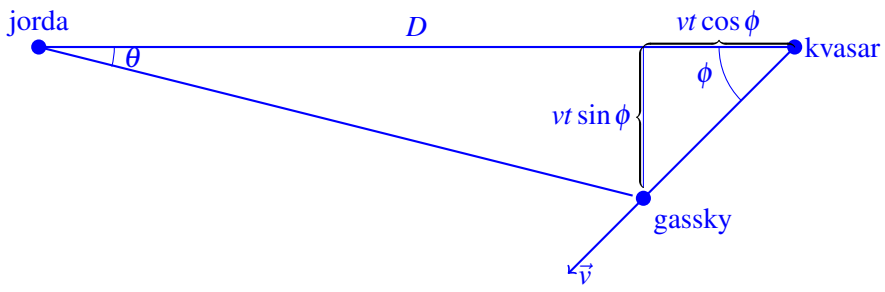
Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 4.4 Over lysfarta?

Projeksjonseffekter kan lure deg til å tro at astrofysiske objekter beveger seg fortere enn lyset. Vi ser på en kvasar som sender ut gass med en fart v i en retning ϕ i forhold til siktelinja mellom oss og kvasaren. Projisert på himmelen ser gassen ut til å bevege seg med en vinkelfart $\omega = v_t/D$ der v_t er den tilsynelatende hastigheten og D er avstanden fra jorda til kvasaren. Finn et uttrykk for v_t uttrykt ved v og ϕ og vis at for noen verdier av v og ϕ blir v_t større enn lysfarta. Kan du forklare med ord hvorfor dette kan skje? Kan du tenke på noen tilleggsobservasjon du kunne gjøre for å finne den sanne farta v?

Løsning:



I et tidsrom t beveger gassen seg en strekning vt. Vinkelrett på siktelinja beveger den seg $vt\sin\phi$ mens den beveger seg mot oss en strekning $v\Delta t\cos\phi$. Fordi gassen beveger seg mot oss i tillegg til vinkelrett på siktelinja vil lyset som sendes ut fra gassen på slutten av tidsrommet bruke kortere tid på å nå oss enn det som sendes ut i starten av tidsrommet. Dermed tror vi det har tatt kortere tid for bevegelsen enn det som faktisk har skjedd. Vi lar gassen forlate kvasaren ved $t = 0$ og lyset som viser oss dette sendes ut samtidig. Det bruker en tid $t_1 = D/c$ på å nå til jorda. Ved tida t sendes det ut lys mot oss. Dette lyset har en kortere strekning $D - vt\cos\phi$ å gå (her antar vi at $D \gg vt\sin\phi$ slik at vi ikke trenger å ta hensyn til at lyset nå må gå litt på skrå). lyset buker da tida $t_2 = \frac{D-vt\cos\phi}{c}$ og når oss ved tidspunktet $t + t_2$. Den observerte tiden for bevegelsen er da

$$t' = \left(t + \frac{D - vt\cos\phi}{c}\right) - \frac{D}{c} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\cos\phi t,$$

der c er lysfarta. Det gir den tilsynelatende vinkelfarta

$$\omega = \frac{v_t}{D} = \frac{vt\sin\phi}{Dt'}.$$

Dette gir

$$v_t = \frac{v\sin\phi}{1 - \frac{v}{c}\cos\phi}.$$

Dersom $v > c/\sqrt{2}$ er $v_t > c$ for noen ϕ.

For å finne den sanne farta v kunne vi i tillegg måle blåforskyvning av spektrallinjer i lyset fra gassen, som ville gi oss farten i bevegelsesretninga.