Oppgavesett uke 6

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

Tor Ole Odden har også laget programmeringsoppgaver ved hjelp av nettsiden Trinket.io, se " Uke 6: Energibevaring og Gravitasjon ". Disse anbefaler vi at dere jobber med hjemme før gruppetimen.

TDS 6.1 Potensiell energi i en fjær

En fjær med fjærkonstant k lagrer den potensielle energien U_0 hvis den komprimeres med en lengde x_0 fra likevektslengden.

a) Hvor mye energi lagres når fjæren komprimeres dobbelt så mye?

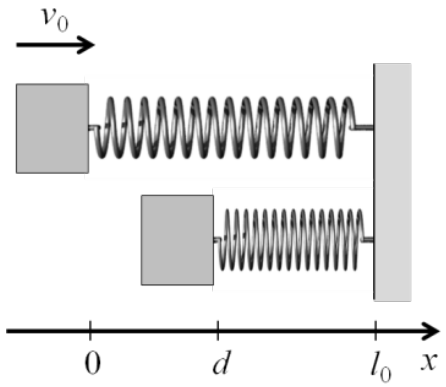
Løsning: Den potensielle energien i fjæren er $U_0 = \frac{1}{2}kx_0^2$. Hvis fjæren komprimeres dobbelt så mye får den en potensiell energi $U_1 = \frac{1}{2}k(2x_0)^2 = 4U_0$

b) Hvor mye må fjæren komprimeres for å lagre dobbelt så mye energi?

Løsning: Vi må finne x_2 slik at $U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = 2U_0$. Da må $x_2 = \sqrt{2}x_0$.

TDS 6.2 En kloss og en fjær

En kloss med massen m beveger seg til høyre med fart v_0. Ved $x = 0$ m treffer klossen på en fjær som har fjærkonstanten k og likevektslengden l_0. Fjæren følger Hookes lov. Klossen stanser ved $x = d$.



a) Finn arbeidet som fjærkraften gjør mens klossen beveger seg fra $x = 0$ til $x = d$.

Løsning: Når fjæren komprimeres ($x > 0$) virker kraften i negativ x-retning, $F_k = -kx$.

$$W = \int_0^d (-kx)dx = -\frac{1}{2}kd^2$$

b) Hvor stor er d?

Løsning: Vi bruker arbeid-energi-teoremet, $W = K_1 - K_0$

$$-\frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

som gir

$$d = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0.$$

TDS 6.3 Jorda og Jupiter

Jupiter har en masse som er 300 ganger jordas masse og en omløpstid som er 11,9 ganger jordas. Jupiters avstand til sola er 5,2 ganger jordas. Hvis jorda plasseres i samme avstand fra sola som Jupiter, og jorda beveger seg i en sirkelbane om sola, da er omløpstida for jorda

a) 1 år

b) Mellom 1 år og 11,9 år

c) 11,9 år

d) Mer enn 11,9 år

e) Det er ikke mulig for en planet med jordas masse å gå i en sirkelbane i samme avstand som Jupiter fra sola.

Løsning: Så lenge begge planetene er mye lettere enn sola så vi kan regne at sola ligger i ro er omløpstida uavhengig av massen til planeten. Dermed ville jordas omløpstid også vært 11,9 år.

TDS 6.4 Jorda og Saturn

Planeten Saturn har 100 ganger så stor masse som jorda, og Saturns avstand til sola er 10 ganger større enn jordas. Sammenliknet med jordas akselerasjon i dens bane om sola, er akselerasjonen til Saturn i banen om sola

a) 100 ganger større

b) 10 ganger større

c) Den samme

d) 10 ganger mindre

e) 100 ganger mindre

Løsning: Gravitasjonskrafta mellom sola (massen M) og en planet med massen m i avstanden r er

$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Det gir akselerasjonen

$$a = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2}.$$

Når avstanden er 10 ganger større blir akselerasjonen 100 ganger mindre.

TDS 6.5 Ukas difflikning

Løs difflikninga

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1$$

Med initialbetingelsen $x(0) = x_0$.

Løsning: Vi separerer variablene og integrerer

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int dt$$

$$\arctan x = t + c$$

$$x = \tan(t + c).$$

Konstanten c bestemmer vi fra initalbetingelsen

$$x(0) = \tan c = x_0$$

som gir at $c = \arctan x_0$. Dermed er

$$x(t) = \tan(t + \arctan x_0).$$

Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 6.1 Ikke-lineær fjær

En fjær som ikke følger Hookes lov kan beskrives ved kraften $F(x) = -ax - bx^2$, hvor $a = 50$ N/m og $b = 15$ N/m^2. Massen til fjæren er neglisjerbar.

a) Finn den potensielle energien $U(x)$. Du kan velge $U(0) = 0$.

Løsning:

$$U(x) = -\int_0^x F(x)dx = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3$$

b) Et legeme med massen $m = 1.0$ kg er festet til fjæren og kan bevege seg horisontalt på en friksjonsfri overflate. Du trekker legemet til høyre i positiv x-retning for å strekke fjæren 1.0 m fra sin likevektslengde og slipper den. Hva er hastigheten når legemet er 0.50 m fra likevektslengden?

Løsning: Krafta er konservativ og mekanisk energi er bevart, $U(x_0) + K(x_0) = U(x_1) + K(x_1)$ slik at

$$\frac{a}{2}x_0^2 + \frac{b}{3}x_0^3 + 0 = \frac{a}{2}x_1^2 + \frac{b}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

. Da får vi

$$v_1 = \sqrt{\frac{a}{m}(x_0^2 - x_1^2) + \frac{2b}{3m}(x_0^3 - x_1^3)} = 6.8 \text{ m/s}$$

S 6.1 Stavhopp



a) Tegn en skisse av en graf som viser de ulike energiformene (kinetisk, potensiell, elastisk) som funksjoner av tida for en stavhopper.

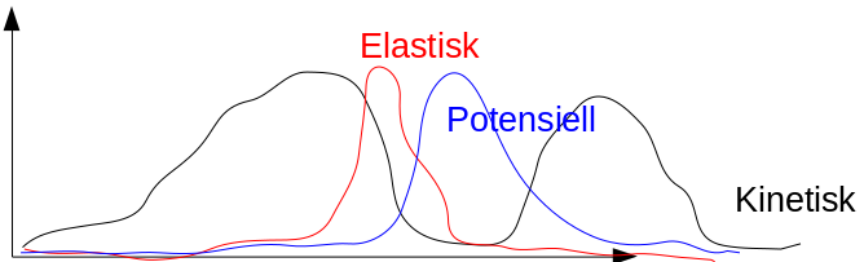
b) Slå opp den maksimale farten et menneske kan løpe med.

c) Bruk dette til å regne ut hvor høyt en stavhopper kan hoppe.

d) Sammenlikn med verdensrekorden i stavsprang. Stemmer beregningen godt? Kan dere forklare forskjellen?

Løsning:

a)



b) Maks registrert fart er 44,72 km/t.

c) Hvis vi antar at all kinetisk energi blir potensiell energi blir høyden h = v2/2g = 7,87 m. Mer realistisk hvis vi bruker en lavere fart. 40 km/t gir h = 6,29 m.

d) Verdensrekorden er 6,26 m.

G 6.2 Relativistisk energi

Vi skal i denne oppgaven se på funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

a) Finn Taylorpolynomet til $f(x)$ av orden 3 rundt punktet $x = 0$.

Løsning:

$$f(x) = (1+x)^{-1/2} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{2(1+x)^{3/2}} \Rightarrow \frac{df(0)}{dx} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{3}{4(1+x)^{5/2}} \Rightarrow \frac{d^2f(0)}{dx^2} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = -\frac{15}{8(1+x)^{7/2}} \Rightarrow \frac{d^3f(0)}{dx^3} = -\frac{15}{8}$$

Vi får da at

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx f(0) + \frac{df(0)}{dx}(x-0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(0)}{dx^2}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f(0)}{dx^3}(x-0)^3 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$$

Når et legeme beveger seg med en fart v som nærmer seg lyshastigheten c, vil legemets totale energi E være gitt ved

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dette er den såkalte *relativistiske totalenergien*. Generelt sier vi at legemer med hastighet som nærmer seg c beveger seg relativistisk. Vi kommer til å se litt på relativitetsteori i slutten av kurset, så dette er bare en smakebit!

b) Bruk Taylorpolynomet du fant i oppgave a) til å skrive om E.

Løsning: Begynner med å skrive om uttrykket for E ved å bruke $f(x)$.

$$E = mc^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \cdot f(-v^2/c^2)$$

Ved å bruke Taylorpolynomet får vi da at

$$E \approx mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^3\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \frac{5}{16}m\frac{v^6}{c^4}$$

c) Når $v \ll c$, beveger legemet seg ikke-relativistisk. Hvilke ledd i rekka kan sløyfes for et ikke-relativistisk legeme? Hvorfor?

Løsning: Alle ledd unntatt de to første inneholder $\frac{v^2}{c^2}$ i en potens, og når $v \ll c$, vil alle disse bli veldig små. Dermed er det bare de to første leddene som er viktige.

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

d) Kjenner du igjen et av leddene i uttrykket du fant for ikke-relativistisk totalenergi?

Løsning: Leddet $\frac{1}{2}mv^2$ er uttrykket for den kinetiske energien til et legeme med masse m og hastighet v.

e) Det første leddet i Taylorpolynomet er mest sannsynlig kjent, og vi skal komme tilbake til det seinere i kurset. Finn ut hva det beskriver.

Løsning: Leddet mc^2 er Einsteins berømte likning, som beskriver hvordan masse kan omgjøres til energi. Det kalles for *hvileenergien*. Den totale energien til et ikke-relativistisk legeme består dermed av hvileenergi og kinetisk energi.

G 6.3 Taylorpolynomer

I denne oppgaven skal vi undersøke nøyaktigheten i Taylorapproksimasjoner, ved å estimere Eulers tall med bruk av Taylorrekka til e^x. Vi minner om at Taylorpolynomet av orden n til e^x rundt $a = 0$ er gitt ved $T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

a) Skriv en Python-funksjon som tar inn en verdi for n og x, og returnerer verdien til $T_n(x)$.

Løsning:

```
1  import numpy as np
2  from math import factorial
3
4  euler = np.exp(1)
5  print(f'Eksakt verdi: {euler}')
6
7  def Taylor_exp(x, n):
8      T = 0
9      for i in range(n + 1):
```

```
10          T += x ** i / factorial(i)
11      return T
12
13  def diff_euler(a):
14      return np.abs(np.exp(1) - a)
15
16  def relative(a, b):
17      return np.abs(a - b) / np.abs(a)
18
19  for n in [2, 3, 4, 10]:
20      print(f"""n = {n}:
21            Approksimert verdi: {Taylor_exp(1, n)}
22            Differanse: {diff_euler(Taylor_exp(1, n))}
23            Relativ feil: {relative(np.exp(1), Taylor_exp(1, n)) * ↩
                 100}%
24
25            """)
26
27  n = 0
28
29  def leftside(n):
30      return 5 ** n/ factorial(n + 1)
31
32  while leftside(n) >= (np.exp(- 5) / 5 * 1e-4):
33      n += 1
34
35  print(f'n må være {n}.')
36
37  """
38  Eksakt verdi: 2.718281828459045
39  n = 2:
40            Approksimert verdi: 2.5
41            Differanse: 0.2182818284590451
42            Relativ feil: 8.030139707139416%
43
44
45  n = 3:
46            Approksimert verdi: 2.6666666666666665
47            Differanse: 0.05161516179237857
48            Relativ feil: 1.898815687615381 2%
49
50
51  n = 4:
52            Approksimert verdi: 2.708333333333333
53            Differanse: 0.009948495125712054
54            Relativ feil: 0.36598468273437684%
55
56
57  n = 10:
58            Approksimert verdi: 2.7182818011463845
59            Differanse: 2.7312660577649694e-08
60            Relativ feil: 1.0047766310211052e-06%
61
```

```
62
63 n må være 22.
64 """
```

b) Bruk $n = \{2,3,4,10\}$ med $x = 1$, og sammenlikn med den numeriske verdien til Eulers tall man får fra for eksempel NumPy. Hvordan øker nøyaktigheten ettersom man inkluderer flere ledd i rekken?

Løsning: NumPy gir at verdien til Eulers tall er 2.718281828459045.

- $n = 2$: $e^1 \approx 2.5$. Differansen er da 0.2182818284590451.
- $n = 3$: $e^1 \approx 2.6666666666666665$. Differansen er da 0.05161516179237857.
- $n = 4$: $e^1 \approx 2.708333333333333$. Differansen er da 0.009948495125712054.
- $n = 10$: $e^1 \approx 2.7182818011463845$. Differansen er da $2.7312660577649694 \times 10^{-8}$, som vil si at det blir forskjell ved åttende desimal.

Det kan se ut som overensstemmelsen per desimal øker omtrent proporsjonalt med antallet ledd man inkluderer, som betyr at man ganske enkelt kan få den nøyaktigheten man ønsker ved å velge et passende antall ledd.

Såkalt *relativ feil* er definert som

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{|a|}$$

der ε er den relative feilen, a er den eksakte verdien, og b er approksimasjonen.

c) Beregn den relative feilen i verdiene for Eulers tall dere fikk i oppgave b). Oppgi svaret i prosent.

Løsning:

- $n = 2$: omtrent 8.03%
- $n = 3$: omtrent 1.89%
- $n = 4$: omtrent 0.37%
- $n = 10$: omtrent 1.00×10^{-6}%

som har tid til overs Sett opp et uttrykk for restleddet til Taylorrekken til e^x rundt $a = 0$. Bruk så restleddet for å finne hvor stor grad n man må utvikle til for å få en feil mindre enn 10^{-4} på intervallet $x \in [0,5]$. Dersom dere kommer til et sted hvor noe kun kan løses numerisk, bruk Python.

Løsning: Vi begynner med å sette opp ulikheten

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq 10^{-4}$$

Vi vet at den n'te deriverte til e^x kun er e^x, så vi setter det inn, samt verdien for a.

$$\left|\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq 10^{-4}$$

Videre så ønsker vi å maksimere teller og minimere nevner. Da får vi at

$$\left|\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \left|\frac{e^{x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq 10^{-4}$$

Hvor vi har brukt at $\xi \in [a,x]$ Den høyeste verdien x kan ha er $|5|$, vi setter det inn og får

$$\left|\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^{5}|5|^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$$

Videre har vi da funnet en øvre grense M for uttrykket, slik at

$$M = \frac{e^{5}|5|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Da må vi løse for n så godt det kan gjøres

$$\Rightarrow \frac{5^n}{(n+1)!} \leq \frac{1}{5e^5} \cdot 10^{-4}$$

Herfra så må dette løses numerisk, vi har gjort det med et Pythonscript. Fra terminalen ser vi at vi får $n = 22$ som betyr at vi trenger hele 22 ledd for å få denne nøyaktigheten på hele intervallet!

G 6.4 Å hoppe bort fra en asteroide

Hvor høyt kan du hoppe på jorda? Basert på dette, hva er den største asteroiden (dvs. den største radien) du kan hoppe helt bort fra? Anta at den er kuleformet og har en tetthet på 3,00 kg/dm^3. Gravitasjonskonstanten er gitt ved $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Løsning: Vi kan kanskje hoppe ca $h_J = 0,5$ m på jorda. Det svarer til en potensiell energi på mgh_J hvis vi har massen m, og dette må også være den kinetiske energien idet vi forlater bakken. Vi antar at når vi hopper på asteroiden får vi samme kinetiske energi idet vi forlater bakken. Den potensielle energien i tyngdefeltet til et kuleformet legeme er

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er massen til asteroiden og r er radien. Vi antar at asteroiden er kuleformet, da har vi at $M = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ hvor ρ er tettheten til asteroiden. Vi kan akkurat hoppe bort hvis den totale energien er null, dvs.

$$mgh_J = G\frac{Mm}{r} = G\frac{4}{3}\pi r^2 \rho m$$

som gir

$$r = \sqrt{\frac{3gh_J}{4\pi\rho G}} = 2{,}4 \text{ km}$$

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 6.5 Navigere med romskip

Du er pilot på et romskip som går i sirkelbane 400 km over jordoverflata. Du skal reparere en satellitt som er i en sirkelbane 800 km over jordoverflata. For å komme til satellitten bruker du rakettmotoren på romskipet en kort tid og akselererer rett framover i banen. Du kan anta at motoren er på i så kort tid at du kan se bort fra strekningen romskipet beveger seg mens motoren er på. Romskipet ditt vil da få en elliptisk bane med det laveste punktet i den opprinnelige høyden.

a) Hvor stor fartsøkning må du ha for at det høyeste punktet i ellipsebanen skal være i satelittens høyde? For å løse denne oppgaven kan du bruke at for en slik ellipsebane er $|\vec{r} \times \vec{v}|$ konstant under bevegelsen. Her er $\vec{r}$ vektoren fra jordsenteret til romskipet og $\vec{v}$ hastighetsvektoren (dette er et eksempel på spinnbevaring, og vi kommer til å vise dette i slutten av semesteret. I fobindelse med planetbaner kalles dette Keplers 2. lov).

Løsning: Vi kaller farta til romskipet rett etter at raketten er fyrt av v_1 og farta når den er ved høyden til satellitten v_2. Siden vi fyrer av rakettmotoren i samme retning som bevegelsen vil farta rett etter at vi slår av motoren være tankentiell til den opprinnelige sirkelbanen. Vi skal finne farta slik at høyeste punkt i ellipsen er i r_2, og da er farta tangent til sirkelbanen til satellitten. I begge disse punktene er da farta $\vec{v} \perp \vec{r}$, og dermed er $\vec{r} \times \vec{v} = rv$. Siden denne størrelsen er bevart er

$$v_1 r_1 = v_2 r_2.$$

Energibevaring gir

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

der M er jordas masse, m er romskipets masse og G er gravitasjonskonstanten. Vi løser disse to likningene og finner

$$v_1 = \sqrt{2GM}\sqrt{\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}}$$

For å finne fartsøkninga må vi vite hvilken fart v_0 romskipet hadde i sirkelbanen med radius r_1. Dette finner vi ved å sette akselerasjonen på grunn av tyngden lik sentripetalakselerasjonen

$$\frac{GMm}{r_1^2} = m\frac{v_0^2}{r_1}$$

som gir $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$. Fartsendringa er da

$$\Delta v = v_1 - v_0 = \sqrt{2GM}\sqrt{\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = 109 \text{ m/s}.$$

b) Finn et generelt uttrykk for situasjonen der romskipet starter i avstand r_1 og satellitten er i avstand r_2 (kanskje du gjorde dette allerede i a)). Definer høydeendringen $h = r_2 - r_1$ og finn Taylorpolynomet til 1. orden om $h = 0$ for fartsendringen. For vediene over, sammenlikn det tilnærmede svaret med det eksakte.

Løsning: Vi definerer $h = r_2 - r_1$ som høydeforskjellen mellom de to sirkelbanene. Da kan vi skrive

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\sqrt{\frac{1+h/r_1}{1+h/2r_1}} = v_0\sqrt{\left(1+\frac{h}{r_1}\right)\left(1-\frac{h}{2r_1}+\cdots\right)} = v_0\sqrt{1+\frac{h}{2r_1}+\cdots} = v_0 + \frac{v_0 h}{4r_1} + \cdots.$$

Her har vi brukt den geometriske rekke $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$ og $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+\cdots$ (som er et eksempel på ei binomisk rekke). Vi finner da et ekelt tilnærmet uttrykk

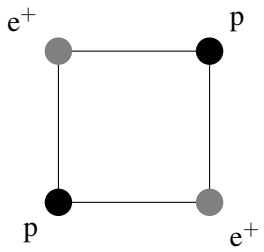
$$\Delta v \approx \frac{v_0 h}{4r_1} = 113 \text{ m/s}.$$

G 6.6 Hvordan kan vi finne en god tilnærmet løsning?

I denne oppgaven trenger vi å vite at den potensielle energien mellom to punktladninger med ladningene q_1 og q_2 i en avstand r er

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}.$$

Både positroner og protoner har positiv elektrisk ladning e.



To protoner (p) og to positroner (e^+) ligger i hjørnene på et kvadrat med sidekant r. Protonene (og da også positronene) ligger diagonalt overfor hverandre. Så slippes partiklene. Hva er forholdet mellom den kinetiske energien til et positron og et proton når de har kommet veldig langt fra hverandre? Det er tilstrekkelig med et tilnærmet uttrykk.

Løsning: Siden massen til positronene er mye mindre enn massen til protonene vil de akselerere mye raskere. Derfor kan vi regne protonene som i ro når vi ser på bevegelsen til positronene. Potensiell energi for to partikler i nabohjørner er gitt ved (e er ladningen til partiklerne)

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = k$$

Den totale potensielle energien i startposisjonen er:

$$E_{p1} = 4k + 2\frac{k}{\sqrt{2}}$$

(fire kanter og to diagonaler). Når positronene er kommet uendelig langt unna er

$$E_{p2} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

(en diagonal). Det betyr at den kinetiske energien til ett positron er

$$E_{kin,pos} = \frac{1}{2}(E_{p1} - E_{p2}) = 2k + \frac{k}{2\sqrt{2}}$$

Protonene begynner så å bevege seg og hvert av dem får til slutt kinetisk energi

$$E_{kin,prot} = \frac{k}{2\sqrt{2}}$$

Forholdet blir da

$$\frac{2k + \frac{k}{2\sqrt{2}}}{\frac{k}{2\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2} + 1 \approx 6{,}7$$

NukTek

Ekstraoppgave spesielt tilpasset NukTek-studenter. Men også fin for andre

G 6.7 Coulombbarriere

Radionukliden ^{211}At sender ut alfastråling, og har lenge blitt sett på som en god kanditat til kreftbehandlingen alfaterapi. Alfaterapi er en type strålebehandling der alfastrålende kjerner injiseres inn i kroppen for å drepe kreftceller.

For å produsere ^{211}At må en alfapartikkel kollidere med en ^{209}Bi-kjerne.

$$^{209}_{83}\mathrm{Bi} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{211}_{85}\mathrm{At} + 2n$$

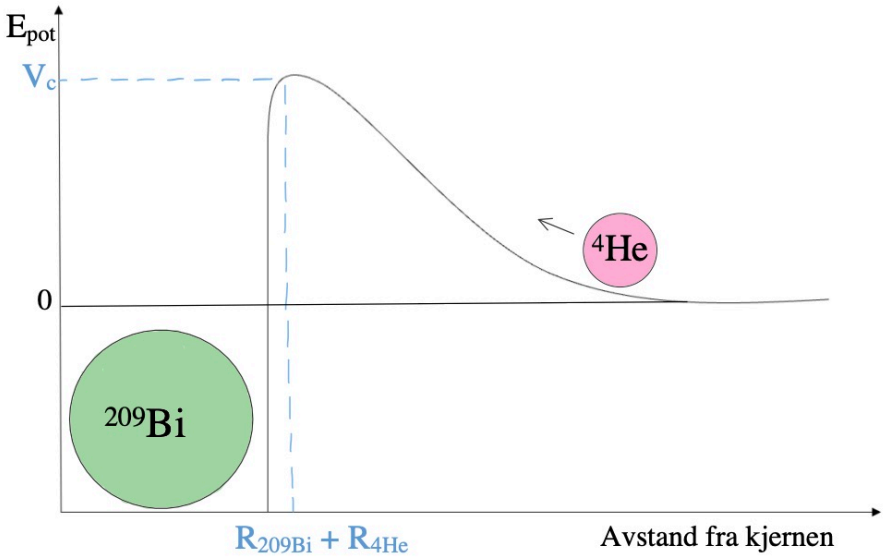


Figure 1: Illustrasjon av Coulombpotensialet og Coulombbarrieren alfapartikkelen må overkomme for å nå inn til ^{209}Bi kjernen.

For å kunne kollidere med ^{209}Bi-kjernen må alfapartikkelen ha høy nok kinetisk energi til å overkomme det frastøtende elektromagnetiske potensialet mellom dem. Potensialet er størst rett før alfapartikkelen kommer inn i kjernen. Dette potensialet kalles Coulombbarrieren, og toppen på potensialet V_c er gitt ved

$$V_c = k\frac{Z_a Z_b}{R_a + R_b} \tag{1}$$

der $k = 2.310 \cdot 10^{-28}\mathrm{Nm}^2$, Z_a og Z_b er antall protoner til nuklidene og R_a og R_b er radiusen til nuklide a og b gitt ved

$$R = r_0 A^{1/3}. \tag{2}$$

A er antall nukleoner (protoner og nøytroner) i kjernen og $r_0 = 1.2 \cdot 10^{-15}$m. Antallet protoner i ^{209}Bi-kjernen er 83, og antallet i ^{4}He-kjernen er 2.

a) Regn ut radiusen til ^{209}Bi og ^{4}He kjernene.

b) Hvor mye kinetisk energi må alfapartikklen ha for å kunne overkomme coulombbarrieren til ^{209}Bi, slik at den kan absorberes av kjernen?

Løsning:
a) Vi bruker formelen for radiusen R:

$$R(^{209}\text{Bi}) = 1.2 \cdot 10^{-15}\text{m} \cdot 209^{1/3} = 7.1^{-15}\text{m}$$
$$R(^{4}\text{He}) = 1.2 \cdot 10^{-15}\text{m} \cdot 4^{1/3} = 1.9^{-15}\text{m}$$

b) For å kunne overkomme coulombbarrieren V_c, må alfapartikkelen ha en kinetisk energi større eller lik energien til coulombbarrieren:

$$E_k \geq V_c = 2.31 \cdot 10^{-28}\text{Nm}^2 \frac{83 \cdot 2}{7.1 \cdot 10^{-15}\text{m} + 1.9 \cdot 10^{-15}\text{m}} = 4.25 \cdot 10^{-12}\text{J}$$

G 6.8 Kjernekraftverk

I et kjernekraftverk blir masse omgjort til energi når et nøytron kolliderer med en ^{235}U-kjerne, som da vil fisjonere. Fisjonsprosessen kan gi opphav til forskjellige kjerner og partikler, som for eksempel ^{92}Kr, ^{141}Ba og tre nøytroner:

$$^{235}_{92}\text{U} + n \rightarrow ^{92}_{36}\text{Kr} + ^{141}_{56}\text{Ba} + 3n \tag{3}$$

Energi blir frigjort siden massen til sluttproduktene i reaksjonen er mindre enn massen til startproduktene. Denne masseforskjellen ΔM vil gjøres om til energi gjennom Einsteins kjente formel:

$$E = \Delta M \cdot c^2 \tag{4}$$

der c er lysets hastighet.

Massene til partiklene inkludert i prosessen er:

- Massen til nøytron: 1.009 u
- Massen til ^{235}U: 235.043 u
- Massen til ^{92}Kr: 91.926 u

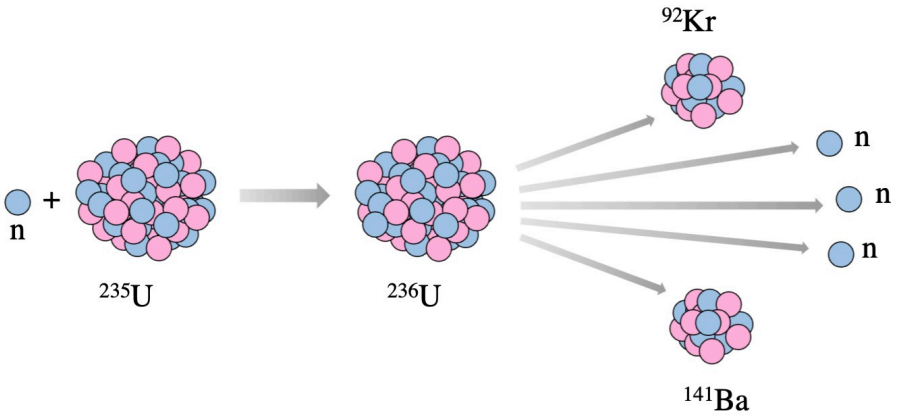


Figure 2: Illustrasjon av fisjonsprosessen beskrevet i likning 3.

- Massen til ^{141}Ba: 140.883 u

$1u = 931.5$ MeV/c^2
1 MeV $= 1.602 \cdot 10^{-13}$ J

a) Regn ut hvor mye energi som frigjøres når en ^{235}U kjerne fisjonerer.

b) Et kjernekraftverk kan ha en effekt på 4.6GW. Hvor mange fisjonsprosesser per sekund må foregå i et kjernekraftverk for å oppnå denne effekten?

Løsning:

a) Vi regner først ut masseforskjellen til reaksjonen:

$$\begin{aligned}\Delta M &= m(^{235}\mathrm{U}) + m(\mathrm{n}) - \left(m(^{92}\mathrm{Kr}) + m(^{141}\mathrm{Ba}) + 3 \cdot m(\mathrm{n})\right) \\ &= 235.043\mathrm{u} + 1.009\mathrm{u} - (91.926\mathrm{u} + 140.883\mathrm{u} + 3 \cdot 1.009\mathrm{u}) \\ &= 0.216\mathrm{u}\end{aligned}$$

Energien frigjort oppgitt i MeV, blir da

$$E = 0.216\mathrm{u} \cdot \mathrm{c}^2 = 0.216 \cdot 931.5\mathrm{MeV/c}^2 \cdot \mathrm{c}^2 \approx 200\mathrm{MeV}$$

b) Først regner vi om energien frigjort i én fisjonsprosess fra MeV til J:

$$E = 200 \cdot 1.602 \cdot 10^{-13}\mathrm{J} = 3.223 \cdot 10^{-11}\mathrm{J}$$

Antallet fisjonsprosesser N som må finne sted per sekund for en effekt på 4.6GW blir da lik:

$$N = \frac{4.6 \cdot 10^{9}\text{W}}{3.223 \cdot 10^{-11}\text{J}} = 1.427 \cdot 10^{20} \text{ prosesser/s}$$