Oppgavesett uke 7

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

Vi minner om at Taylorrekken $T(x)$ til en funksjon $f(x)$ rundt et punkt $x = a$ er gitt ved

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

.

TDS 7.1 Taylorpolynomer

a) Finn Taylorpolynomet av orden 3 til $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ rundt både $a = 0$ og $a = -1$. Kommentér svarene.

b) Finn de tre første leddene i Taylorrekken til $f(x) = \ln x$ rundt $a = 1$. Finn også et uttrykk for restleddet.

TDS 7.2 Differensialligninger

Finn den generelle løsningen til hver av de følgende differensialligningene.

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0$

c) $\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$

TDS 7.3 Fjærkraft

En kloss med masse m ligger på et friksjonsfritt underlag. Den er koblet sammen med en masseløs fjær som er festet i veggen. Vi antar at bevegelsen er endimensjonal og foregår i x-retning. Fjærkraften er gitt ved Hookes lov, $F_k(x) = k\Delta x = -kx$.

a) Bruk Newtons andre lov til å sette opp en differensialligning for klossens bevegelse, dersom vi antar at den har likevektspunkt i $x_0 = 0$.

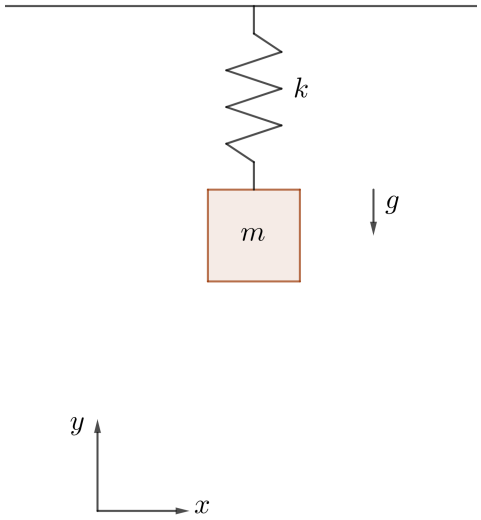
b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen.

c) Anta nå at det er dempning i fjæra, hvor størrelsen til dempekraften er proporsjonal med klossens hastighet: $F_D = -Dv$, hvor D er en konstant. Sett opp en ny differensialligning som beskriver det dempede systemet, og finn det karakteristiske polynomet. Hvilke størrelser som inngår i systemet er det som avgjør hvordan den generelle løsningen blir?

Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 7.1 Lodd i en fjær



Et objekt med masse m er festet til en masseløs fjær med fjærkonstant k i taket. Fjæren har likevektspunkt i $y = y_0$, og systemet er påvirket av gravitasjonskraften. Vi kan se bort fra luftmotstand.

a) Finn en differensialligning som beskriver bevegelsen til objektet.

b) Finn likevektspunktet y_1 til objektet.

c) Tolk resultatet. Hvordan vil de ulike variablene til systemet påvirke det nye likevektspunktet?

d) Definer en ny variabel $z = y - y_1$ som er forflytningen fra likevektspunktet. Finn differensialligningen som z må tilfredsstille.

G 7.2 Tunell gjennom jorda

Tenk at vi borer en tunell gjennom jorda fra nordpolen til sørpolen. Anta at jorda har samme tetthet alle steder (dette er ikke sant, tettheten er større i sentrum). Man kan vise at tyngdekrafta som virker på deg i en avstand r fra jordsenteret er den samme som fra en punktmasse i sentrum med masse lik den delen av jorda som ligger i nærmere sentrum enn r. Vi antar at det ikke er luft i tunellen slik at vi kan se bort fra luftmotstand.

a) Finn et uttrykk for massen til den delen av jorda som er innen for en radius r.

b) Finn et uttrykk for tyngdekrafta som virker på et legeme i avstanden r fra jordsenteret.

c) Finn en differensiallikning for $r(t)$ som beskriver bevegelsen til et legeme som slippes ned i tunellen.

d) Løs denne differensiallikninga. Beskriv bevegelsen (løsningen av likninga). Hva blir perioden til bevegelsen?

e) Hvis vi tar hensyn til at jorda har økende tetthet mot sentrum, vil perioden bli kortere eller lengre?

f) Hva vil skje hvis vi isteden borer tunellen mellom to punkter på ekvator som ligger diametralt mot hverandre?

G 7.3 Sombreropotensialet

I denne oppgaven skal vi Taylorutvikle et potensial som kalles for *Sombreropotensialet*. Dette potensialet er svært relevant for høynivåfysikk, noe vi håper mange av dere vil bli bedre kjent med senere. Potensialet har formen

$$V(x) = -5x^2 + x^4$$

i 1 dimensjon (vi regner her i dimensjonsløse enheter, slik at både x og V er dimensjonsløse).

a) Finn ekstremalpunktene for dette potensialet. Er de maksimums- eller minimumspunkter?

b) Rekkeutvikle potensialet til andre orden om et av minimaene. Hva skjer med et av leddene?

c) Sammenlikn utviklingen med den potensielle energien til en fjær.

d) Hva blir frekvensen til små oscillasjoner av en partikkel med massen $m = 1$ (dimesjonsløs) omkring likevektspunktet?

e) Anta at man har en funksjon $f(x)$ med et bunnpunkt i $x = a$. Vis at formen på Taylorpolynomet av andre grad for $f(x)$ utviklet om punktet a er på formen

$$T_2(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Hvor $T_2(x)$ er notasjonen for Taylorpolynomet av andre grad. Rent generelt, hva ser vi? Hvilket potensial ligner $T_2(x)$ på? Husk at både $f(a)$ og $f''(a)$ er konstanter.

G 7.4 Små svingninger [Eksamen H2024]

Ei fjær som ikke følger Hookes lov har en kraft som er gitt ved

$$F(x) = -kx - cx^2$$

der k og c er konstanter og x er forlengelsen i forhold til likevektslengden ($x < 0$ svarer til at fjæra komprimeres).

a) Finn den potensielle energien til fjæra som funksjon av x.

b) Fjæra henges vertikalt ned fra taket, og det festes et lodd med massen m i enden. Hva er forlengelsen x_0 til fjæra når loddet henger i ro?

c) Skriv ned differensiallikninga som beskriver bevegelsen til loddet.

d) Vi lar $x = x_0 + \xi$, der $\xi \ll x_0$ er et lite utslag fra likevektsposisjonen. Hva er frekvensen til små svingninger av loddet omkring likevektsposisjonen?

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 7.5 Tau utfor bordkanten

Et tau med lengden L ligger på et bord. En del med lengden x henger utfor kanten, mens resten ligger oppe på bordet. Friksjonstallet mellom tauet og bordet er μ. Hva er den maksimale lengden x_m som kan henge ut over kanten uten at tauet begynner å gli? Hvis en lengde $x_0 = x_m + z_0$ henger utfor kanten og vi slipper tauet, hvor lang tid tar det før hele tauet faller utfor kanten? Anta at bordet er høyere enn lengden til tauet.

NukTek

Ekstraoppgave spesielt tilpasset NukTek-studenter. Men også fin for andre

G 7.6 Sterk kjernekraft

Nukleonene i en kjerne opplever en kraft seg i mellom, som ofte kalles den sterke kjernekraften. Denne kraften gir opphav til *nukleon-nukleon potensialet* som holder kjernen samlet. I figur 1 kan du se nukleon-nukleon potensialet, som funksjon av avstand mellom to nukleoner.

Diskuter:

a) Hvorfor går potensialet mot uendelige store verdier ved små avstander? Hvordan hadde verden sett ut om dette ikke var tilfellet?

b) Hvorfor har potensialet et bunnpunkt ved en viss avstand mellom nukleonene? Hvordan hadde

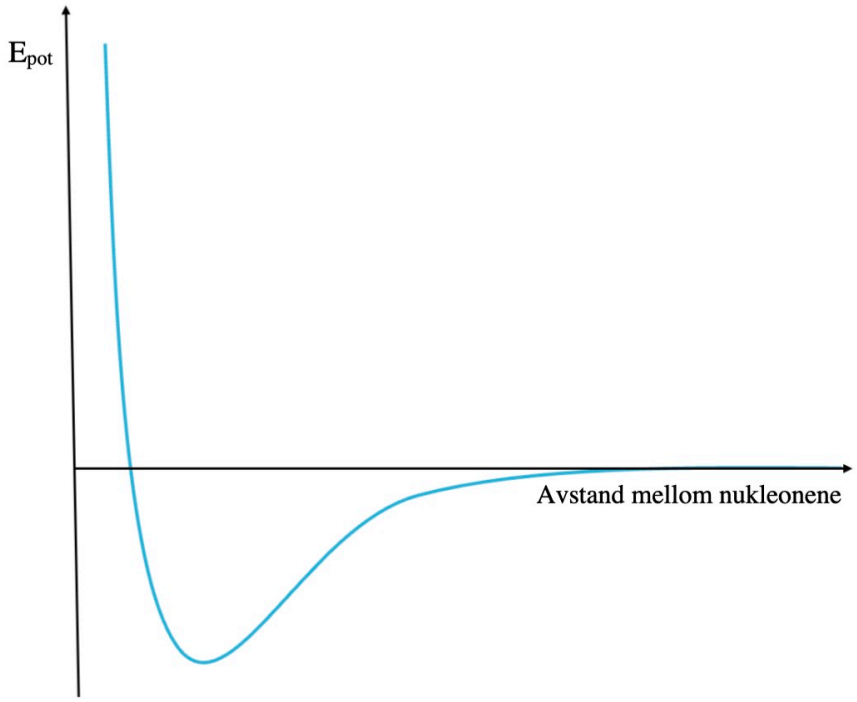


Figure 1: Figuren viser potensialet til nukleon-nukleon kraften som funksjon av avstand mellom sentrum av nukleonene.

verden sett ut om dette ikke var tilfellet?