Oppgavesett uke 7

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

Vi minner om at Taylorrekken $T(x)$ til en funksjon $f(x)$ rundt et punkt $x = a$ er gitt ved

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

.

TDS 7.1 Taylorpolynomer

a) Finn Taylorpolynomet av orden 3 til $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ rundt både $a = 0$ og $a = -1$. Kommentér svarene.

Løsning:

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 4x + 1$$
$$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x + 4$$
$$\frac{d^3f}{dx^3} = 6$$

Taylorpolynomet rundt $a = 0$ blir da

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{f(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{1}{1!}\frac{df(0)}{dx}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(0)}{dx^2}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f(0)}{dx^3}(x-0)^3 \\ &= 3 + x + 2x^2 + x^3 \end{aligned}$$

og polynomet rundt $a = -1$ blir

$$\begin{aligned} f(x) &\approx 3 + 0 - \frac{2}{2}(x+1)^2 + \frac{6}{6}(x+1)^3 \\ &= 3 - x^2 - 2x - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= 3 + x + 2x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Vi ser at begge utviklingene gir oss tilbake det samme tredjegradspolynomet. Siden vi utviklet til tredje orden gir det mening at vi får tilbake et tredjegradspolynom.

b) Finn de tre første leddene i Taylorrekken til $f(x) = \ln x$ rundt $a = 1$. Finn også et uttrykk for restleddet.

Løsning: De tre første leddene, samt restleddet i firkantparantes, er gitt ved

$$T_3(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(a)}{dx^2}(x-a)^2 + \left[\frac{1}{3!}\frac{d^3f(c)}{dx^3}(x-a)^3\right]$$

der c er et tall innenfor intervallet (a,x). Vi har at

$$f(a) = 0$$

og de deriverte blir

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow df(a)dx = 1$$
$$\frac{d^2f(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{d^2f(a)}{dx} = -1$$

Vi fyller inn og får at Taylorrekken med restledd blir

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \left[\frac{1}{3!}\frac{d^3f(c)}{dx^3}(x-a)^3\right]$$

TDS 7.2 Differensialligninger

Finn den generelle løsningen til hver av de følgende differensialligningene.

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0$

c) $\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$

Løsning:

a) Dette er en annenordens homogen differensiallikning, så begynner med å finne røttene til det karakteristiske polynomet.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3}}{2} = -2 \pm 1$$

Løsningen blir da

$$y(x) = Ce^{\lambda_1 x} + De^{\lambda_2 x} = Ce^{-x} + De^{-3x}$$

b) Dette er også en annenordens homogen differensialligning, så vi går fram på samme måte som i a):

$$\lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y(x) = Ee^{-\sqrt{3}x} + Fe^{\sqrt{3}x}$$

c) Denne ligningen kan gjøres om til en separabel differensiallikning, men her velger vi å løse den ved å bruke integrerende faktor. Den integrerende faktoren i dette tilfellet blir $e^{\int 4x\,dx} = e^{2x^2}$. Multipliserer så begge sider av ligningen med den integrerende faktoren, og får at

$$ye^{2x^2} + 4xe^{2x^2}y = \frac{d}{dx}(ye^{2x^2}) = 0$$

Integrerer begge sider med hensyn på x, som gir

$$ye^{2x^2} = C \Rightarrow y(x) = Ce^{-2x^2}$$

TDS 7.3 Fjærkraft

En kloss med masse m ligger på et friksjonsfritt underlag. Den er koblet sammen med en masseløs fjær som er festet i veggen. Vi antar at bevegelsen er endimensjonal og foregår i x-retning. Fjærkraften er gitt ved Hookes lov, $F_k(x) = k\Delta x = -kx$.

a) Bruk Newtons andre lov til å sette opp en differensialligning for klossens bevegelse, dersom vi antar at den har likevektspunkt i $x_0 = 0$.

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen.

c) Anta nå at det er dempning i fjæra, hvor størrelsen til dempekraften er proporsjonal med klossens hastighet: $F_D = -Dv$, hvor D er en konstant. Sett opp en ny differensialligning som beskriver det dempede systemet, og finn det karakteristiske polynomet. Hvilke størrelser som inngår i systemet er det som avgjør hvordan den generelle løsningen blir?

Løsning:

a) Den eneste kraften som virker er fjærkraften F_k, som er gitt ved $F_k = -k\Delta x = -kx$. Newtons andre lov gir da

$$\Sigma F_x = F_k = -kx = ma \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

b) Dette er en homogen andreordens differensiallikning, så vi finner først det karakteristiske polynomet.

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

Den generelle løsningen blir da

$$x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

c) Dempekraften er $F_D = -Dv = -D\frac{dx}{dt}$, så Newtons andre lov gir

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - D\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Det karakteristiske polynomet blir da

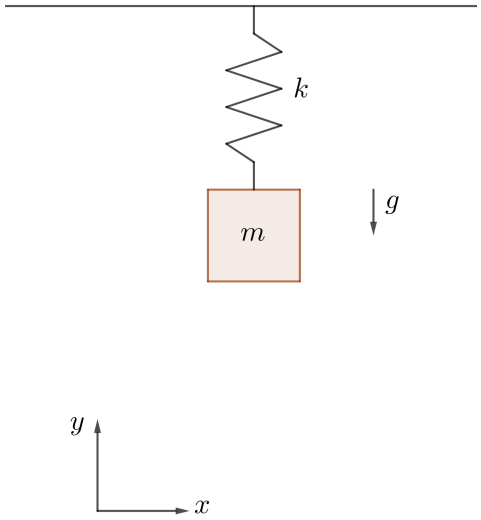
$$\lambda^2 + \frac{D}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{D}{m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{m^2} - 4 \cdot \frac{k}{m}}}{2} = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Det som avgjør hvordan den generelle løsningen blir er løsningene for λ, som igjen avgjøres av $\sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$. Det er dermed dempningen og fjærkonstanten samt klossens masse som avgjør hvordan den generelle løsningen blir.

Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 7.1 Lodd i en fjær



Et objekt med masse m er festet til en masseløs fjær med fjærkonstant k i taket. Fjæren har likevektspunkt i $y = y_0$, og systemet er påvirket av gravitasjonskraften. Vi kan se bort fra luftmotstand.

a) Finn en differensialligning som beskriver bevegelsen til objektet.

Løsning: Vi ser at kreftene kun virker i y-retning. Vi har da kraften fra fjæren som prøver å komme tilbake til likevektspunktet, samt gravitasjonskraften. N2L gir da

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F = F_S - F_G$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k(y - y_0) - mg$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_0) - g$$

b) Finn likevektspunktet y_1 til objektet.

Løsning: Likevektspunktet er karakterisert ved at objektet henger i ro dersom det begynner i nettopp det punktet med null hastighet. Det vil si at summen av alle krefter er lik null. Fra dette får vi da at

$$0 = -k(y_1 - y_0) - mg$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{mg}{k}$$

. Dermed er likevektspunktet

$$y_1 = y_0 - \frac{mg}{k}$$

c) Tolk resultatet. Hvordan vil de ulike variablene til systemet påvirke det nye likevektspunktet?

Løsning: Vi ser at dersom massen blir større, så vil det negative bidraget fra det andre leddet bli større og likevektspunktet vil bevege seg nærmere bakken. Dersom fjærkonstanten dominerer, så vil det negative bidraget bli mindre og likevektspunktet vil være nærmere fjærens likevektspunkt.

d) Definer en ny variabel $z = y - y_1$ som er forflytningen fra likevektspunktet. Finn differensiallikningen som z må tilfredsstille.

Løsning:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_0) - g = -\frac{k}{m}(y - y_0 + \frac{mg}{k}) = -\frac{k}{m}(y - y_1) = -\frac{k}{m}z.$$

G 7.2 Tunell gjennom jorda

Tenk at vi borer en tunell gjennom jorda fra nordpolen til sørpolen. Anta at jorda har samme tetthet alle steder (dette er ikke sant, tettheten er større i sentrum). Man kan vise at tyngdekrafta som virker på deg i en avstand r fra jordsenteret er den samme som fra en punktmasse i sentrum med masse lik den delen av jorda som ligger i nærmere sentrum enn r. Vi antar at det ikke er luft i tunellen slik at vi kan se bort fra luftmotstand.

a) Finn et uttrykk for massen til den delen av jorda som er innen for en radius r.

Løsning: La massen til jorda være M_j og radien R. Da er massen til den delan av jorda som ligger i avstanden mindre enn r fra sentrum

$$M(r) = M_j \frac{r^3}{R^3}.$$

b) Finn et uttrykk for tyngdekrafta som virker på et legeme i avstanden r fra jordsenteret.

Løsning: Hvis massen til legemet er m er tyngdekrafta

$$F = G\frac{M(r)m}{r^2} = G\frac{M_j m}{R^2}\frac{r}{R} = mg\frac{r}{R}.$$

der g er tyngdeakselerasjonen ved overflata.

c) Finn en differensiallikning for $r(t)$ som beskriver bevegelsen til et legeme som slippes ned i tunellen.

Løsning:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{g}{R}r.$$

d) Løs denne differensiallikninga. Beskriv bevegelsen (løsningen av likninga). Hva blir perioden til bevegelsen?

Løsning: Vi velger initialbetingelsen at legemet holdes i ro ved overflata og så slippes. Dvs. $r(0) = R$ og $v(0) = 0$. Da blir

$$r(t) = R_0 \cos \omega t$$

med $\omega = \sqrt{g/R}$. Legemet faller gjennom sentrum til jorda og kommer ut på andre siden. Der snur det og faller tilbake igjen. Perioden blir $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R/g} = 84$ min.

e) Hvis vi tar hensyn til at jorda har økende tetthet mot sentrum, vil perioden bli kortere eller lengre?

Løsning: Kortere. Når mer av massen er nærmere sentrum vil krafta avta langsommere ettersom vi nærmer oss sentrum. Akselerasjonen blir altså større, farta større og periodetida mindre.

f) Hva vil skje hvis vi isteden borer tunellen mellom to punkter på ekvator som ligger diametralt mot hverandre?

Løsning: På grunn av jordas rotasjon vil legemet ha en tangentiall hastighet, og når det faller nedover vil det ikke lengre følge en rett linje. Dermed vil det treffe veggen i tunellen. Dette kan tilskrives Corioliskrafta so kommer i FYS1105.

G 7.3 Sombreropotensialet

I denne oppgaven skal vi Taylorutvikle et potensial som kalles for *Sombreropotensialet*. Dette potensialet er svært relevant for høynivåfysikk, noe vi håper mange av dere vil bli bedre kjent med senere. Potensialet har formen

$$V(x) = -5x^2 + x^4$$

i 1 dimensjon (vi regner her i dimensjonsløse enheter, slik at både x og V er dimensjonsløse).

a) Finn ekstremalpunktene for dette potensialet. Er de maksimums- eller minimumspunkter?

Løsning:

$$\frac{dV}{dx} = -10x + 4x^3$$

$$-10x + 4x^3 = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x^2 = \frac{10}{4}$$

Vi har da ekstremalpunkter for

$$x = 0 \text{ og } x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Videre undersøker vi om de er maksimum eller minimum.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -10 + 12x^2$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x=0) = -10$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x=\frac{\sqrt{10}}{2}) = -10 + 30 = 20$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x=-\frac{\sqrt{10}}{2}) = -10 + 30 = 20$$

Vi ser da at $x = 0$ er et maksimumspunkt og at $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ er minimumspunkt.

b) Rekkeutvikle potensialet til andre orden om et av minimaene. Hva skjer med et av leddene?

Løsning:

$$V(x) \approx V\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) + \frac{V'\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) + \frac{V''\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

Vi vet at den enkeltderiverte av et ekstremalpunkt er null, derfor forsvinner førsteordensleddet. Vi sitter da igjen med

$$V(x) \approx -\frac{25}{4} + 10\left(x - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

c) Sammenlikn utviklingen med den potensielle energien til en fjær.

Løsning: Den potensielle energien til en fjær er gitt ved $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$, der Δx er forflytningen relativ til et likevektspunkt. Vi kan se at utviklingen til $V(x)$ også har et kvadratisk ledd på denne formen, der likevektspunktet er et av minimumspunktene. Potensialet oppfører seg derfor som en energibevarende fjær i nærheten av et stabilt likevektspunkt.

d) Hva blir frekvensen til små oscillasjoner av en partikkel med massen $m = 1$ (dimesjonsløs) omkring likevektspunktet?

Løsning: For ei fjær vet vi at frekvensen er $\sqrt{k/m}/2\pi$. Nær likevektspunktet svarer vårt potensial til ei fjær med fjærkonstanten $k = 20$, og dermed er frekvensen $\sqrt{20}/2\pi = \sqrt{5}/\pi$.

e) Anta at man har en funksjon $f(x)$ med et bunnpunkt i $x = a$. Vis at formen på Taylorpolynomet av andre grad for $f(x)$ utviklet om punktet a er på formen

$$T_2(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Hvor $T_2(x)$ er notasjonen for Taylorpolynomet av andre grad. Rent generelt, hva ser vi? Hvilket potensial ligner $T_2(x)$ på? Husk at både $f(a)$ og $f''(a)$ er konstanter.

Løsning: Taylorpolynomet av andre grad til $f(x)$, som vi her kaller $T_2(x)$, blir

$$T_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Siden det er et bunnpunkt i $x = a$ blir den førstederiverte lik 0, så førsteordensleddet forsvinner. Vi får da at

$$T_2(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Vi ser da at approksimasjonen av $f(x)$ har formen til en harmonisk oscillator med et konstantledd $f(a)$. Dersom dette hadde vært for eksempel potensialet til en fjær så kunne vi ha identifisert $f''(a)/2$ som fjærkonstanten og a som likevektspunktet.

G 7.4 Små svingninger [Eksamen H2024]

Ei fjær som ikke følger Hookes lov har en kraft som er gitt ved

$$F(x) = -kx - cx^2$$

der k og c er konstanter og x er forlengelsen i forhold til likevektslengden ($x < 0$ svarer til at fjæra komprimeres).

a) Finn den potensielle energien til fjæra som funksjon av x.

Løsning:

$$U(x) = -\int_0^x F(x')dx' = \int_0^x (kx + cx^2)dx' = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{3}cx^3$$

b) Fjæra henges vertikalt ned fra taket, og det festes et lodd med massen m i enden. Hva er forlengelsen x_0 til fjæra når loddet henger i ro?

Løsning: Vi lar positiv retning være nedover, og når loddet henger i ro i posisjonen x_0 er da

$$F(x_0) + mg = -kx_0 - cx_0^2 + mg = 0.$$

Dette gir

$$x_0 = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4cmg}}{-2c} = \frac{-k \mp \sqrt{k^2 + 4cmg}}{2c}.$$

Siden vi er interessert i en positiv løsning velger vi $+$ som fortegn foran kvadratrota.

c) Skriv ned differensiallikninga som beskriver bevegelsen til loddet.

Løsning:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - cx^2.$$

d) Vi lar $x = x_0 + \xi$, der $\xi \ll x_0$ er et lite utslag fra likevektsposisjonen. Hva er frekvensen til små svingninger av loddet omkring likevektsposisjonen?

Løsning: Da er

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g - \frac{k}{m}(x_0 + \xi) - \frac{c}{m}(x_0 + \xi)^2 = g - \frac{k}{m}x_0 - \frac{c}{m}x_0^2 - \frac{k + 2cx_0}{m}\xi - \frac{c}{m}\xi^2.$$

Her er summen av de tre første leddene null etter definisjonen av x_0 (samme likning som vi løste i b)). Det siste leddet er lite siden ξ er liten, og vi ser bort fra det. Da har vi likninga

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k + 2cx_0}{m}\xi$$

som vi kjenner igjen som likninga for en harmonisk oscillator med vinkelfrekvens

$$\omega = \sqrt{\frac{k + 2cx_0}{m}}.$$

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 7.5 Tau utfor bordkanten

Et tau med lengden L ligger på et bord. En del med lengden x henger utfor kanten, mens resten ligger oppe på bordet. Friksjonstallet mellom tauet og bordet er μ. Hva er den maksimale lengden x_m som kan henge ut over kanten uten at tauet begynner å gli? Hvis en lengde $x_0 = x_m + z_0$ henger utfor kanten og vi slipper tauet, hvor lang tid tar det før hele tauet faller utfor kanten? Anta at bordet er høyere enn lengden til tauet.

Løsning: Vi lar massen til tauet være M og masse per lengde $\lambda = M/L$. Da er tyngdekrafta på den delen som henger utfor kanten på bordet $G = \lambda x g$ og friksjonskrafta på den delen av tauet som ligger på bordet er $F \leq \mu\lambda(L-x)g$. For at snora skal ligge i ro må $F = G$, og den maksimale lengden x_m får vi når friksjonen er maksimal:

$$\lambda x g = \mu\lambda(L-x)g$$

som vi kan løse og få

$$x_m = \frac{\mu}{1+\mu}L. \tag{1}$$

Når $x_0 = x_m + z_0 > x_m$ er $G > F$ og tauet glir. Vi får da

$$Ma = G - F = \lambda x g - \mu\lambda(L-x)g$$

Hvis vi setter inn $x = x_m + z$ og bruker likning (1) og $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$ får vi

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{(1+\mu)g}{L}z = \frac{1}{\tau^2}z$$

når vi definerer $\tau = \sqrt{\frac{(1+\mu)g}{L}}$. Den generelle løsningen av denne likningen er

$$z = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}.$$

For å bestemme integrasjonskonstantene A og B bruker vi initialbetingelsene

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{A}{\tau} - \frac{B}{\tau} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = B$$

og

$$z(0) = A + B = z_0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = B = \frac{z_0}{2}$$

Dermed er den løsningen vi trenger

$$z = \frac{z_0}{2}\left(e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}\right).$$

Hele tauet er utenfor kanten når $L = x = x_m + z_L$, eller $z = z_L = L - x_m$. Det tar tida

$$t = \tau \ln\left[\frac{z_L}{z_0} + \sqrt{\left(\frac{z_L}{z_0}\right)^2 + 1}\right].$$

Alternativt kan løsningen uttrykkes ved hyperbolske funksjoner:

$$z = z_0 \cosh\frac{t}{\tau}$$

og

$$t = \tau \operatorname{arcosh}\frac{z_L}{z_0}$$

NukTek

Ekstraoppgave spesielt tilpasset NukTek-studenter. Men også fin for andre

G 7.6 Sterk kjernekraft

Nukleonene i en kjerne opplever en kraft seg i mellom, som ofte kalles den sterke kjernekraften. Denne kraften gir opphav til *nukleon-nukleon potensialet* som holder kjernen samlet. I figur 1 kan du se nukleon-nukleon potensialet, som funksjon av avstand mellom to nukleoner.

Diskuter:

a) Hvorfor går potensialet mot uendelige store verdier ved små avstander? Hvordan hadde verden sett ut om dette ikke var tilfellet?

b) Hvorfor har potensialet et bunnpunkt ved en viss avstand mellom nukleonene? Hvordan hadde verden sett ut om dette ikke var tilfellet?

Løsning:

a) Nukleonene i et atom kan ikke komme så nærme hverandre at de begynner å overlappe. Det må derfor være en sterkt frastøtende kraft som virker mellom nukleonene når de kommer nært på hverandre. Dersom nukleon-nukleon potensialet ikke hadde gått mot uendelige verdier for små avstander hadde all materie kollapset.

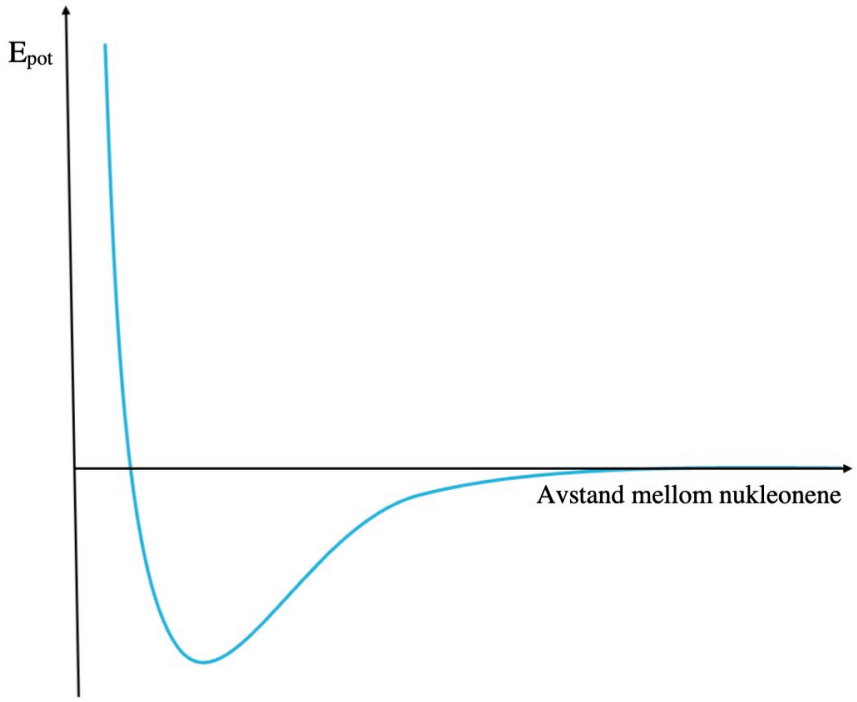


Figure 1: Figuren viser potensialet til nukleon-nukleon kraften som funksjon av avstand mellom sentrum av nukleonene.

b) Ettersom protonene i en kjerne blir påvirket av en frastøtende elektromagnetisk kraft, må man ha en tiltrekkende kraft som kan holde protonene i kjernen samlet til tross for de frastøtende kreftene. Nukleon-nukleon potensialet må ha et bunnpunkt for at atomerkjerner skal kunne dannes og samtidig ikke kollapse inn i hverandre.