Oppgavesett uke 8

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

Vi minner om definisjonen av den deriverte er gitt ved

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Når vi deriverer numerisk må vi velge en endelig (og fonuftig) størrelse på Δx. Vi er også begrenset til å regne ut den deriverte for bestemte verdier av x. Noen ganger har vi heller ikke et gitt matematisk uttrykk for funksjonen $f(x)$. Dette kan for eksempel skje dersom vi måler posisjonen til en gjenstand ved bestemte tidspunkter og vil finne farta. I slike tilfeller har vi i praksis lister med samsvarende verdier x_i og $f_i = f(x_i)$. Når man deriverer numerisk må man derfor omskrive likning (1) til en av de to formene

$$\frac{df(x)}{dx} \to \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n}. \tag{2}$$

TDS 8.1 Numerisk integrasjon

I denne oppgaven skal vi bruke venstre trappesum for å finne integralet av noen funksjoner numerisk.

For en funksjon $f(x)$ og et startpunkt x_0 definerer vi det bestemte integralet

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Venstre trappesum tilnærmer $F(x)$ som

$$F(x+\Delta x) = F(x) + f(x)\Delta x$$

hvor Δx er et lite intervall på x-aksen.

a) Skriv en funksjon i Python som har input en array med koordinater x_i og tilsvarende funksjonsverdier $f(x_i)$ og returnerer en array $F(x_i)$.

b) Numerisk integrer følgende funksjoner med steglengde $dx = 0.0001$ og på intervallet $x \in [\frac{\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}]$. Visualiser integralet.

   (a) $f(x) = \csc(x)$

   (b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

   (c) Integralet

$$I = \int_0^{\pi} \csc(x)dx$$

er udefinert. Hva vil skje dersom man prøver å beregne integralet numerisk? Kan den numeriske algoritmen gi deg et svar og vil dette eventuelle svaret være riktig? Prøv å gjennomføre integralet numerisk og se hva som skjer. *Hint: Plott* $f(x)$.

TDS 8.2 Baseball

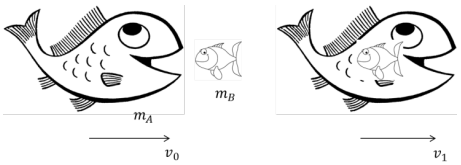
En baseball har masse $m = 0{,}145$ kg. Ballen kastes med $v_0 = 45$ m/s, og etter slaget beveger ballen seg med $v_1 = 55$ m/s i motsatt retning.

a) Hvor stor er impulsen fra balltreet?

b) Hvis ballen forblir i kontakt med balltreet i $\Delta t = 2{,}0$ ms, hvor stor er den gjennomsnittlige kraften fra balltreet på ballen?

TDS 8.3 To fisker

En fisk på 20 kg svømmer i havet med $v = 1{,}0$ m/s og spiser opp en mindre fisk på 5,0 kg som står helt stille. Du trenger ikke ta hensyn til motstandskraften i vannet.



a) Med hvilken hastighet svømmer den store fisken videre etter den har spist den mindre?

b) Hvor mye mekanisk energi ble tapt under middagen?

TDS 8.4 Ukas difflikning

Finn løsninga til differensiallikninga

$$\ddot{x} + 4x + \dot{x} = 0$$

med initialbetingelsene

$$x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 8.1 Trapesmetoden

I denne oppgaven skal vi sammenlikne to metoder for numerisk integrasjon: Venstre trappesum og trapesmetoden.

For venstre trappesum er integralet tilnærmet med

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \tag{3}$$

mens for trapesmetoden bruker vi

$$I = \sum_{i=}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\Delta x \tag{4}$$

Vi vil studere funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4 - x^3 + \pi}},$$

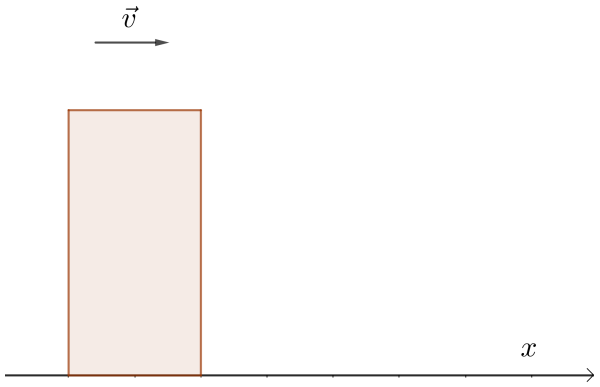
og integrere den på intervallet $x \in [1, 10]$.

a) Bruk venstre trappesum og trapesmetoden for å numerisk finne arealet under grafen til $f(x)$. Sammenlign verdiene du får med de to metodene. Husk å bruke samme steglengde på begge metodene samt samme intervall for x.

b) Forsøk deretter å sammenlikne de to metodene for ulike steglengder. For eksempel kan det være passe å $n = \{4, 8, 12, 16, 20, 100, 200, 1000\}$ datapunkter. Plott arealet I under $f(x)$ for de to metodene som en funksjon av antall datapunkter. Hvilken av metodene konvergerer først? Hva vil det si at en numerisk metode konvergerer før en annen?

G 8.2 Eskild Eskensen

I denne oppgaven skal vi se på farten til en person som har vært på joggetur.



Figuren over viser en noe forenkelt person, Eskild Eskensen, på joggetur. Vi skal numerisk finne akselerasjonen til Eskild, strekningen han har tilbakelagt, samt analysere og visualisere resultatet. Senere skal dere gjøre samme, men med et datasett med små mengder støy for å se hvordan det endrer de numeriske resultatene.

a) Skriv et skript i Python som leser inn farten og korresponderende tidspunkter fra filen velocity.txt og plott farten som en funksjon av tid. Kan dere se fra farten når Eskild akselererer negativt og positivt? Hvor lang tid varte joggeturen? Husk aksenavn!

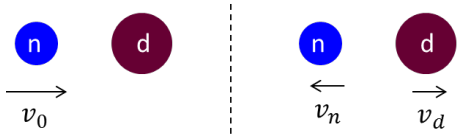
b) Numerisk deriver farten til Eskild og plott akselerasjonen som en funksjon av tid. Stemmer akselerasjonen med det dere kom frem til i forrige deloppgave?

c) Numerisk integrer farten for å finne strekningen tilbakelagt per sekund. Visualiser resultatet. Hva var den totale distansen tilbakelagt på joggeturen til Eskild?

d) Gjør deloppgave a, b og c igjen, men nå med filen velocitynoise.txt. Sammenlign resultatene med og uten støy ved å plotte dem sammen. Hvor stor er den typiske størrelsen av støyen i farta? Ser dere en forskjell i de numeriske beregningene når man legger til en liten mengde støy? Hva er absoluttverdien av differansen mellom tilbakelagt strekning med og uten støy? Kommenter resultatene.

G 8.3 Kjernereaksjon

I tungtvannsmodererte kjernereaktorer kolliderer nøytroner med masse m_n med deuteroner med masse m_d. I en slik reaktor kolliderer et nøytron med hastighetv_0 elastisk med et deuteron som er i ro. Kollisjonen er kortvarig og ytre krefter som gravitasjon er neglisjerbare i forhold til de indre kreftene mellom nøytronet og deuteronet.



a) Hva er hastigheten til nøytronet, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige hastigheten, etter kollisjonen?

b) Hvor mye kinetisk energi E_n, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige kinetiske energien E_0, har nøytronet igjen etter kollisjonen?

c) Hvor mye kinetisk energi, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige kinetiske energien, har nøytronet igjen etter fem slike kollisjoner?

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 8.4 Falle fra månen

Hvor lang tid tar det å falle fra månen til jorda? Vi antar at vi starter i ro i fohold til jorda i samme avtand som månen (men langt fra månen, så vi ikke trenger å ta hensyn til tyngdekrafta fra den), og vil finne tida det tar før vi når jordoverflata. Vi kaller avstanden fra jordsenteret til startposisjonen R_0 og til jordoverflata R.

a) Bruk dimensjonsanalyse til å finne et uttrykk for tida T det tar. Uttrykket kommer til å inneholde en ubestemt funksjon som du ikke kan finne med dimensjonsanalyse.

b) Finn et uttrykk for farta i avstanden r.

c) Finn tida T som trengs for å nå R. Her kan du trenge integralet

$$\int_x^1 \sqrt{\frac{u}{1-u}}du = \sqrt{x(1-x)} + \arccos\sqrt{x}.$$

d) Vi vil sjekke uttrykket for et kjent tilfelle. Hvis $h = R_0 - R \ll R_0$ (som ikke er tilfelle om vi faller helt fra månen il jorda, bare en mye kortere strekning) har vi tilnærmet fritt fall med konstant akselerasjon. Finn tida det tar å falle strekningen h med kosntant akselerasjon $g_0 = \frac{GM}{R_0^2}$.

e) Prøv å rekkeutvikle uttrykket fra c) i ei Taylorrekke for $y = 1 - x \ll 1$. Forklar hvorfor det ikke går an.

f) Finn ut hvordan du allikevel kan vise at det tilnærmede uttrykket i d) kommer fram av det eksakte uttrykket i c) i grensa $y \ll 1$ og finn laveste ordens korreksjon til uttrykket i d).

NukTek

Ekstraoppgave spesielt tilpasset NukTek-studenter. Men også fin for andre

G 8.5 Radioaktivt henfall

^{18}F er en av de mest brukte radioaktive nuklidene i medisin. Den kan brukes i positron emisjons tomografi, også kjent som PET-scan. Dette er en diagnostisk undersøkelse som brukes til å ta bilder av kroppen, og kan blant annet brukes til å finne kreftsvulster.

^{18}F henfaller ved å sende ut positroner og har en halveringstid $T_{1/2} = 109.77$ min. Det betyr at etter 109.77 min ble halvparten av 18F dannet om tilbake til 18O. Relasjonen mellom halveringstid $T_{1/2}$ og henfallskonstanten λ er gitt ved

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \tag{5}$$

Henfallskonstanten gir raten som henfallsprosesser per sekund.

a) Regn ut henfallskonstanen til ^{18}F.

^{18}F produseres ved å akselerere protoner i en partikkelakselerator som deretter blir skutt på ^{18}O, som deretter sender ut et nøytron.

$$^{18}\mathrm{O} + p \rightarrow ^{18}\mathrm{F} + n$$

Siden ^{18}F selv er radioaktivt, vil en del av den produserte mengden ^{18}F henfalle mens bestrålingen med protoner foregår. Antallet ^{18}F nuklider som finnes, $N(t)$, som funksjon av bestrålingstiden, t, er derfor gitt ved

$$\frac{dN(t)}{dt} = R_p - \lambda N(t), \tag{6}$$

der R_p er produksjonsraten og λ er henfallskonstanten til ^{18}F. Anta at det produseres $44 \cdot 10^{10}$ ^{18}F nuklider per sekund, altså $R_p = 44 \cdot 10^{10}\mathrm{s}^{-1}$.

b) Løs differensialikningen over numerisk, slik at du beregner hvor mange ^{18}F nuklider som finnes som funksjon av bestrålingstid. Plot for rundt 20 timers bestrålingstid. Husk at vi starter med null produserte ^{18}F kjerner.

c) Hva er optimal bestrålingstid for å produsere mest mulig ^{18}F?

d) Løs differensiallikningen gitt i likning 6 analytisk.