Oppgavesett uke 9

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

TDS 9.1 Rakett

En rakett brenner 0,100 kg drivstoff per sekund. Eksosen drives ut som en gass med 1500 m/s.

a) Hva er framdriftskraften til raketten?

Løsning: Fra rakettligningen får vi:

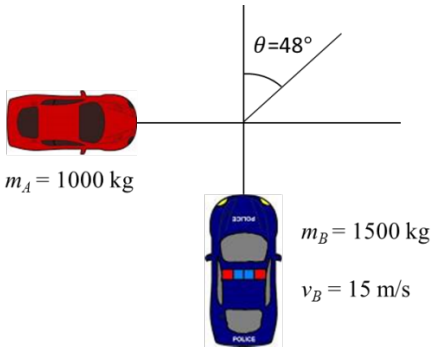
$$F = -v_{ex}\frac{dm}{dt} = -1500 \text{ m/s}\frac{-0,100 \text{ kg}}{1 \text{ s}} = 150 \text{ N}.$$

b) Er det mulig å bruke raketten i verdensrommet hvor det er ingen atmosfære?

Løsning: Eksosen drives ut med et visst driv. Raketten får samme driv som framdrift. Dette fungerer også i verdensrommet.

TDS 9.2 Råkjører

En liten sportsbil på 1000 kg kjører med ukjent hastighet v_A fra vest til øst. En politibil på 1500 kg kjører med hastighet $v_B = 15$ m/s fra sør til nord. I et kryss krasjer bilene og henger sammen etter kollisjonen. Sportsbilsjåføren påstår at han ikke kjørte over fartsgrensen på 50 km/h = 13,9 m/s. Politibetjenten, som har tatt FYS1100, ser på bremsesporene og måler at bilene beveget seg med vinkelen $\theta = 48°$ i nordøstlig retning etter krasjet. På grunn av dette pågriper politibetjenten sportsbilsjåføren. Hvor fort kjørte han?



Løsning: Det virker ingen netto ytre krefter i horisontal retning, derfor er driv bevart. Bevaring av driv gjelder separat i x-retning (retningen til sportsbilen)

$$m_A v_A = (m_A + m_B) v \sin\theta$$

og y-retning (retningen til politibilen)

$$m_B v_B = (m_A + m_B) v \cos\theta.$$

Deler vi likningene på hverandre får vi

$$\frac{m_A v_A}{m_B v_B} = \tan\theta$$

som gir

$$v_A = \frac{m_B}{m_A} v_B \tan\theta = 25 \text{ m/s}.$$

TDS 9.3 Inhomogen difflikning

Den inhomogene differensiallikningen $y'' + 4y = \sin(2x)$ har løsningen $y(x) = 10\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x)$ når $y(0) = 10$ og $y'(0) = 0$. Løs likningen numerisk, og plott både analytisk og numerisk løsning sammen.

Løsning:

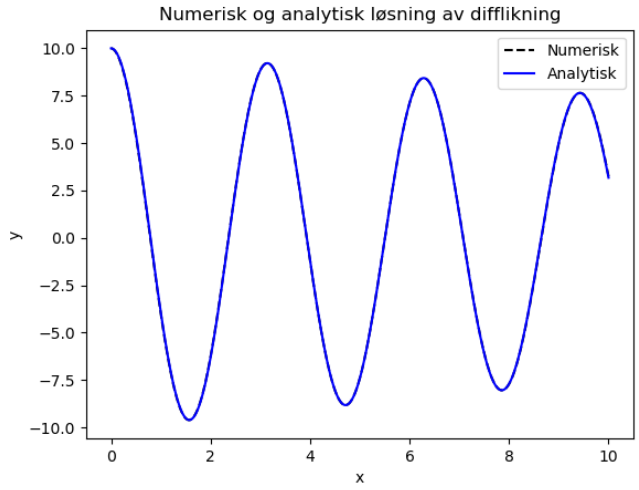
```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def analytical(x):
5     return 10 * np.cos(2 * x) + np.sin(2 * x) / 8 - x * np.cos(2 * x↩
      ) / 4
6
7 x0 = 0
8 x_end = 10
```

```
y0 = 10
yprime0 = 0


dx = 0.01
N = int((x_end - x0) / dx)
x = np.linspace(x0, x_end, N)
y = np.zeros(N, float)
yprime = np.zeros(N, float)
y[0] = y0
yprime[0] = yprime0

for i in range(N - 1):
    ydoubleprime = np.sin(2 * x[i]) - 4 * y[i]
    yprime[i + 1] = yprime[i] + ydoubleprime * dx
    y[i + 1] = y[i] + yprime[i + 1] * dx

plt.plot(x, y, label = 'Numerisk', color = 'black', linestyle = '↩
    dashed')
plt.plot(x, analytical(x), label = 'Analytisk', color = 'blue')
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Numerisk og analytisk løsning av difflikning')
plt.savefig('diffeq_losning.png')
plt.show()
```



TDS 9.4 En ball som faller

I denne oppgaven skal vi se på bevegelsen til en ball både med og uten luftmotstand. Ballen veier 623 g, og har en radius på 39.0 cm. Den slippes fra en 20.0-m høy bygning, og vi antar at den faller

rett ned.

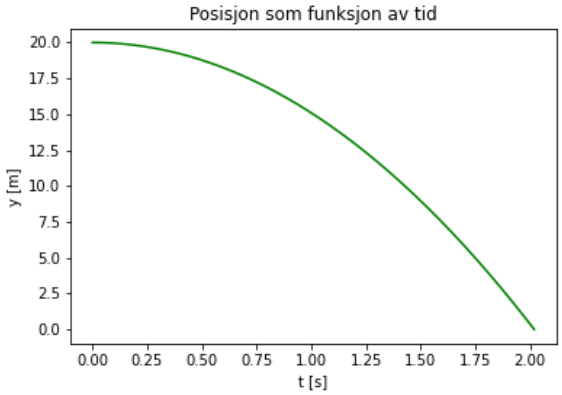
a) Regn ut hvor lang tid ballen bruker på å treffe bakken dersom du slipper den fra ro og ser bort fra luftmotstand.

Løsning: Den vertikale posisjonen y som funksjon av tid er generelt gitt ved $y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ for konstant akselerasjon. Vi velger positiv y-retning oppover. Vi har $y_0 = h$, $v_0 = 0$ m/s og $a = -g$. Vi får da at $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. Ballen treffer bakken når $y = 0$ m, som gir at

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}^2}} \approx 2.02 \text{ s}$$

b) Lag et plott av ballens høyde som funksjon av tid.

Løsning: Eksempelkode på slutten av løsningsforslaget.



c) Bruk Newtons andre lov til å sette opp et uttrykk for akselerasjonen til ballen, når vi inkluderer luftmotstandskraften som har en størrelse gitt ved

$$F_D = \frac{1}{2}\rho D A v^2$$

der ρ er tettheten til lufta, D er en koeffisient som beskriver motstanden, A er ballens overflateareal og v er farten til ballen. *Obs! Hvilken retning peker luftmotstandskraften?*

Løsning: Newtons andre lov gir

$$\sum F = ma = G + F_D = -mg + \frac{1}{2}\rho D A v^2$$

Fortegnene er valgt slik at y-aksen peker oppover. Luftmotstanden skal virke i motsatt retning av bevegelsen. Akselerasjonen blir da

$$a = -g + \frac{\rho A D}{2m} v^2$$

d) Finn høyden numerisk som funksjon av tid når du tar hensyn til luftmotstand, og plott den numeriske høyden sammen med den analytiske løsningen fra oppgave a). Bruk $\rho = 1.2$ kg/m^3 og $D = 0.3$. Hvor lang tid bruker ballen nå før den treffer bakken?

Løsning:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 623 * 1e-3 #[kg]
g = 9.81 #[m/s^2]
D = 0.3
rho = 1.2 #[kg/m^3]
r = 39 * 1e-2 #[m]
A = 4 * np.pi * r ** 2 #[m^2]
h = 20 #[m]

# Deloppgave a

def y_analytical(t):
    return h - 0.5 * g * t ** 2

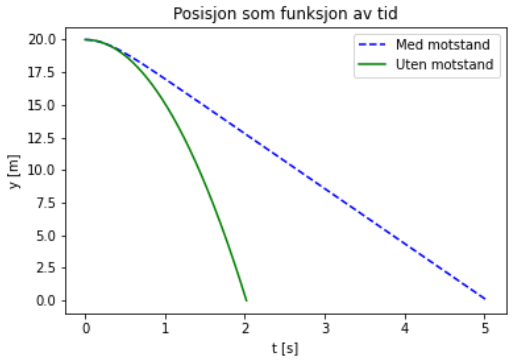
time = np.sqrt(2 * h / g)
print(f'Tid ballen bruker uten luftmotstand: {time :.3f}s')
t_analytical = np.linspace(0, time, 1001)
plt.plot(t_analytical, y_analytical(t_analytical), color = 'green')
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('y [m]')
plt.title('Posisjon som funksjon av tid')
plt.savefig('analytisk.png')
plt.show()

# Deloppgave d

def drag_func(v):
    epsilon = 0.5 * rho * D * A
    return epsilon * v ** 2

T = 100 #[s]
N = 10000
dt = T / N
vy = np.zeros(N, float)
y = np.zeros(N, float)
```

```
38  t = np.zeros(N, float)
39
40  vy[0] = 0
41  y[0] = h
42
43  for i in range(N - 1):
44      Fy = - m * g + drag_func(vy[i])
45      ay = Fy / m
46      vy[i + 1] = vy[i] + ay * dt
47      y[i + 1] = y[i] + vy[i + 1] * dt
48      t[i + 1] = t[i] + dt
49      if y[i + 1] < 0:
50          print(f'Tid ballen bruker med luftmotstand: {t[i] :.3f}s')
51          k = i
52          break
53
54  plt.plot(t[:k], y[:k], color = 'blue',
55           label = 'Med motstand', linestyle = 'dashed')
56  plt.plot(t_analytical, y_analytical(t_analytical), color = 'green'↩
    ,
57           label = 'Uten motstand')
58  plt.title('Posisjon som funksjon av tid')
59  plt.xlabel('t [s]')
60  plt.ylabel('y [m]')
61  plt.legend()
62  plt.savefig('ball.png')
63  plt.show()
```



Ballen bruker nå omtrent 5.03 s. Vi kan se at ballen beveger seg med konstant hastighet etter omtrent 0.50 s når man inkluderer luftmotstand, som vil si at akselerasjonen etter dette punktet blir null (summen av kreftene er null). Etter ca. 0.50 s må derfor ballen ha nådd terminalhastighet.

TDS 9.5 Ukas difflikning

Finn løsninga til differensiallikninga

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$$

med initialbetingelsene

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Løsning: Vi tipper $x(t) = e^{\lambda t}$ og får

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

som gir

$$\lambda_{\pm} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Den generelle løsninga er da

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}.$$

Initialbetingelsene gir

$$x(0) = A + B = 0$$

$$\dot{x}(0) = \lambda_+ A + \lambda_- B = 1$$

som betyr

$$A = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{1}{3}.$$

Dermed er løsinga

$$x(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t}).$$

Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 9.1 Fyll opp raketten

Du er ansvarlig for å fylle drivstoff på en rakett som er dokket ved en romstasjon i verdensrommet. For at mannskapet kan komme hjem til jorden må raketten akselerere opp til en hastighet på 6000 m/s før drivstoffet er tomt. Eksos drives ut med en relativ hastighet på 2000 m/s, og romfartøyet veier 100 t uten drivstoff. Du skal etterpå beregne hvor mye drivstoff du må fylle for at raketten kommer hjem til jorden.

a) Du må bruke rakettligningen:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Forklar den fysiske betydningen av ligningen med egne ord. Diskuter i gjerne smågrupper!

b) Hvorfor må du bruke integralregning for å løse oppgaven? **Løsning:** Fordi massen endrer seg over tid.

c) Hvor mye drivstoff må du fylle for at det går bra? **Løsning:** Dypt i verdensrommet virker ingen ytre krefter. Hastigheten til raketten og eksosen er i motsatt retning

$$-v_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt}.$$

Det gir

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{dv}{dt}dt = -v_{rel}\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}dt = -v_{rel}\int_{m_0}^{m_1}\frac{dm}{m} = -v_{rel}\ln\frac{m_1}{m_0}.$$

Dermed er

$$v(t_1) - v(t_0) = -v_{rel}\ln\frac{m_1}{m_0}.$$

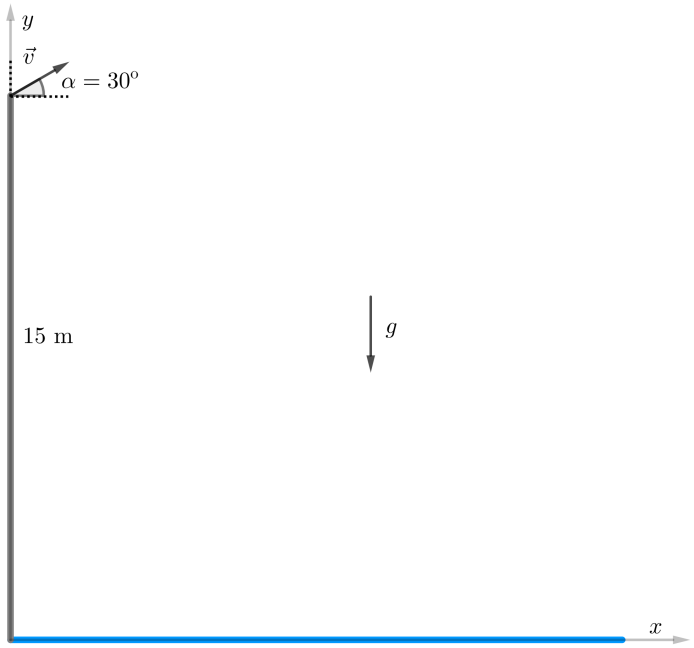
Hvis vi setter inn $v(t_0) = 0$, $v(t_1) = 6000$ m/s, $v_{rel} = 2000$ m/s, $m_1 = 100$ t får vi

$$m_0 = m_1 e^{\frac{v_1}{v_{rel}}} = 2009 \text{ t}.$$

Totalvekten i begynnelsen må være 2009 t; du må altså fylle 1909 t drivstoff.

G 9.2 Ei læreboks skjebne

En frustrert student sparker læreboka si utfor en klippe. (Hen studerer selvfølgelig ikke fysikk, siden det aldri ville føre til en slik frustrasjon!) Klippen er 15 meter over havet, og vi antar at studenten i sitt sinne har klart å forme læreboka om til en perfekt kule med masse 4.0 kg før sparket gjennomføres. Den forlater klippen med en vinkel $\alpha = 30^\circ$ grader med horisontalen, og en fart på 10 m/s. Figuren under illustrerer situasjonen.



a) Hvor lang tid bruker boka på å treffe vannet, dersom vi antar at det ikke er noen luftmotstand? Finn også ut hvor langt unna klippen boka er i det den treffer vannet.

Løsning: Vi setter først opp bevegelsesligningene for x- og y-retning:

$$x(t) = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_0 t\cos\alpha$$
$$y(t) = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = h + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

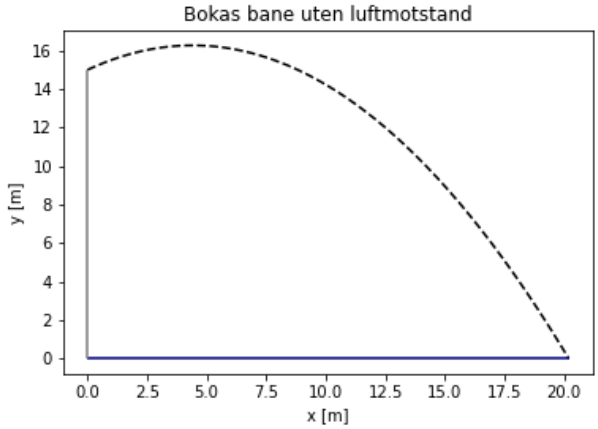
der vi har kalt klippens høyde over vannet for h, og satt inn tyngdeakselerasjonen g for akselerasjonen i negativ y-retning. Boka treffer vannet når $y = 0$m, som gir

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{-v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}g\right)\cdot h}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}g\right)} = \frac{v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

Når vi setter inn verdiene får vi da enten -1.31 s eller 2.33 s. Vi forkaster det negative svaret, og får da at boka treffer vannet etter 2.3 s. Hvis vi setter denne verdien inn i uttrykket for x får vi at boka treffer vannet 20 m unna klippen.

b) Lag en graf som viser ballens posisjon fra den kastes til den treffer vannet.

Løsning:



Videre skal vi ta hensyn til luftmotstand ved å legge til en luftmotstandskraft F_D. Den virker i motsatt retning av hastigheten, og har en størrelse gitt ved

$$F_D = \frac{1}{2}\rho D A v^2$$

der ρ er tettheten til lufta, D er en koeffisient som beskriver motstanden og A er bokas overflateareal.

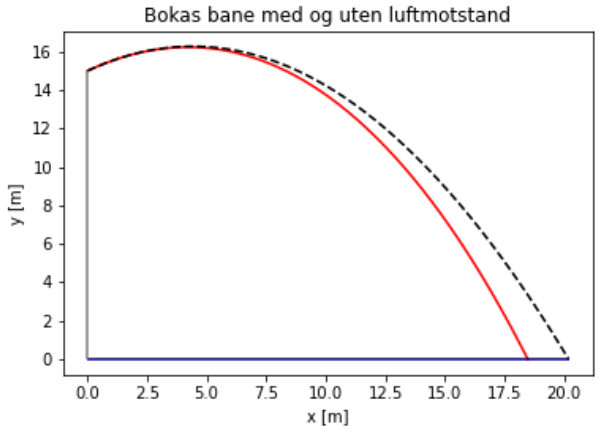
c) Skriv luftmotstanden på vektorform ved å bruke bokas hastighetsvektor $\vec{v}$.

Løsning: For å sørge for at luftmotstanden virker i samme retning som hastigheten, må vi multiplisere størrelsen til kraften med en enhetsvektor som virker i hastighetsretningen. Deretter må vi sørge for at den virker motsatt vei, ved å sette negativt fortegn. Vi får da

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho D A |\vec{v}|^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{1}{2}\rho D A |\vec{v}|\vec{v}$$

d) Skriv et program som finner tiden det nå vil ta før boka treffer vannet, og plott bokas posisjon sammen med grafen fra oppgave b). Finn også hvor langt unna klippen boka er når den treffer vannet. Bruk $\rho = 1.2$ kg/m^3, $D = 0.80$ og at den kuleformede boka har en radius på 8.0 cm. Kommenter svaret.

Løsning:



Kode ligger i appendikset nederst. Nå bruker boka 2.38 sekunder på å treffe vannet, og er da 18.5 m unna klippen i horisontal retning. Vi kan altså se at det blir en liten endring i hvor lang tid det tar, men at boka kommer vesentlig kortere i x-retning som en konsekvens av luftmotstanden.

G 9.3 Ladning i magnetfelt

En ladd partikkel beveger seg i et konstant magnetfelt $\vec{B}$ gitt ved

$$\vec{B} = B_0\hat{\mathbf{k}}.$$

Kraften på en partikkel med ladning q og hastighet $\vec{v}$ fra et magnetisk felt $\vec{B}$ er gitt som

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

a) Vi antar at kraften fra det magnetiske feltet er den eneste kraften som virker på partikkelen med ladning q og masse m. Hva er bevegelseslikningen til partikkelen?

Løsning: Vi bruker Newtons 2. lov og får at

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{a} = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{m}$$

b) Anta at partikkelen er et proton, som har ladning $q = e$ og masse $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg. Bruk Euler-Cromer-metoden for å finne bevegelsen til protonet for tidsintervallet $t \in [0\,\text{s}, 9\,\text{s}]$ med tidssteg $dt = 0.0001$ s.

Du kan anta at $x_0 = (0\,\text{m}, 0\,\text{m}, 0\,\text{m})$, $v_0 = (1\,\text{m/s}, 0\,\text{m/s}, 0\,\text{m/s})$ og at $B_0 = 10\,\text{nT}$.

Løsning:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.constants import e



T = 9 #s
dt = 0.0001
n = int(T/dt)

q1 = e # c
m_p = 1.67e-27 #kg
B = np.array([0,0,1e-8]) #T
v = np.zeros((n,3))
v0 = np.array([1,0,0])
v[0] = v0
x = np.zeros_like(v)

def a(v):
    return q1*np.cross(v,B)/m_p

for i in range(n-1):

    ai = a(v[i])
    v[i+1] = v[i] + ai*dt
    x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt


plt.grid()
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel("y [m]")

plt.plot(x.T[0],x.T[1])
plt.savefig("proton_bane.pdf")
plt.show()

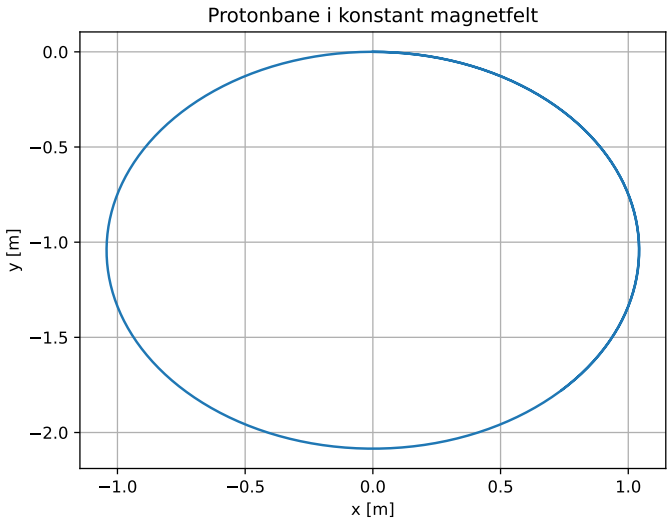

v_norm = np.linalg.norm(v,axis = 1)

t = np.linspace(0,T,n)

plt.plot(t,0.5*m_p*v.T[0]**2,label = r"x:$E_k$")
plt.plot(t,0.5*m_p*v.T[1]**2,label = r"y:$E_k$")

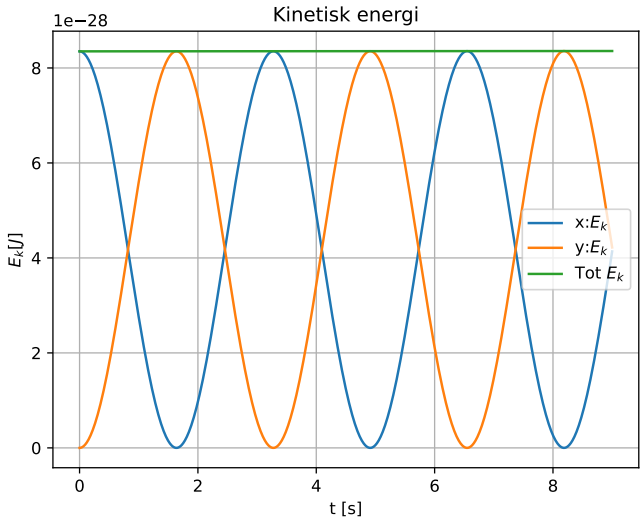
plt.plot(t,0.5*m_p*v_norm**2, label = r"Tot $E_k$")
plt.grid()
plt.xlabel("t [s]")
plt.ylabel(r"$E_k [J]$")

plt.legend()
plt.savefig("proton_kinetic.pdf")
plt.show()
```



c) Plott den totale kinetiske energien sammen med den kinetiske energien i x- og y-retning som funksjon av tid. Beskriv plottet og forklar hva som skjer. Hvilke konklusjoner kan dere trekke fra dette m.t.p arbeidet magnetfeltet utfører på partikkelen?

Løsning:



Vi ser fra plottet at den totale kinetiske energien er konstant med hensyn på tid. Dette betyr at det magnetiske feltet hverken minker eller øker energien til partikkelen. Vi kan da konkludere med at det magnetiske feltet utfører null arbeid på protonet.

d) Nå skal vi inkludere gravitasjon. Finn bevegelsesligningen og modifiser koden fra deloppgave b for å finne den nye banen til partikkelen. Du kan anta at partikkelen er på jordoverflaten, så gravitasjonskraften den føler er $\vec{F}_G = -mg\hat{\mathbf{j}}$. Diskuter og forklar den nye banen partikkelen nå får.

Løsning: Vi finner den nye bevegelseslikningen ved å bruke N2L. De to kreftene som virker på protonet er tyngdekraft og den magnetiske kraften.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_G$$

$$\Rightarrow m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} - m\vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{m} - \vec{g}$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.constants import e



T = 9 #s
dt = 0.0001
n = int(T/dt)
g = 9.81 #m/s^2

q1 = e # c
m_p = 1.67e-27 #kg
B = np.array([0,0,1e-8]) #T
v = np.zeros((n,3))
v0 = np.array([1,0,0])
v[0] = v0
x = np.zeros_like(v)

def a(v):
    gravacc = np.array([0,g,0])
    return q1*np.cross(v,B)/m_p - gravacc

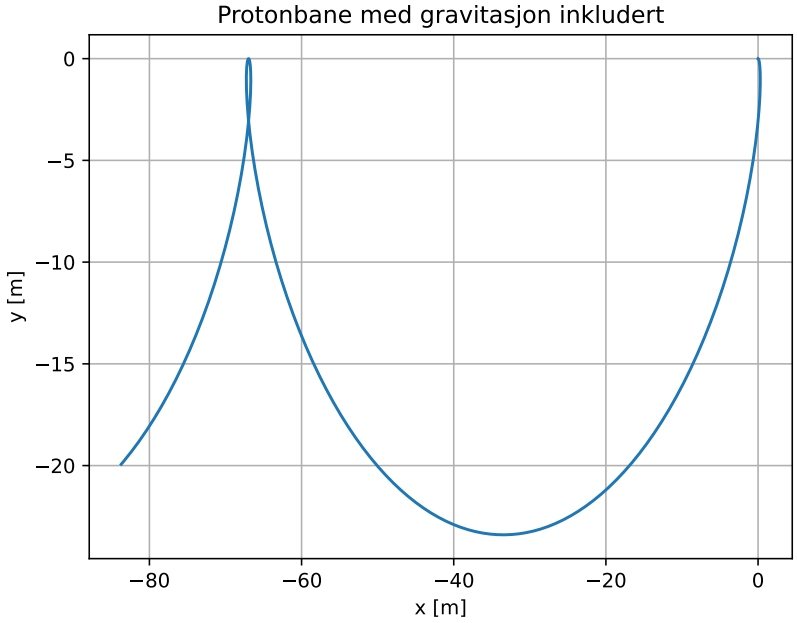

for i in range(n-1):

    ai = a(v[i])
    v[i+1] = v[i] + ai*dt
    x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt


plt.grid()
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel("y [m]")

plt.plot(x.T[0],x.T[1])
plt.savefig("proton_bane_g.pdf")
```

```
38 plt.show()
```



Hvordan kan vi forklare denne banen? For det første er kraften fra magnetfeltet proporsjonal med størrelsen til hastigheten, og virker alltid ortogonalt både på hastighetsvektoren og magnetfeltet. Denne kraften vil prøve å holde partikkelen på en sirkelbane. Videre vil gravitasjonskraften alltid gi protonet en akselerasjon i negativ y-retning. I starten vil gravitasjonen akselerere protonet i negativ y-retning, da øker farten slik at den magnetiske kraften blir sterkere, og til slutt blir farten så stor at den magnetiske kraften greier å bøye banen til partikkelen i positiv y-retning. Så vil protonet deretter bremse i y-retning, ettersom den beveger seg i positiv y-retning, men gravitasjonen gir en akselerasjon i negativ y-retning. Den magnetiske kraften blir mindre som et resultat av dette. Dette fører til at banen "bøyes" mindre ettersom protonet beveger seg opp den parabolske banen igjen, helt til den når toppunktet hvor $v \approx 0$ (som vi ser i toppunktet ved $x \approx -65$m). Etter at partikkelen har nådd dette punktet, gjentar bevegelsen seg.

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 9.4 Små svingninger

Kraftloven mellom to legemer med ladningene q_1 og q_2 som ligger i avstanden r fra hverandre er analog til Newtons gravitasjonslov

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Her er k_e en konstant og retningen på krafta er slik at ladnigner med samme fortegn tiltrekker hverandre mens ladninger med like fortegn frastøter hverandre. Den potensielle energien er tilsvarende

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r}.$$

a)



To små kuler (A og B) er festet i hver sin ende av en ikke-ledende stang med lengden L. Mellom disse er det en tredje kule (C) som kan gli uten friksjon på stangen. Alle tre kulene har ladningen q og massen m, og de er ikke-ledende. Hele systemet er plassert på en horisontal ikke- ledende flate uten friksjon. Vi starter med at hele systemet holdes i ro, og C har avstanden x fra midtpunktet mellom A og B. Systemet slippes. Finn den maksimale farten til kule C.

b) C vil svinge fram og tilbake. Finn frekvensen til svingningene hvis vi antar at $x \ll L$. (Hint: bruk Taylorutvikling på krafta)

Løsning:

a) Den potensielle energien er

$$U = k_e q^2 \left(\frac{1}{L/2+x} + \frac{1}{L/2-x} \right)$$

Farten er størst når C er midt mellom A og B. Da er den potensielle energien $4k_e q^2/L$. Bevaring av driv gir at farten til AB er halvparten av farten til C, som vi kaller v. Da blir den kinetiske energien

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

Energibevaring gir da

$$\frac{3}{4}mv^2 = k_e q^2 \left(\frac{1}{L/2+x} + \frac{1}{L/2-x} - \frac{4}{L} \right) = \frac{4k_e q^2 x^2}{L(L^2/4-x^2)}$$

som gir maksimal fart

$$v = \frac{4qx}{\sqrt{3mL/k_e(L^2/4-x^2)}}$$

b) Hvis vi kaller posisjonen til C i forhold til massesenteret (som ligger i ro) for z vil $z = \frac{2}{3}x$. Vi har at krafta som virker på C er

$$F = 4k_e q^2 \left(\frac{1}{(L+3z)^2} - \frac{1}{(L-3z)^2} \right)$$

Når $z \ll L$ kan vi tilnærme dette uttrykket ved å bruke at $\frac{1}{(1\pm x)^2} \approx 1 \mp 2x$ for $x \ll 1$. Da får vi $F \approx -48k_e q^2 z/L^3$. Setter vi dette inn i Newtons 2. lov har vi

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{48k_e q^2}{mL^3} z = -\omega^2 z$$

Dette kjenner vi igjen som differensiallikningen for harmoniske svingninger med vinkelfrekvens ω, og frekvensen blir

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48k_e q^2}{mL^3}}$$

NukTek

Ekstraoppgave spesielt tilpasset NukTek-studenter. Men også fin for andre

G 9.5 Radioaktivt henfall

Den radioaktive kjernen ^{139}Cs kan henfalle til ^{139}Ba gjennom betahenfall. ^{139}Ba kan deretter gjennomgå betahenfall til ^{139}La. ^{139}La er stabilt og vil derfor ikke henfalle videre. Henfallssekvensen kan sees i figur 1.

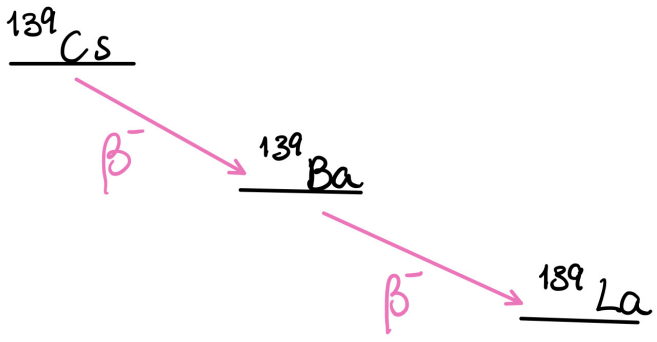


Figure 1: Henfallssekvensen for ^{139}Cs. β^- står for betahenfall.

Differensiallikningene under beskriver antallet kjerner N_x av type 1,2 og 3 ved tiden t, ved en gitt henfallssekvens: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t), \tag{1}$$
$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t), \tag{2}$$
$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t). \tag{3}$$

Aktiviteten til en kilde er definert som antall radioaktive henfall per tid, og har enheten Bq=henfall/s. Relasjonen mellom aktivitet A, henfallskonstanten λ, og antall kjerner N er gitt ved

$$A(t) = \lambda N(t). \tag{4}$$

Ved tiden $t = 0$ starter du med en ^{139}Cs kilde med en aktivitet $A_0 = 10$kBq som kun inneholder ^{139}Cs. Henfallskonstantene er gitt som

$$\lambda_{^{139}Cs} = 1.25 \cdot 10^{-3}\text{s}^{-1}$$
$$\lambda_{^{139}Ba} = 1.39 \cdot 10^{-4}\text{s}^{-1}.$$

a)Forklar med ord hvorfor de ulike leddene i differensiallikningene over er med, og hvorfor likningene beskriver situasjonen illustrert i figur 1.

b) Regn ut hvor mange ^{139}Cs kjerner som finnes i kilden ved tiden $t = 0$.

c) Bruk Eulers metode til å beregne antall ^{139}Cs, ^{139}Ba og ^{139}La kjerner som finnes i kilden som funksjon av tid fra $t = 0$ til $t = 10$ timer.

Løsning:

a) I den første likningen ser vi at antall kjerner av type 1, N_1 minsker etterhvert som kjernene av type 1 henfaller. Likning nummer to har ett negativt ledd som på tilsvarende måte beskriver henfallet av kjerner av type 2. Slike henfall vil minske antallet kjerner av type 2, N_2. I tillegg har likning 2 et positivt ledd som beskriver tilførselen av kjerner av type 2 når kjerner av type 1 henfaller. Den siste likningen har kun et positivt ledd som beskriver tilførselen av kjerner av type 3 når kjerner av type 2 henfaller.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 # Defining constants
5 lambda1 = 1.25*10**(-3)  # [s^-1]
6 lambda2 = 1.39*10**(-4)  # [s^-1]
7 A0 = 10*10**3  # [Bq = decays/second]
```

```
8
9
10
11  #  b)
12  # Calculating Number of 139Cs nuclides at time t = 0
13  N1_0 = A0/lambda1
14
15  print(f"Number of 139Cs nuclides at time t = 0: N1_0 = {N1_0}")
16
17
18
19  #  c)
20  # Time interval
21  T = 10.0*3600  # [seconds]
22  N = 36000
23  dt = T/N
24
25  t = np.zeros(N,float)
26  N1 = np.zeros(N,float)
27  N2 = np.zeros(N,float)
28  N3 = np.zeros(N,float)
29
30  # Initial value
31  N1[0] = N1_0
32  N2[0] = 0
33  N3[0] = 0
34
35
36  # Loop to solve
37  for i in range(N-1):
38      t[i+1] = t[i] + dt
39
40      dN1 = - lambda1*N1[i]*dt
41      N1[i+1] = N1[i] + dN1
42
43      dN2 = - lambda2*N2[i]*dt + lambda1*N1[i+1]*dt
44      N2[i+1] = N2[i] + dN2
45
46      dN3 = lambda2*N2[i+1]
47      N3[i+1] = N3[i] + dN3
48
49
50  # Making sure we have hours on the x-axis
51  t = t/3600
52  N_tot = N1 + N2 + N3
53  plt.plot(t,N1,label="N1(t)")
54  plt.plot(t,N2,label="N2(t)")
55  plt.plot(t,N3,label="N3(t)")
56  plt.plot(t, N_tot, label="N_tot")
57  plt.xlabel("Time [h]")
58  plt.ylabel("Number of Nuclides")
59  plt.legend()
60  plt.show()
```

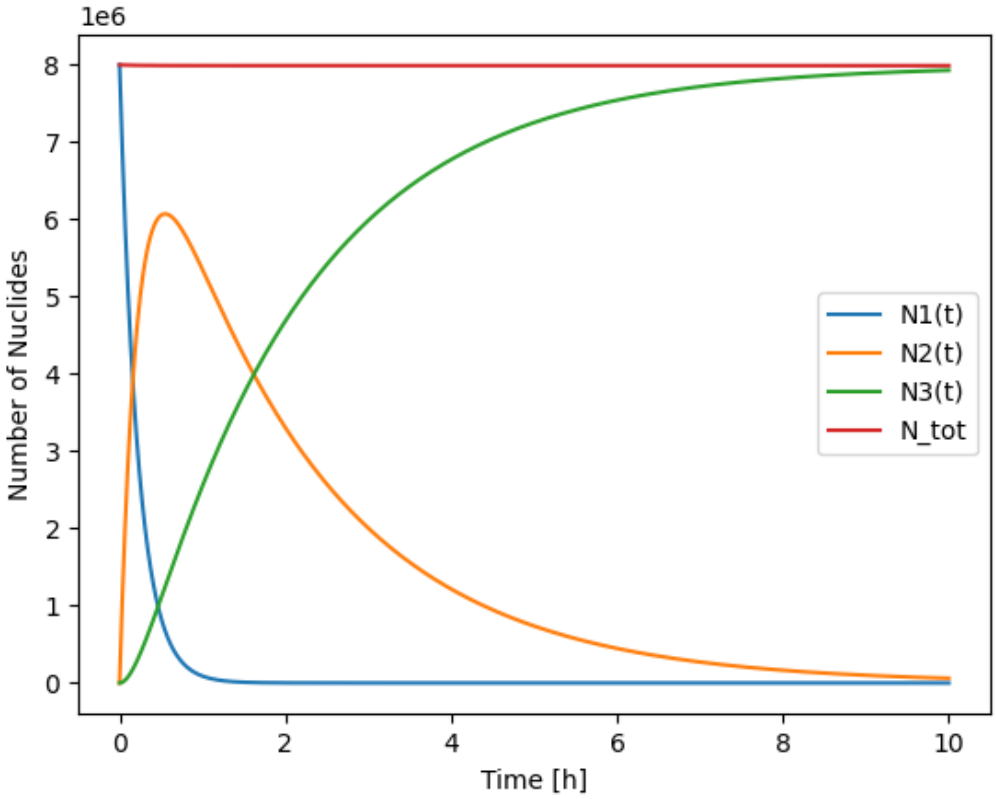


Figure 2: Antallet kjerner $N_1(t)$, $N_2(t)$ og $N_3(t)$ plottet for tiden t med $dt = 1$s.

c) Figur 2 viser antall ^{139}Cs, ^{139}Ba og ^{139}La kjerner som funksjon av tid. I tillegg ser vi at totalt antall kjerner er bevart. Dette er et forventet resultat ettersom det verken forsvinner eller oppstår nye kjerner, men de kjernene som allerede finnes henfaller.