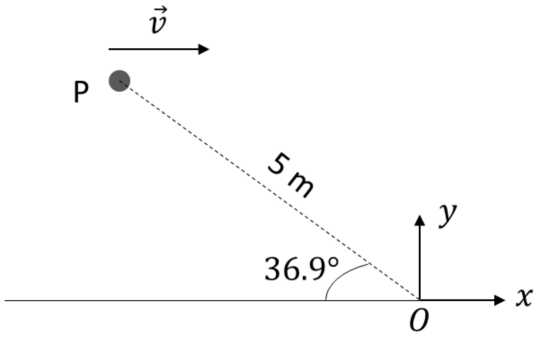
Oppgavesett uke 11

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

TDS 11.1 Spinn uten rotasjon

En stein med masse $m = 1.0$ kg beveger seg i horisontal retning med hastighet $\vec{v}$ med størrelse $v = 10$ m/s i det den er i punkt P i figuren.



a) Hva er spinnet (størrelse og retning) som steinen har i forhold til origo O i dette øyeblikket?

Løsning: Steinen befinner seg i posisjon

$$\vec{r} = -5.0\text{m}\cos(36.9^\circ)\hat{\mathbf{i}} + 5.0\text{m}\sin(36.9^\circ)\hat{\mathbf{j}} = -4.0\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\text{m}\hat{\mathbf{j}},$$

og hastigheten er $\vec{v} = 10\text{m/s}\hat{\mathbf{i}}$. Vi finner spinnet:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = (-4.0\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\text{m}\hat{\mathbf{j}}) \times 10\text{kg m/s}\hat{\mathbf{i}} = -30\text{kg m/s}\hat{\mathbf{k}}.$$

b) Vi antar at tyngdekraften er den eneste kraften som påvirker steinen. Hva er endringsraten til spinnet (størrelse og retning) i dette øyeblikket?

Løsning: Ifølge spinnsatsen er endringsraten til spinnet lik netto kraftmoment som påvirker legemet:

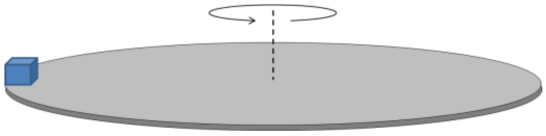
$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{l}}{dt}.$$

Den eneste kraften som påvirker steinen er tyngdekraften, som gi et kraftmoment om origo:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}_G = \vec{r} \times \vec{G} = (-4.0\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\text{m}\hat{\mathbf{j}}) \times (-1.0\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2\hat{\mathbf{j}}) = 39\text{Nm}\hat{\mathbf{k}}.$$

TDS 11.2 Eske og sylinder

En eske med masse $m = 75,0$ kg står på kanten av en homogen, sylindrisk skive med masse $M = 150$ kg og radius R = 2,00 m som roterer med 0,500 omdreininger per sekund om en akse (z-aksen) gjennom sitt massesenter som vist i figuren. Regn ut størrelsen på spinnet til systemet som består av skiven og esken. Du kan anta at esken er veldig liten i forhold til skiven, slik at du kan behandle esken som et massepunkt. Treghetsmomentet til en sylindrisk skive som roterer om en akse gjennom massesenteret er gitt ved $I_{\text{skive}} = \frac{1}{2}MR^2$.



Løsning: Vi beregner treghetsmomentet til hele systemet

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{skive}} + I_{\text{eske}} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 600\ \text{kgm}^2.$$

Vinkelfarten er

$$\omega = 0,500 \cdot 2\pi\ \text{s}^{-1} = 1,00\pi\ \text{s}^{-1},$$

og størrelsen på spinnet blir da:

$$L = I_{\text{tot}}\omega = 600\ \text{kgm}^2 1,00\pi\ \text{s}^{-1} = 1,88 \cdot 10^3\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}.$$

TDS 11.3 Ukas difflikning

Finn løsninga til differensiallikninga

$$\ddot{x} + 4x + \dot{x} = 0$$

med initialbetingelsene

$$x(0) = 1 \quad x(1) = 0.$$

Løsning: Vi tipper $x(t) = e^{\lambda t}$ og får

$$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$$

som gir

$$\lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{15}.$$

Den generelle løsninga er da

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} = e^{-t/2}(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$$

der $\omega = \sqrt{15}/2$. Initialbetingelsene gir

$$x(0) = C = 1$$
$$x(1) = e^{1/2}(C\cos\omega + D\sin\omega) = 0, \qquad D = -\cot\omega$$

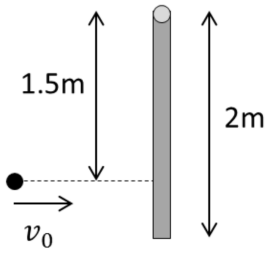
Dermed er løsinga

$$x(t) = e^{-t/2}(\cos\omega t - \cot\omega \sin\omega t).$$

Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Men det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 11.1 En ball kolliderer med en stav

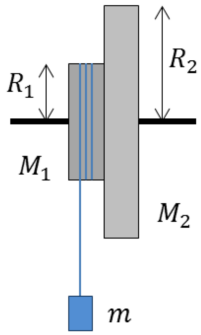


En tynn, homogen stav med masse $M = 10$ kg og lengde $L = 2.0$ m henger fra taket i et friksjonsfritt hengsel. En ball med masse $m = 3.0$ kg treffer horisontalt på staven med fart $v_0 = 10$ m/s. Etter kollisjonen spretter ballen tilbake og beveger seg med en fart $v_1 = 6.0$ m/s i motsatt retning og staven svinger oppover. Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om et endepunkt er $I = \frac{1}{3}ML^2$. Vi ser bort fra luftmotstand. Finn vinkelfarten til staven rett etter kollisjonen. (*Tips: Husk at et legeme som beveger seg lineært kan ha spinn i forhold til et punkt.*)

Løsning: Ytre krefter som virker på staven er gravitasjonskraften og normalkraften fra hengselet på staven. Gravitasjonskraften gir ingen kraftmoment om hengslet siden kraften og kraftarmen er parallelle. Normalkraften fra hengslet gir ikke noe kraftmoment siden den angriper i rotasjonspunktet. Siden det virker ingen ytre kraftmoment under kollisjonen er spinnet bevart: $L_0 = L_1$. Spinnet til ballen om hengselet før kollisjonen er $L_0 = rmv_0$, hvor r er avstanden fra hengselet. Staven har ikke noe spinn før kollisjonen. Etter kollisjonen har staven spinnet $I\omega$ og ballen har spinnet rmv_1, totalspinnet er $L_1 = I\omega + rmv_1$ hvor v_1 nå er i motsatt retning i forhold til v_0. Spinnbevaring gir:

$$rmv_0 = I\omega + rmv_1 \Rightarrow \omega = \frac{mr(v_0 - v_1)}{I} = \frac{3mr(v_0 - v_1)}{ML^2} = 5.4\text{rad/s}$$

G 11.2 Metallsylindere



To metallsylindere med masse $M_1 = 1.0$ kg og $M_2 = 2.0$ kg og med radier $R_1 = 0.10$ m og $R_2 = 0.20$ m er montert på en akse som går gjennom massesenteret til begge sylindrene. Aksen roterer friksjonsfritt, og sylindrene er sveiset sammen slik at de roterer som ett legeme. Treghetsmomentet til en full sylinder som roterer om sitt massesenter er $I = \frac{1}{2}MR^2$.

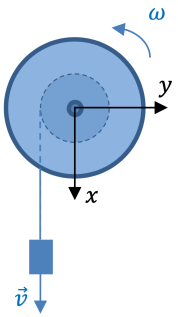
a) Finn treghetsmomentet til hele legemet (de sammensveisede sylindrene).

Løsning: Treghetsmoment til hele legemet er summen av treghetsmomentene for begge sylinderne (superposisjonsprinsippet):

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 = 0.045\text{kg m}^2.$$

b) En masseløs snor er viklet rundt den lille sylinderen, og et lodd med masse $m = 1.5$ kg henger fra enden av snoren. Når loddet slippes begynner de sammensveisede sylindrene å rotere uten at snoren sklir. Hvor stor er akselerasjonen til loddet?

Løsning: Loddet er påvirket av gravitasjon og snordraget T. Vi ser på systemet fra siden, med flaten til den store sylinderen mot oss og med rotasjonsaksen "opp fra arket", se figur:



Vi legger positiv x-akse ned, positiv y-akse til høyre, positiv z-akse (rotasjonsaksen) "opp fra arket". Newtons andre lov på loddet i x-retning gir:

$$mg - T = ma$$

hvor akselerasjonen her vil være i positiv x-retning slik vi har definert koordinatsystemet, og snordraget på loddet er i negativ x-retning. Akselerasjonen er koblet til vinkelakselerasjonen til skivene gjennom snoren (fra derivasjon av $v = \omega R_1$):

$$a = R_1\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R_1}.$$

Snordraget på skivene virker i positiv x-retning, og er årsak til et kraftmoment som setter skivene i rotasjon. Newtons 2. lov for rotasjoner om z-aksen gir oss:

$$\tau = R_1 T = I_{tot}\alpha = I_{tot}\frac{a}{R_1} \Rightarrow T = I_{tot}\frac{a}{R_1^2}.$$

Vi setter inn snordraget vi fant her inn i ligningen fra N2L på loddet og løser for akselerasjonen til loddet:

$$mg - I_{tot}\frac{a}{R_1^2} = ma \Rightarrow a = \frac{g}{1 + \frac{I_{tot}}{mR_1^2}} = 2.5\text{m/s}^2.$$

c) Hvor stor er akselerasjonen til loddet når snoren vikles om den store sylinderen?

Løsning: Hvis snoren vikles om den store sylinderen, blir alt likt men vi må erstatte R_1 med R_2:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I_{tot}}{mR_2^2}} = 5.6\text{m/s}^2.$$

G 11.3 En motorsykkel



En motorsykkel kjører rundt på innsiden av en vertikal sylinder med radien R. For at motorsykkelen ikke skal velte må den ha en vinkel θ i forhold til normalen ut fra veggen. Anta at farten til motorsykkelen er v og at friksjonen mellom dekkene og veggen er stor nok til at den ikke sklir, og at høyden til motorsykkel med fører er mye mindre enn radien i sylinderen.

a) Hvilke fysiske størrelser tenker du at θ avhenger av? Siden vinkler er dimensjonsløse må θ avhenge av dimensjonsløse kombinasjoner av andre størrelser. Bruk dimensjonsanalyse til å bestemme hvilken dimensjonsløs kombinasjon θ er en funksjon av.

b) Hva er vinkelen θ?

c) Hvorfor antok vi at høyden til motorsykkel med fører er mye mindre enn radien i sylinderen? Hva endres dersom vi ikke gjør denne antagelsen?

Løsning:

a) De relevante størrelsene er g, R og v med enheter $[g] = \text{m/s}^2$, $[R] = \text{m}$ og $[v] = \text{m/s}$. Den dimensjonsløse kombinasjonen er

$$\frac{gR}{v^2}.$$

b) Det virker tre krefter: Tyngden $G = mg$, normalkrafta fra veggen, som må være sentripetalkrafta $N = mv^2/R$ og friksjonskrafta F oppover parallelt med veggen. Summen av vertikalkreftene må være null, og dermed er $F = G = mg$. For å finne vinkelen θ mellom normalen til veggen og motorsykkelen må vi se på kraftmoment om tyngdepunktet. Vi kaller avstanden fra bakken til tyngdepunktet når sykkelen står vertikalt for L. Da er kraftmomentet til normalkrafta $\tau_N = NL\sin\theta$ og til friksjonen $\tau_F = FL\cos\theta$. Tyngden virker i tyngdepunktet, og har derfor ikke noe kraftmoment. For at sykkelen ikke skal velte noen vei må de to kraftmomentene være like:

$$\begin{aligned} NL\sin\theta &= FL\cos\theta \\ m\frac{v^2}{R}\sin\theta &= mg\cos\theta \\ \tan\theta &= \frac{gR}{v^2}. \end{aligned}$$

c) Vi antok at alle deler av sykkelen har samme avstand fra aksen til sylinderen da vi beregnet sentripetalkrafta. Hvis høyden av sykkel og fører ikke er liten i forhold til radien er ikke dette sant lengre, og vi må ta hensyn til dette i beregninga.

G 11.4 Beregne kometbane [Eksamen H2024]

Du vil simulere banen til en komet med massen m som beveger seg i en bane rundt sola. Du plasserer origo i sola som har massen $M \gg m$ og lar posisjonen til kometen være beskrevet av koordinatene x og y (banen vil alltid ligge i et plan, slik at vi ikke trenger noen z-koordinat).

a) Vis at kometens bevegelse er beskrevet av difflikningene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}y$$

Løsning: Vi vet at tyngdekrafta er

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Vi kan skrive dette på vektorform ved å bruke enhetsvektoren $\mathbf{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ der $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$. Siden gravitasjonen er tiltrekkende vil den virke i motsatt retning av $\mathbf{e}_r$, og dermed er

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}.$$

På komponentform gir det de oppgitte likningene.

b) Vi vet at kometer følger ellipsebaner med sola i det ene brennpunktet. I en slik bane, hvilke av disse størrelsene er bevart under bevegelsen: Kinetisk energi, total mekanisk energi og spinn?

Løsning: Mekanisk energi er bevart, for bare tyngdekrafta gjør et arbeid. Spinnet om sola er bevart fordi krafta hele tiden er rettet radielt mot sola. Kinetisk energi er ikke bevart, fordi avstanden til sola, og dermed også den potensielle energien, varierer

c) Gjør tyngdekrafta noe arbeid i noen del av banen? Er isåfall dette arbeidet positivt eller negativt?

Løsning: Kinetisk energi er ikke bevart, fordi tyngden gjør et negativt arbeid på den delen av banen der radien øker, slik at den kinetiske energien avtar. På den delen av banen der radien avtar gjør tyngden et positivt arbeid og den kinetiske energien øker. Gjennom en hel periode er tyngdens nettoarbeid null.

d) Hvis vi vet at kometen i det punktet i banen som er nærmest sola har avstanden r_1 fra sola og farta v_1, hva er da den største avstanden til sola? Og hva er farta i det punktet?

Løsning: Vi vet at mekanisk energi og spinn er bevart, og at i punktene der kometen er nærmest og lengst unna sola står farten normalt på posisjonsvektor (så $|\vec{r}\times\vec{v}| = rv$).

Dermed er

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

Fra den første likninga får vi $v_2 = v_1\frac{r_1}{r_2}$ som vi setter inn i den andre likninga og får

$$v_1^2\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] - \frac{2GM}{r_1} = -\frac{2GM}{r_2}.$$

Dette er en andregradslikning for r_2 som vi kan løse. Den ene løsninga er $r_2 = r_1$, den andre er

$$r_2 = \frac{v_1^2r_1^2}{2GM - v_1^2r_1}$$

som er det punktet i banen som er lengst fra sola. Da kan vi også finne

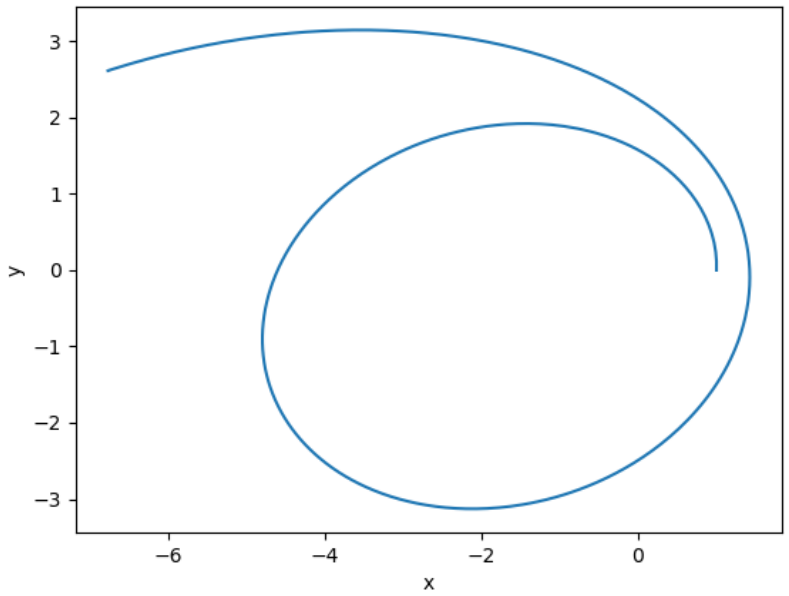
$$v_2 = \frac{2GM}{v_1r_1} - v_1.$$

e) Her er vist et program som beregner kometens bane numerisk:

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # Bruker enheter der GM=1
5
6  T = 50.
7  dt = 0.1
8  n = int(T/dt)
9
10 x = np.zeros(n)
11 y = np.zeros(n)
12 vx = np.zeros(n)
13 vy = np.zeros(n)
14 t = np.zeros(n)
15
16 x[0] = 1.
17 y[0] = 0
18 vx[0] = 0
19 vy[0] = 1.2
20
```

```
21  for i in range(n-1):
22      r32invers = 1/(x[i]**2 + y[i]**2)**(1.5)
23      vx[i+1] = vx[i] - x[i]*r32invers*dt
24      vy[i+1] = vy[i] - y[i]*r32invers*dt
25      x[i+1] = x[i] + vx[i]*dt
26      y[i+1] = y[i] + vy[i]*dt
27      t[i+1] = t[i] + dt
28
29
30  plt.plot(x,y)
31  plt.xlabel('x')
32  plt.ylabel('y')
33  plt.savefig('komet.png')
34  plt.show()
```

Dette gir følgende graf for kometens bane rundt sola:



Hvordan stemmer denne banen med det vi forventer? Hva kan være årsakene til at den simulerte banen ikke er helt slik den er i virkeligheten?

Løsning: Banen er ikke en ellipse, men en spiral som ser ut til å gå lengre og lengre vekk fra sola. Dette skyldes at vi har brukt en lite nøyaktig numerisk metode (Eulers metode) og en for stor steglengde.

f) Koden kan endres slik at den gir bedre resultater. Hva slags endringer ville du gjort for å gjøre simuleringa mer nøyaktig?

Løsning: Vi kan få bedre resultater ved å velge en mindre steglengde og en mer nøyaktig numerisk metode. I dette tilfellet vil det være bedre å bruke Euler-Cromer metoden, som betyr at vi bytter ut

```
1      x[i+1] = x[i] + vx[i]*dt
2      y[i+1] = y[i] + vy[i]*dt
```

med

```
1      x[i+1] = x[i] + vx[i+1]*dt
2      y[i+1] = y[i] + vy[i+1]*dt
```

Vi kunne også bruke en høyere ordens metode som Eulers midtpunktmetode.

g) Du vil undersøke om solvinden kan påvirke kometens bane. Solvinden består av ladde partikler som strømmer radielt ut fra sola. Vi antar for enkelhets skyld at dette gir en radiell kraft på kometen som er uavhengig av farta til kometen. Men vi vil ta hensyn til at tettheten til solvinden må avta med avstanden til sola, fordi partiklene blir fordelt over en større flate. Derfor vil vi anta at krafta fra solvinden avtar omvendt proporsjonalt med avstanden til sola. Hva må du endre i koden for å ta hensyn til denne krafta?

Løsning: Vi har oppgitt at vi skal anta at krafta fra solvinden er omvendt proporsjonal med avstanden r til sola. Det betyr at vi har en kraft radielt utover med størrelsen

$$F_s = \frac{s}{r}.$$

Konstanten s beskriver styrken til solvinden, og vi har ikke noen informasjon om hvor stor den skal være. Vi kan regne med at den er mye svakere enn gravitasjonen, men ellers må vi vite noe mer om solvinden og kometen for å finne en realistisk verdi for s. På samme måte som for tyngdekrafta kan vi skrive den på vektorform ved å bruke den radielle enhetsvektoren $\mathbf{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ der $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$. Derfor er

$$\vec{F}_s = \frac{s}{r^2}\vec{r}.$$

I koden må vi da definere s og regne ut krafta fra solvinden. Vi må også definere massen til kometen. Denne forkorter bort når vi bare har gravitasjon, men ikke når vi har krafta fra solvinden som ikke er avhengig av massen. Dette kan vi gjøre ved å bytte ut integrasjonsløkka i koden over med

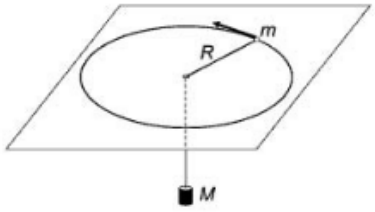
```
1  # Definerer styrken til solvinden
2  s = 0.0001
3
4  # Definerer massen
5  m = 0.001
6
7  for i in range(n-1):
8      r3invers = 1/(x[i]**2 + y[i]**2)**(1.5)
9      ar2invers = s/(x[i]**2 + y[i]**2)/m
10     vx[i+1] = vx[i] + x[i]*(ar2invers-r32invers)*dt
```

```
11      vy[i+1] = vy[i] + y[i]*(ar2invers-r32invers)*dt
12      x[i+1] = x[i] + vx[i]*dt
13      y[i+1] = y[i] + vy[i]*dt
14      t[i+1] = t[i] + dt
```

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

G 11.5 Ikke i sirkel



Ei kule med massen $m = 1{,}0$ kg er festet i ei snor og beveger seg i en sirkel med radien $R = 40$ cm på en horisontal flate. Snora går gjennom et hull i sentrum av sirkelen, og i enden av snora henger det et lodd med massen $M = 2{,}0$ kg. Hvis loddet slippes vil kula på det nærmeste være i avstanden $r = 10$ cm fra sentrum. Se bort fra friksjon alle steder.

a) Finn den største og den minste farta til kula.

b) Finn akselerasjonen til loddet på det høyeste og laveste punktet i banen.

Løsning:

a) Vi kaller farta i avstanden r for v_r, farta i avstanden R for v_R og bruker bevaring av energi og spinn:

$$\frac{1}{2}mv_R^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 - Mg(R-r)$$
$$mv_r r = mv_R R.$$

Når vi løser disse to likningene får vi

$$v_r = \sqrt{\frac{2MgR^2}{m(R+r)}} = 3,5 \text{ m/s}$$

$$v_R = \sqrt{\frac{2Mgr^2}{m(R+r)}} = 0,89 \text{ m/s}.$$

b) Vi kaller snordraget S og akselerasjonen til loddet a. Da har vi

$$Ma = G - S$$

For kula er den radielle akselerasjonen også a, og snordraget går delvis til sentripetalakselerasjon og delvis til radiell akselerasjon:

$$ma = S - m\frac{v^2}{r}$$

Vi løser disse to likningene og får at

$$a = \frac{Mg - mv^2/r}{m+M}$$

I det høyeste og laveste punktet blir det $a_R = 5,9$ m/s^2 og $a_r = -35$ m/s^2 .

NukTek

Ekstraoppgave spesielt tilpasset NukTek-studenter. Men også fin for andre

G 11.6 Kjerne med spinn

Et proton beveger seg i vakuum med kinetisk energien $E_k = 3.2 \cdot 10^{-12}$J. Et proton har massen $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$kg. Protonet treffer så vidt, i en ikke-sentral kollisjon, en ^{18}O atomkjerne med radius $R = 3.1 \cdot 10^{-15}$m, og masse $M = 2.98 \cdot 10^{-26}$ kg, slik som vist i figur 1. Protonet blir absorbert i kjernen.

a) Regn ut bevegelsesmengden til protonet.

b) Regn ut størrelsen til angularmomentet som atomkjernen får etter å ha absorbert protonet.

c) I hvilken retning vil angulærmomentvektoren peke?

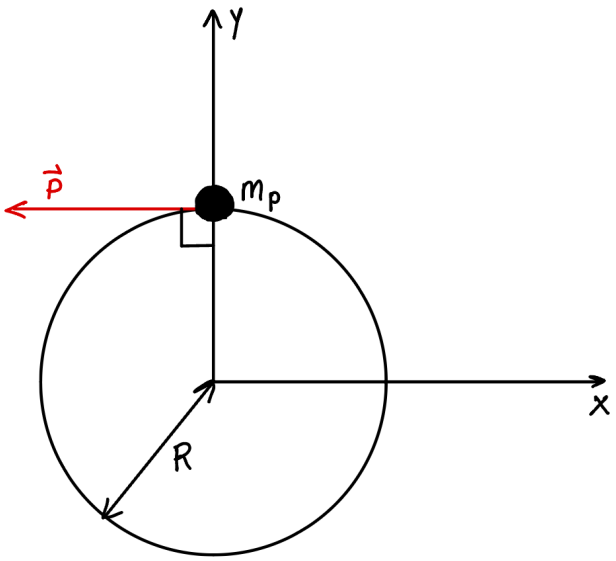


Figure 1: Et proton, markert som en svart kule, med bevegelsesmengde $\vec{p}$ og masse m_p kolliderer og blir absorbert av en atomkjerne i ro med radius R og masse M.

Angulærmomentet til en "rigid" sfære som roterer rundt sin egen akse er gitt ved formelen:

$$L = \frac{2}{5} M \omega R^2$$

der ω er vinkelfrekvensen til rotasjonen.

d) Regn ut hvilken vinkelfrekvens atomkjernen vil rotere med etter absorbsjonen av protonet.

Løsning:

a) Vi finner en formel som relaterer bevegelsesmengde til kinetisk energi. (Merk, her kan man også

først regne ut hastigheten for så å regne ut bevegelsesmengden)

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_p v^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_p}{m_p} m_p v^2 \\ &= \frac{1}{2m_p} p^2 \\ p &= \sqrt{2 m_p E_k} \end{aligned}$$

Vi setter inn for massen og den kinetiske energien til protonet:

$$p = 1.034 \cdot 10^{20} \text{kgm/s}$$

b) Størrelsen på angulærmomentet kan regnes ut ved formelen:

$$L = R \cdot p \cdot \sin\theta$$

der θ er vinkelen mellom bevegelsesmengdevektoren og radiusvektoren. Som vi kan se fra figur 1, er det en 90^o vinkel mellom vektorene. Angulærmomentet blir derfor lik:

$$\begin{aligned} L &= 3.1 \cdot 10^{-15} \text{m} \cdot 1.034 \cdot 10^{20} \text{kgm/s} \cdot \sin 90^o \\ &= 3.251 \cdot 10^{-34} \text{m}^2 \text{kg/s} \end{aligned}$$

c) Ved å bruke høyrehåndsregel for kryssprodukt ser vi at angulærmomentet vil peke ut av planet slik at kjernen roterer mot klokka.

d) Vinkelfrekvensen til atomet blir lik:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{5L}{2MR^2} \\ &= \frac{5 \cdot 3.251 \cdot 10^{-34} \text{m}^2 \text{kg/s}}{2 \cdot 2.98 \cdot 10^{-26} \text{kg} \cdot (3.1 \cdot 10^{-15} \text{m})^2} \\ &= 2.84 \cdot 10^{21} \text{rad/s} \end{aligned}$$