# Seminaroppgaver 5

## S 5.1 På glattisen

Diskuter: Hvorfor er det tryggere å gå med korte skritt når du går på is? Bruk statisk og dynamisk friksjon i argumentasjonen deres.

**Løsning:** For å bevege deg framover bruker du den statiske friksjonskraften mellom dine sko og isen: Du dytter jorden tilbake og friksjonskraften fra jorden dytter deg framover. Jo større skritt du tar jo mer kraft må du bruke. På is er den statiske friksjonskoeffisienten veldig liten, så det begrenser hvor mye kraft du kan bruke uten å skli. Bare for veldig små skritt er friksjonskraften lavere enn maksimalverdien. Hvis du tar et skritt som er for stort, så blir friksjonskraften større enn maksimalverdien, friksjon blir dynamisk, og du sklir. Siden den dynamiske friksjonskoeffisienten er mindre enn den statiske, er det vanskelig å stoppe bevegelsen når du sklir.

## S 5.2 Fortegn på arbeid

Fortegnet på mange fysiske størrelser er avhengig av hvordan du velger retningen i koordinatsystemet. For eksempel så kan hastigheten til en ball i fritt fall kan være positiv eller negativ, avhengig hvordan du velger positiv retning. Gjelder dette også for arbeid? Med andre ord, kan vi gjøre negativt arbeid positivt ved å velge et annet koordinatsystem? Forklar!

**Løsning:** En kraft gjør et positivt arbeid på et legeme hvis kraften virker i bevegelsesretning, og negativt arbeid hvis kraften virker imot bevegelsesretning. Dette er derfor uavhengig av hvordan du velger positiv retning i et koordinatsystem.

## S 5.3 Arbeid og energi

Hvis det virker en nettokraft på et legeme som beveger seg, er det mulig at arbeidet som blir gjort på legemet er null? Er det mulig at følgende størrelser er konstant: fart (dvs banefart, en skalar), hastighet (hastighetsvektoren), kinetisk energi? Diskuter eksempler og forklar.

**Løsning:** Hvis kraften står vinkelrett på bevegelsesretningen, så gjør denne kraften ikke noe arbeid. Dette skjer for eksempel hvis du snurrer en ball som henger i en snor i en horisontal sirkelbevegelse. Du får en nettokraft som peker inn mot sirkelen, vinkelrett på bevegelsesretningen. Denne kraften gir sentripetalakselerasjon, som endrer bevegelsesretningen. Derfor er hastigheten ikke konstant (endrer hele tiden retning), men sentripetalakselerasjonen endrer ikke farten, og den kinetiske

energien er dermed også konstant.

## S 5.4 Energitap

Det blir ofte sagt at et system "taper energi". Forklar hvor den kinetiske eller potensielle energien forsvinner til når

a) en bil bremser

**Løsning:** Dannelse av varme, lyd, deformasjon, ...

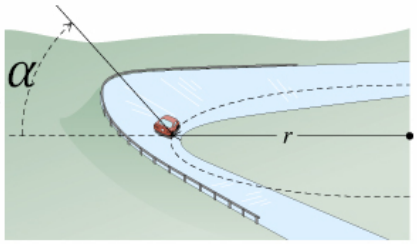
b) du står ned en bakke på ski

**Løsning:** Dannelse av varme, lyd, deformasjon, ...

c) du fanger en ball

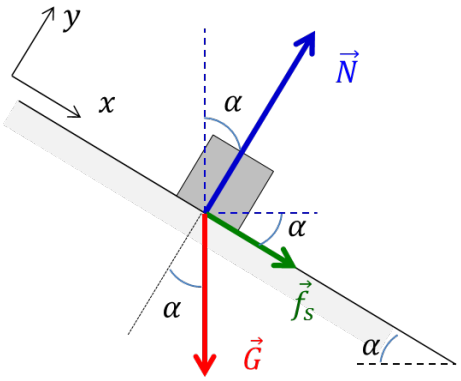
**Løsning:** Varmedannelse i kontaktflaten, energien absorberes av kroppen (musklene), ...

## S 5.5 Bil på racerbanen




Kurven ved Daytona Speedway har helningsvinkel $\alpha = 31.0°$ og kurveradius $r = 316$ m. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom bildekk og asfalt er $\mu_s = 0.700$. Hvor fort kan en bil kjøre gjennom kurven uten å gli?

**Løsning:**




Uten friksjon må bilen kjøre med presis fart $v_0$ gjennom kurven. Med lavere fart sklir bilen ned og med høyere fart sklir bilen opp i kurven. Friksjon gjør det mulig at bilen kan kjøre saktere og raskere gjennom kurven, men bare så lenge den statiske friksjonskraften er mindre enn maksimalverdien. Vi er interessert i hvor raskt bilen kan kjøre. Ved høy fart er friksjonskraften rettet innover, dvs. friksjonskraften hindrer bilen å skli opp. Vi velger $x$-aksen langs helningen. For å bli i kurven trenger bilen en sentripetalakselerasjon i horisontal retning. Vi bruker Newtons andre lov i $x$- og $y$-retning

$$mg\sin\alpha + f_s = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha$$

$$N - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}\sin\alpha.$$

Den statiske friksjonskraften har en maksimalverdi $f_s \leq \mu_s N$. Vi setter inn

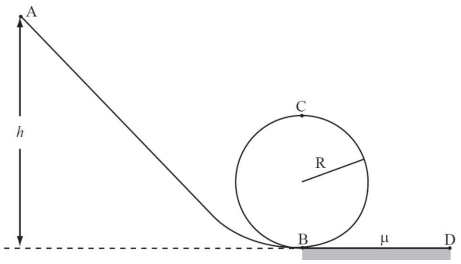
$$f_s = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha - mg\sin\alpha \leq \mu_s\left(m\frac{v^2}{R}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right)$$

og finner at

$$v \leq \sqrt{gR\frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}} = 83.4\ \text{m/s} = 300\ \text{km/t}.$$

Betingelsen for at et legeme ikke sklir ned en helning er at $\tan\alpha \leq \mu_s$. I dette tilfellet er $\tan\alpha = 0.6 < \mu_s$. Bilen kan stå stille og vil ikke skli ned helningen. Det er derfor mulig å kjøre gjennom kurven med $v \leq 300$ km/t.

## S 5.6 Loop



En blokk glir ned langs en rampe og deretter gjennom en loop med radius $R$. Etter loopen stanser blokken i punkt D på et horisontalt bord med en ru overflate. Blokken starter i ro ved punkt A i høyde $h$ over bordet. Friksjon på rampen og i loopen er neglisjerbar. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom blokken og bordet er $\mu$. Dersom du bruker energibevaring, må du begrunne hvorfor energien er bevart.

a) Finn farten $v_B$ av blokken ved punkt B før den går rundt loopen. **Løsning:** Uten friksjon virker bare gravitasjon og mekanisk energi er bevart:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh + 0 = 0 + frac12mv_B^2$$

$v_B = \sqrt{2gh}$

b) Finn farten $v_C$ ved punkt C. **Løsning:** Mekanisk energi er fortsatt bevart med samme argumentasjon som i a:

$$U_A + K_A = U_C + K_C$$

$$mgh + 0 = 2mgR + frac12mv_C^2$$

$v_C = \sqrt{2g(h-2R)}$

c) Hva er betingelsen for farten $v_C$ slik at blokken holder kontakt med loopen? **Løsning:** I punkt C virker gravitasjon og normalkraften fra banen på blokken. Begge er rettet nedover. Kreftene er årsak til sentripetalakselerasjonen som holder sirkelen på banen. Vi bruker Newtons andre lov:

$$-mg - N = -m\frac{v_C^2}{R}$$

Betingelsen for at blokken holder kontakt er at $N > 0$

$$N = m\frac{V_C^2}{R} - mg > 0$$

$v_C > \sqrt{Rg}$

d) Hvor høyt over bordet må blokken slippes for å gå rundt loopen? **Løsning:** Vi setter inn resultatet fra b, og kvadrerer på begge sider av ulikhetstegnet

$$2g(h-2R) > Rg$$

$h > \frac{5}{2}R$

e) Hvor langt sklir blokken på bordet før den stanser? **Løsning:** Friksjonskraften er den eneste kraften som gjør arbeid på blokken (normalkraft og tyngdekraft virker ikke i bevegelsesretningen). Siden den dynamiske friksjonskraften er konstant med størrelse $\mu_d N$ får vi:

$$W_{BD} = -\int_{x_B}^{x_D} \mu_d N dx = -\mu_d mg(x_D - x_B) = -\mu_d mgs$$

Arbeid-Energiteoremet gir $W_{BD} = K(x_D) - K(x_B)$ og hvis vi setter inn

$$-\mu_d mgs = 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\frac{1}{2}m2gh$$

Da får vi at $s = \frac{h}{\mu}$.

---

### Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

## S 5.7 Kule som triller ned sylinder

Vi har en sylinder med horisontal akse og radien R. En liten kloss ligger på toppen av sylinderen. Den gis et lite puff slik at den begynner å gli nedover sylinderflaten (anta at startfarta er tilnærmet null). Anta at overflata er friksjonsfri. Vi vil studere hvor langt ned klossen glir før den mister kontakten med overflata.

a) Bruk først dimensjonsanalyse til å bestemme hvordan svaret avhenger av radien til sylinderen og andre relevante parametre som du kan tenke på.

**Løsning:** Vi lar $\theta$ er vinkelen mellom vertikalen og linjen fra sentrum av sylinderen og ut til klossen. Vi vil finne vinkelen der klossen forlater overflata. Mulige relevante parametre er: Radien $R$ i sylinderen ($[R]$ = m), tyngdeakselerasjonen $g$ ($[g]$ = m/s$^2$) og massen $m$ til klossen ($[m]$ = kg). Vinkelen $\theta$ er dimensjonsløs, og vi ser at vi ikke klarer å lage noen dimensjonsløs kobinasjon av parametrene. Vinkelen kan dermed ikke avhenge av noen av dem, og er alltid den samme.

b) Hvor langt ned glir klossen før den mister kontakten med overflata?

**Løsning:** Vi kan finne farta $v$ i en gitt posisjon fra energibevaring (potensiell energi er null ved toppen av sylinderen)

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta),$$

som gir

$$v^2 = 2gR(1-\cos\theta).$$

Når klossen forlater sylinderflaten er normalkraften fra sylinderflaten på klossen null og dermed er

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} = 2mg(1-\cos\theta).$$

Da må

$$\cos\theta = \frac{2}{3}, \qquad \theta \approx 48^\circ.$$

c) Hva skjer hvis vi gir klossen en startfart $v_0$ som ikke er så liten at vi kan se bort fra den? Svar først på om den kommer til å gli kortere eller lengre ned. Undersøk hva du kan finne ut med dimensjonsanalyse. Regn til slutt ut hvor langt ned den kommer som funksjon av $v_0$ og andre relevante parametre.

**Løsning:** Klossen kommer nå til å ha større fart i en gitt høyde, og dermed blir normalkrafta mindre. Den kommer altså til å forlate sylinderen høyere opp. Vi har nå en ny parameter, $v_0$ ($[v_0]$ = m/s), og ser at vi kakn lage en dimensjonsløs kombinasjon $\frac{v_0^2}{Rg}$. Vinkelen klossen forlater overflata må altså være en eller annen ubestemt funksjon av dette forholdet. Vi kan finne den på samme måte som før, bare ta hensyn til kinetisk energi i starten

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv_0^2,$$

som gir

$$v^2 = 2gR(1-\cos\theta) + v_0^2.$$

Når klossen forlater sylinderflaten er normalkraften fra sylinderflaten på klossen null og dermed er

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} = 2mg(1-\cos\theta) + m\frac{v_0^2}{R}.$$

Da må

$$\cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3R}.$$

d) Vi bytter nå ut klossen med ei lita kula. Anta at friksjonen er sterk nok til at kula ruller uten å gli og at kulas radius er mye mindre enn sylinderens. Vil kula forlate sylinderen i samme høyden som klossen? Eller lengre opp eller ned?

**Løsning:** For ei kule som ruller vil noe av energien gå til rotasjon av kula, og dermed blir farten mindre. Det betyr at den forlater kula lengre ned (større $\theta$). For å finne ut hvor langt ned må vi vite hvor mye energi som lagres i rotasjonen. Dette kommer vi til i uke 12.