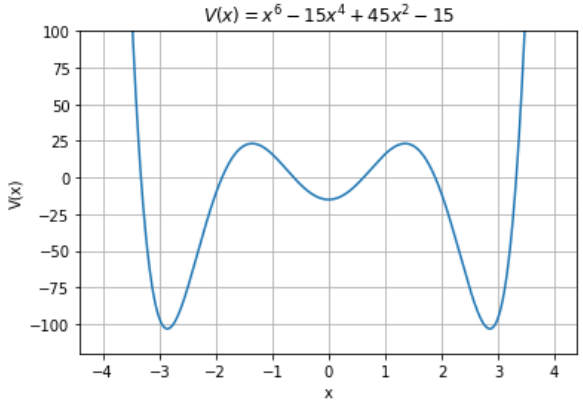
Seminaroppgaver 7

S 7.1 Et potensial

Figuren viser et endimensjonalt potensial gitt ved $V(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$.



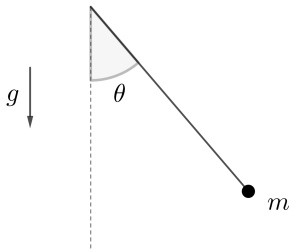
a) Bruk grafen til å identifisere stabile og ustabile likevektspunkter.

b) Se for deg at du har en friksjonsfri bane formet som dette potensialet. Hva skjer hvis du slipper en kule ned på banen i nærheten av et stabilt likevektspunkt?

c) Finn Taylorpolynomet av andre orden for potensialet rundt 0. Hvorfor forsvinner et av leddene i polynomet? *Hint: Hvordan ser forskjellige ordens deriverte ut rundt ekstremalpunkter?*

d) Sammenlikn Taylorpolynomet med potensialet til en fjær, $V(x) = \frac{1}{2}k\Delta x^2$, der Δx er forflytningen fra likevektspunktet. Bruk dette til å identifisere hvilket del av Taylorpolynomet som kan sammenliknes med en fjærkonstant for systemet.

S 7.2 Pendel med luftmotstand



Figuren viser en pendel før den slippes. Vinkelen θ er mellom horisontalen og snora. Vi antar at snora er masseløs og stram. I ukas forelesning har vi sett at akselerasjonen til pendelen i tangentiell retning (vinkelakselerasjonen) er gitt ved

$$a_T = -g\sin\theta \tag{1}$$

dersom vi ser bort fra luftmotstand. Man kan bruke buelengden $L = l\theta$ langs bevegelsen til å uttrykke akselerasjonen som

$$a_T = l\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{2}$$

I denne oppgaven skal vi ta med luftmotstand. Vi skal bruke en lineær luftmotstandskraft $\vec{F}_D$, som er gitt ved

$$\vec{F}_D = -D\vec{v}$$

der D er en konstant som beskriver størrelsen på motstanden, og $\vec{v}$ er pendelens hastighet.

a) I hvilken retning vil luftmotstandskraften virke i en sirkelbane?

b) Uttrykk luftmotstandskraften som en funksjon av vinkelhastighet. Bruk Newtons 2. lov og finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen som erstatter ligning (1) når vi tar hensyn til luftmotstand.

c) Sett opp en differensiallikning for vinkelen θ.

d) Hvorfor er det hensiktsmessig å Taylorutvikle $\sin(\theta)$ rundt 0 for denne differensiallikningen? Bruk Taylorutviklingen til første orden til å skrive om differensiallikningen fra c) slik at den kun inneholder ledd med θ og dens deriverte.

e) Sett opp et uttrykk for likningens analytiske løsning, og skriv et program som plotter bevegelsen over 20 s. Anta at pendelen slippes fra ro med en vinkel $\theta_0 = 15°$. Bruk $l = 1$ m, $D = 0.3$ kg/s og $m = 0.5$ kg. *Tips: Gjør algebraen enklere ved å bruke definisjoner som for eksempel* $\frac{D}{2m} \equiv \alpha$, $\frac{g}{l} \equiv \beta^2$ *og* $\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. *Generelt anbefaler vi å kun sette inn verdier når man skal finne ut hva slags løsning man har, og når man plotter.*

S 7.3 Dempede svingninger

Et lodd med massen m er festet i ei fjær med fjærkonstant k. Loddet beveger seg i et medium som gir en motstand proposjonal med farta. Vi legger origo i likevektspunktet for loddet.

a) Forklar at posisjonen til loddet som funksjon av tida er beskrevet ved differensiallikninga

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

b) Vi antar at vi har målt m og k, men ikke kjenner c. Vi tenker oss at vi gjør følgende eksperiment for å bestemme c. Vi slipper loddet fra ro i posisjonen $x_0 > 0$ og observerer at loddet snur første gang i posisjonen x_1. Her er $x_1 < 0$ og $|x_1| < x_0$. Finn et uttrykk for c uttrykt ved de kjente størrelsene m, k, x_0 og x_1.

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

S 7.4 Tau rundt sylinder

I denne oppgaven skal vi utlede en modell for krafta i et tau som går rundt en sylinder.
Utgangspunktet for denne oppgaven er et enkelt forsøk som alle kan gjøre:
`https://www.naturfag.no/forsok/vis.html?tid=16215`
Det vi skal fokusere på her er hvor fort friksjonen øker når et tau vikles rundt en sylinder.

a) Se på et tau viklet om en sylinder. Tegn et frilegemediagram som viser alle kreftene som virker på en liten (infinitesimal) bit av tauet. Anta at friksjonen er tilstrekkelig til at tauet ikke glir

b) Sett opp en differensiallikning som viser hvordan snordraget varierer langs tauet hvis krafta vi trekker i enden av tauet med er så stor at tauet akkurat ikke begynner å gli.

   Hint: Bruk Taylorrekker til å sammenlikne kreftene i hver ende av den lille biten med tau.

c) Løs differensiallikninga du fant over for passende initialbetingelser.

d) Sett opp et eksperiment som tester den loven du fant over for snordraget som funksjon av vinkel som tauet er viklet rundt sylinderen